材料力学

S. 铁摩辛柯

科学出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

5252
7.5.5

材料力学

(高等理論及問題)

S. 鉄摩辛柯 著

汪一麟 译

1100037

科学出版社

1979

内 容 简 介

本书内容丰富，深入浅出，且实例很多，是材料力学方面的名著.

本书阐述材料力学中较高深的问题，诸如弹性基础上的梁、板壳的屈曲、应力集中、塑性变形等，特别是最后一章“材料的机械性质”，论述相当全面，对各种强度理论、金属的疲劳、蠕变等均有阐述；此外还讨论了如何根据材料的机械性质来选择许用应力.

本书可供高等工业学校师生使用，也可供有关工程技术人员参考.

S. TIMOSHENKO

STRENGTH OF MATERIALS

PART II

Advanced Theory and Problems

D. Van Nostrand Company, Inc.

Third Edition 1957

材 料 力 学

S. 铁摩辛柯 著

汪 一 麟 译

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

国营五二三厂印刷

北京新华书店发行所发行　各地新华书店经售

*

1964 年 1 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1979 年 10 月第四次印刷　印张：15 1/2

印数：17,951～86,450　字数：402,000

统一书号：13031 · 396

本社书号：549 · 13—2

定价： 1.90 元

第三版序言

在准备本书的最新版时，增加了大量的新材料。 全书各章不仅添加了新的习題和附图，还添加了最新的参考資料。 在內容方面改变得較多的是扭轉、塑性变形及材料的机械性質这几章。

关于扭轉，不仅考究了开口截面薄壁构件的扭轉屈曲問題，还考究了有中間隔层的管件的扭轉問題。在設計如飞机結构組件等薄壁結构时，这些課題均很重要。在塑性变形这一章中，討論了极限設計的基本原理，举出了这一方法应用于結构分析的几个例子。

增訂最多的是材料的机械性質这一章，以致这一章現在有160頁以上。 扩充这一章的目的，是要集中注意于結构材料性質的实驗研究方面的最近发展。所討論的課題包括：(1)缺陷对脆性材料极限強度的影响与"尺寸效应"；(2)对单晶体与多晶体試样的試驗結果的比較；(3)在二維和三維应力状态下的材料試驗与各种強度理論；(4)在冲击載荷下的材料強度；(5)在各种不同应力状态下金屬的疲劳与提高机器另件疲劳強度的方法；以及(6)在高溫下的材料強度、蠕变現象以及蠕变試驗数据在設計中的应用。 所提到的許多近代文献，对于欲进一步扩充在这些課題方面的知識的讀者是有帮助的。最后，在本书的結尾一节中，对于如何适当选择實用应力也介紹得相当詳細。

作者希望，增加的这些材料能使本书在用于对研究班講授材料力学課程时将更为完备，并对从事机械工程及結构工程的設計师及研究工程师也更为有用。

最后，作者对斯丹福大学盖尔(James M. Gere)教授在修訂本书和閱讀校样时的帮助以及提出的許多建議表示感謝。

S. 鉄摩辛柯

斯丹福大学

1956年2月10日

第二版序言

在准备本书的新版时，原书中总的特色保持不变；仅致力于集納新的理論和实驗資料——它們体現应力分析和对結构材料的机械性質的实驗研究諸方面的最新发展——俾使本书更趋完备并合乎时代.

較之初版，最重要的增添如下：

1. 对于細长与薄壁結构的弯曲、压縮和扭轉等問題作了更全面的討論. 这类結构現正被广泛地应用于飞机构造中，在新版中訊为应更多地包括来自这方面的問題.

2. 增加了講塑性变形的一章，論述梁和軸在超过弹性极限时的弯曲和扭轉，以及承受巨大內压力的厚壁圓筒中材料的塑性流动.

3. 补充了属于实驗性質的大量新資料，这些資料涉及結构材料在高溫下的性状和金属在反复应力下的疲劳，特别是疲劳与高度应力集中相結合的那些情况.

4. 书中講弹性基础上的梁的部分，講曲杆理論、板壳理論的各章，講应力集中的一章，均有重要的增添；在应力集中这一章中，还集納了光測弹性試驗的一些最新成果.

自本书的初版問世后，作者所著的更为深些的"弹性理論"、"弹性穩定理論"和"板壳理論"三书也已先后出版. 对于这三本书，本书中曾多处引用，特别是在仅列出最后結果，而无完整的数学推导的場合.

作者希望上面述及的增添将使本书对材料力学这一課題作出合乎时代的陈述，俾对有志于工程力学的毕业生和研究复杂应力分析問題的設計工程师均能有所裨益.

S. P. 鉄摩辛柯

加利福尼亚 Palo Alto

1941 年 6 月 12 日

第一版序言

材料力学下卷主要是为研究生、研究工程师及設計师而写的。作者力求写出一部能包括材料強度和弹性理論方面有实际重要性的新发展的书籍。凡有实用价值的問題大多数作了完整的推导。只有少数較复杂的問題，由于其求解过程超出工程数学的一般水平，只把最后結果列出。在这种情形下，对这些結果的实际应用均作了討論，并同时指出了有关的参考文献，从中可得知其解的完整推导过程。

在第一章中研究了稜柱杆弯曲中一些較复杂的問題。对于弹性基础上杆件弯曲的一些重要問題作了詳細的討論，并給出了这一理論对研究鋼軌和管子中的应力的应用。此外，还討論了三角級数在研究弯曲問題时的应用，并推导了关于縱向和横向联合載荷的一些重要的近似公式。

在第二章中詳細发展了曲杆理論。以吊鉤、飞輪、鏈环、活塞环及弯管內的应力分析为例来闡明这一理論如何应用于机器設計。

第三章包括薄板弯曲的理論。对薄板弯成圓柱面的情形及圓板的对称弯曲，均作了詳細的討論，并說明其实际应用。此外，还給出了关于矩形板在均布載荷下弯曲的一些数据。

在第四章中討論了具有迴轉体形状的另件在对称載荷下的应力分布問題。这些問題对于从事設計承受內压的容器和設計旋轉机械的設計师特別重要。此外，对薄壁容器中的拉伸应力和弯曲应力、厚壁圓筒中的应力、冷縮配合应力、轉子和轉盘中由于慣性力而产生的动荷应力，以及由于受热不均匀而产生的应力均曾涉及。

第五章包括受压构件和薄板由于丧失弹性稳定而发生的側向

屈曲的理論．这些問題对于許多近代結构非常重要，因这些結构由于用了強度較高的材料和力求減輕重量，其截面尺寸已減小到最低限度．工程結构的失效往往是由于丧失弹性稳定而并非由于材料強度不足所致．

在第六章中研究了杆件上因存在的孔和槽，使截面急驟改变而产生的不規則的应力分布，并討論了应力集中的实用意义．对光测弹性法也作了論述，在研究应力集中时，这一方法已被証明非常有效．对扭轉問題中的薄膜比拟法及其在研究輾压截面和管形截面中凹角处应力集中时的应用作了說明．此外，还討論了变直径的圓軸，并用电比拟法來說明这种軸圓角处的局部应力．

在最后一章中討論了材料的机械性質．这里所注意的是一般原理，而不是对已建立的标准化的材料試驗方法及操作設备的描述．对单晶体机械性質方面最近的研究成果以及这种資料的实用意义作了論述．諸如金屬的疲劳及其在高温下金屬的強度等課題，在近代机器設計中具有极其重大的实用价值．在論述这些問題时，特别着重于該方面的新发展．

最后研究了各种強度理論．对这些理論与在各种不同应力状态下确定容用应力的方法之間的关系这一重要課題作了进一步的論述．

前已指出，本书一方面是为了教学目的而写，但同时也可供进修之用．作者凭自己經驗，通常將本书內容分为下列三項課程：(1)包括第一、三及五章，它們主要是为从事結构工程的研究生而用；(2)包括第二、三、四及六章，为有志于机器設計的学生而用；(3)以第七章为基础并輔以在材料試驗室的演示．作者觉得，这样一門研究材料机械性質的基本原理，并建立这些性質与設計时在各种不同条件下所用的容用应力之間关系的課程，具有实际的重要性，在我們的工科課程中实应多加注意这門学問．

作者乘此机会对曾帮助他，向他提供意見，閱讀原稿和校样的朋友們致謝，特别是密歇根大学工学院的数学和力学教师柯兹(W. M. Coates)先生和唐納尔(L. H. Donnell)先生，以及密歇根

大学工程研究部的爱佛来脱(F. L. Everett)先生。作者还对韦尔哈姆(F. C. Wilharm)先生的繪图、韦勃斯脱(E. D. Webster)夫人的原稿打字以及凡脑斯脱兰公司的費心出版本书表示謝意。

S. 鉄摩辛柯

密歇根，安阿伯

1930 年 5 月 1 日

譯 者 序

本书为鉄摩辛柯的名著之一，是材料力学的經典著作，可用作大学研究生和进修生学习高等材料力学的教材。

本书的特点是，內容丰富和富有創造性，分析問題层次分明、深入浅出，闡述問題精簡扼要、重点突出；并且所举的实例很多，有利于实际应用。本书对于教学、科研和工程設計很有参考价值。

有鉴于此，譯者特在执教之余将本书譯出，以供高等工业学校师生、科学研究工作者以及从事机械設計和結构設計的工程技术人員参考。

在翻譯过程中承周麒、邵本逑、林圭、王寅秋、程經熙、石宝麟等同志大力协助，謹在此表示感謝。

汪一麟
上海交通大学
一九六〇年十月

符　　号

α——角，热膨涨系数，数字系数

β——角，数字系数

γ——剪应变，单位体积内的重量

Δ——单位体积膨涨量，距离

δ——总伸长量，总橈度，距离

ε——单位应变

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$——在 x，y 和 z 方向的单位应变

θ——角，軸单位长度内的扭轉角

μ——泊桑比

ρ——距离，半径

σ——单位正应力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$——主应力

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$——在垂直于 x，y 和 z 軸的平面上的单位正应力

σ_E——达耐久极限时的单位应力

σ_{ult}——极限应力

σ_{uc}, σ_{ut}——压縮极限应力和拉伸极限应力

σ_W——資用应力

$\sigma_{Y.P.}$——屈服点应力

τ——单位剪应力

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$——在垂直于 x，y 和 z 軸的三平面上平行于 y，z 和 x 軸的单位剪应力

τ_E——剪切耐久极限

τ_{oct}——在八面体平面上的单位剪应力

τ_{ult}——剪切极限应力

τ_W——剪切資用应力

$\tau_{Y.P.}$——剪切屈服点应力

φ——角，軸的扭轉角

ω——角速度

A——截面积

a, b, c, d, e——距离

C——扭轉刚度

C_1——翘曲刚度

D——弯曲刚度

d——直径

E，E_t，E_r——弹性模量、正切模量、折合模量

f——剪流

G——切变弹性模量

h——高度，厚度

I_p，I_0——平面面积对形心和剪切中心的极惯性矩

I_x，I_y，I_z——平面面积对 x，y 和 z 軸的惯性矩

k——基础系数，迴轉半径，应力集中系数，数字常数

l——长度，跨距

M——弯矩

M_{ult}——极限弯矩

$M_{Y.P.}$——开始屈服时的弯矩

M_t——轉矩

$(M_t)_{ult}$——极限轉矩

$(M_t)_{Y.P.}$——开始屈服时的轉矩

n——安全系数

P，Q——集中力

p——压力，振动频率

q——单位长度内的載荷，面积收縮量，敏感系数

R——反力，力，半径，应力幅

r——半径，曲率半径

S——軸向力，表面张力

s——长度

T——轴向力，絕对温度

t——温度，厚度

U——应变能

u——应变率，在 x 方向的位移

V——体积，剪力

v——速度，蠕变率，在 y 方向的位移

W——重量

w——单位体积内的应变能，在 z 方向的位移

x, y, z——直角坐标

Z——截面模量

目　　录

第一章　弹性基础上的梁……………………………………………… 1
§1. 无限长的梁……………………………………………………… 1
§2. 半无限长的梁……………………………………………………11
§3. 弹性基础上有限长的梁…………………………………………15
第二章　受軸向与横向联合載荷的梁……………………………24
§4. 直接压縮与横向載荷……………………………………………24
§5. 連續支柱……………………………………………………………34
§6. 受横向載荷的系杆………………………………………………37
§7. 用三角級数来表示的撓度曲綫…………………………………42
§8. 具有微小初曲率的杆的撓曲……………………………………49
第三章　梁弯曲中的一些特殊問題………………………………52
§9. 梁弯曲中的局部应力……………………………………………52
§10. 变截面梁中的剪应力……………………………………………56
§11. 薄凸緣的有效寬度………………………………………………58
§12. 迭加法的限制……………………………………………………62
第四章　薄板与薄壳……………………………………………………68
§13. 板弯成圓柱面的弯曲……………………………………………68
§14. 受均布載荷的长矩形板的弯曲…………………………………70
§15. 具有微小初圓柱曲率的长矩形板的撓曲………………………75
§16. 在两个垂直方向的純弯曲………………………………………77
§17. 板中的热应力……………………………………………………81
§18. 圓板受中心对称載荷时的弯曲…………………………………82
§19. 受均布載荷圓板的弯曲，边为固定的板………………………85
§20. 变厚度圓板的弯曲………………………………………………90
§21. 中心受載荷的圓板的弯曲，边为固定的板……………………91
§22. 受集中載荷的圓板的弯曲………………………………………94
§23. 中心有一圓孔的圓板受对称載荷时的撓曲，由力偶引起的弯曲96

§24. 矩形板的弯曲……………………………………………… 100
§25. 承受内压的薄壁容器…………………………………………… 103
§26. 薄壁容器中的局部弯曲应力…………………………………… 110
§27. 圆筒壳中的热应力……………………………………………… 118
§28. 圆环由于沿其中心綫均布的力偶而引起的扭轉……………… 121
第五章 杆、板与壳的屈曲 ……………………………………128
§29. 稜柱杆的横向屈曲:簡单情形 ……………………………… 128
§30. 稜柱杆的横向屈曲:复杂情形 ……………………………… 135
§31. 計算临界压縮載荷的能量法…………………………………… 142
§32. 稜柱杆在均布軸向力作用下的屈曲…………………………… 146
§33. 变截面杆的屈曲………………………………………………… 148
§34. 剪力对临界載荷的影响………………………………………… 150
§35. 格子支柱的屈曲………………………………………………… 152
§36. 直柱的非弹性屈曲……………………………………………… 156
§37. 圆环和圆管在外压作用下的屈曲. 圆环的屈曲……………… 162
§38. 矩形板的屈曲…………………………………………………… 168
§39. 无横向支承的梁的屈曲………………………………………… 173
第六章 对称于軸綫的变形 ……………………………………179
§40. 厚壁圆筒………………………………………………………… 179
§41. 由冷縮配合而产生的应力……………………………………… 183
§42. 等厚度轉盘……………………………………………………… 186
§43. 变厚度轉盘……………………………………………………… 193
§44. 空心长圆筒中的热应力………………………………………… 198
第七章 扭轉 ……………………………………………………204
§45. 非圆截面的軸…………………………………………………… 204
§46. 薄膜比拟………………………………………………………… 205
§47. 輾制型材截面的扭轉…………………………………………… 211
§48. 薄壁管件的扭轉………………………………………………… 214
§49. 有些截面无翹曲的开口截面薄壁构件的扭轉………………… 220
§50. 开口截面薄壁构件的弯扭联合作用…………………………… 230
§51. 开口截面薄壁构件的扭轉屈曲………………………………… 236
§52. 开口截面薄壁构件由于同时受弯曲和扭轉而引起的屈曲…… 240

§ 53. 扭杆中的縱向正应力 246
§ 54. 疏圈螺旋彈簧 251
第八章 应力集中 258
§ 55. 受拉或受压构件中的应力集中 258
§ 56 有一圓孔的板中的应力 259
§ 57 受拉构件中的其他应力集中情形 263
§ 58 扭轉中的应力集中 268
§ 59 变直径圓軸 272
§ 60. 弯曲中的应力集中 278
§ 61. 利用模型研究应力集中 283
§ 52 測量应力的光彈性法 286
§ 63 球和滾子中的接触应力 291
第九章 超过彈性极限后的变形 297
§ 64. 由完全塑性材料制成的結构 297
§ 65 結构的极限强度 304
§ 66 由不服从胡克定律的材料制成的梁的純弯曲 314
§ 67 梁由超过彈性极限的横向載荷引起的弯曲 320
§ 68. 由非彈性弯曲所产生的残余应力 322
§ 69. 超过彈性极限的扭轉 326
§ 70. 厚壁圓筒在內压作用下的塑性变形 330
第十章 材料的机械性質 336
§ 71 总論 336
§ 72 脆性材料的拉伸試驗 337
§ 73 延性材料的拉伸試驗 341
§ 74 单晶体試样在彈性范围內的試驗 344
§ 75 单晶体試样的塑性伸長 348
§ 76 軟鋼在彈性范围內的拉伸試驗 350
§ 77. 屈服点 355
§ 78. 鋼在超过屈服点后的伸長 358
§ 79. 拉伸断裂的型式 365
§ 80. 压縮試驗 370
§ 81. 复合应力下的材料試驗 372

§ 82. 强度理論 …… 378
§ 83. 冲击試驗 …… 392
§ 84. 金属的疲劳 …… 398
§ 85. 在复合应力下的疲劳 …… 406
§ 86. 影响耐久极限的各种因素 …… 409
§ 87. 疲劳和应力集中 …… 414
§ 88. 疲劳中应力集中影响的減小 …… 422
§ 89. 表面疲劳破坏 …… 428
§ 90. 疲劳的起因 …… 431
§ 91 金属在高溫下的机械性質 …… 437
§ 92. 梁在高溫下的弯曲 …… 445
§ 93. 应力松弛 …… 448
§ 94. 复合应力下的蠕变 …… 451
§ 95. 二維蠕变的特殊情形 …… 454
§ 96. 資用应力. 总論 …… 460
內容索引 …… 472

第一章 弹性基础上的梁

§1. 无限长的梁. 我們来研究一稜柱形梁,其全长为一連續的弹性基础所支承. 于是当梁发生撓曲时,在每一点处,連續分布反力与該点的沉陷成正比[1]. 在这样的条件下,作用于梁单位长度上的反力可用 ky 表示,其中 y 为沉陷而 k 为常数,k 通常称为**基础系数**. 这一常数表示当沉陷等于单位长时在单位长度內的反力. 基础的連續反力与沉陷成正比这一簡单假設是許多实际情形的很好的近似. 例如,就鋼軌而論,根据这一假設求得的解与实測結果很为符合[2]. 在研究梁的撓度曲綫时,我們运用微分方程式[3]:

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = q, \tag{a}$$

式中 q 表示作用在梁上的載荷强度. 对于不受載荷的一段梁,梁上唯一的力即为来自基础的連續分布反力,其强度为 ky. 于是 $q = -ky$,而式(a)变成

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = -ky. \tag{1}$$

---

1) 梁埋置在能使梁上下受力的材料內.

2) 参看作者和 B. F. Langer 的論文, *Trans. A. S. M. E.*, Vol. 54, p. 277, 1932. 弹性基础上的梁的弯曲理論已由 E. Winkler 加以发展, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague, p. 182, 1867. 并参看 H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues, Berlin, 1888. 关于此理論的进一步发展可在下列文献中見到: Hayashi, Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin, 1921; Wieghardt, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 2, 1922; K. v. Sanden and Schleicher, *Beton u. Eisen*, Heft 5, 1926; Pasternak, *Beton u. Eisen*, Hefte 9 and 10, 1926; W. Prager, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 7, p. 354, 1927; M. A. Biot, *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. A-1, 1937; M. Hetényi, Beams on Elastic Foundation, Ann Arbor, 1946.

3) 参看作者所著"材料力学"(原书上卷)第 140 頁式(80).

如用記号

$$\sqrt[4]{\frac{k}{4EI_z}}=\beta, \tag{2}$$

式(1)的通解就可表示如下:

$$y=e^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x). \tag{b}$$

将式(b)代入式(1)就不难証实这一点. 在特定情形下,此通解的常数 A, B, C 和 D 必須由某些点的已知条件来确定.

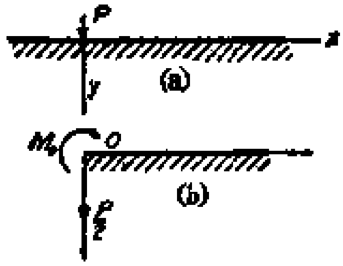


图 1

我們来研究一集中載荷作用在一无限长梁上的情形(图 1a)作为一例,取力的作用点为坐标原点. 由于对称条件,只需研究載荷右边的这段梁(图 1b). 在将通解,式(b),应用于此情形时,必須首先求出任意常数. 可以awkward认为,在离力 P 无限远的点上,撓度及曲率等于零. 只有在式(b)中的常数 A 和 B 取为零时,这一条件才能满足. 于是右边这段梁的撓度曲綫变成

$$y=e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x). \tag{c}$$

剩下的这两个积分常数 C 和 D 可由 $x=0$ 的原点条件求得. 撓度曲綫在这一点应有一水平切綫;所以

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0,$$

或将式(c)的 y 值代入,得

$$e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x+C\sin\beta x-D\cos\beta x)_{x=0}=0,$$

从而得

$$C=D.$$

于是式(c)变成

$$y=Ce^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x). \tag{d}$$

此式的各阶导数为

$$\frac{dy}{dx}=-2\beta Ce^{-\beta x}\sin\beta x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\beta^2 C e^{-\beta x}(\sin\beta x - \cos\beta x), \tag{e}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4\beta^3 C e^{-\beta x}\cos\beta x. \tag{f}$$

现在常数 C 可由右边这段梁在 $x=0$ 处的剪力等于 $-(P/2)$ (图1b)这一事实来确定。负号系按照我們对剪力符号的約定而定的(参看原书上卷第75—76頁)。于是

$$(V)_{x=0} = \left(\frac{dM}{dx}\right)_{x=0} = -EI_z\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -\frac{P}{2},$$

或用式(f),得

$$EI_z \cdot 4\beta^3 C = \frac{P}{2},$$

从而得

$$C = \frac{P}{8\beta^3 EI_z}.$$

将此值代入式(d)和(e),得下列的撓度及弯矩曲綫方程式:

$$y = \frac{P}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x), \tag{3}$$

$$M = -EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x}(\sin\beta x - \cos\beta x). \tag{4}$$

作图时,式(3)和式(4)各为一振幅漸減的波状曲綫。这些曲綫的波长 a 可用函数 $\cos\beta x$ 和 $\sin\beta x$ 的周期表示,即

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4EI_z}{k}}. \tag{5}$$

为使撓度、弯矩及剪力的計算簡化起見,列出一数字表(表1),表中所用的符号如下:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x);\\ \psi &= -e^{-\beta x}(\sin\beta x - \cos\beta x);\\ \theta &= e^{-\beta x}\cos\beta x;\ \zeta = e^{-\beta x}\sin\beta x.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

图2表示函数 φ 及 ψ 的图綫。

表1 函数 φ,ψ,θ 及 ζ

βx	φ	ψ	θ	ζ
0	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.1	0.9907	0.8100	0.9003	0.0903
0.2	0.9651	0.6398	0.8024	0.1627
0.3	0.9267	0.4888	0.7077	0.2189
0.4	0.8784	0.3564	0.6174	0.2610
0.5	0.8231	0.2415	0.5323	0.2908
0.6	0.7628	0.1431	0.4530	0.3099
0.7	0.6997	0.0599	0.3798	0.3199
0.8	0.6354	−0.0093	0.3131	0.3223
0.9	0.5712	−0.0657	0.2527	0.3185
1.0	0.5083	−0.1108	0.1988	0.3096
1.1	0.4476	−0.1457	0.1510	0.2967
1.2	0.3899	−0.1716	0.1091	0.2807
1.3	0.3355	−0.1897	0.0729	0.2626
1.4	0.2849	−0.2011	0.0419	0.2430
1.5	0.2384	−0.2068	0.0158	0.2226
1.6	0.1959	−0.2077	−0.0059	0.2018
1.7	0.1576	−0.2047	−0.0235	0.1812
1.8	0.1234	−0.1985	−0.0376	0.1610
1.9	0.0932	−0.1899	−0.0484	0.1415
2.0	0.0667	−0.1794	−0.0563	0.1230
2.1	0.0439	−0.1675	−0.0618	0.1057
2.2	0.0244	−0.1548	−0.0652	0.0895
2.3	0.0080	−0.1416	−0.0668	0.0748
2.4	−0.0056	−0.1282	−0.0669	0.0613
2.5	−0.0166	−0.1149	−0.0658	0.0492
2.6	−0.0254	−0.1019	−0.0636	0.0383
2.7	−0.0320	−0.0895	−0.0608	0.0287
2.8	−0.0369	−0.0777	−0.0573	0.0204
2.9	−0.0403	−0.0666	−0.0534	0.0132
3.0	−0.0423	−0.0563	−0.0493	0.0070
3.1	−0.0431	−0.0469	−0.0450	0.0019
3.2	−0.0431	−0.0383	−0.0407	−0.0024
3.3	−0.0422	−0.0306	−0.0364	−0.0058
3.4	−0.0408	−0.0237	−0.0323	−0.0085
3.5	−0.0389	−0.0177	−0.0283	−0.0106

βx	φ	ψ	θ	ζ
3.6	−0.0366	−0.0124	−0.0245	−0.0121
3.7	−0.0341	−0.0079	−0.0210	−0.0131
3.8	−0.0314	−0.0040	−0.0177	−0.0137
3.9	−0.0286	−0.0008	−0.0147	−0.0140
4.0	−0.0258	0.0019	−0.0120	−0.0139
4.1	−0.0231	0.0040	−0.0095	−0.0136
4.2	−0.0204	0.0057	−0.0074	−0.0131
4.3	−0.0179	0.0070	−0.0054	−0.0125
4.4	−0.0155	0.0079	−0.0038	−0.0117
4.5	−0.0132	0.0085	−0.0023	−0.0108
4.6	−0.0111	0.0089	−0.0011	−0.0100
4.7	−0.0092	0.0090	0.0001	−0.0091
4.8	−0.0075	0.0089	0.0007	−0.0082
4.9	−0.0059	0.0087	0.0014	−0.0073
5.0	−0.0046	0.0084	0.0019	−0.0065
5.1	−0.0033	0.0080	0.0023	−0.0057
5.2	−0.0023	0.0075	0.0026	−0.0049
5.3	−0.0014	0.0069	0.0028	−0.0042
5.4	−0.0006	0.0064	0.0029	−0.0035
5.5	0.0000	0.0058	0.0029	−0.0029
5.6	0.0005	0.0052	0.0029	−0.0023
5.7	0.0010	0.0046	0.0028	−0.0018
5.8	0.0013	0.0041	0.0027	−0.0014
5.9	0.0015	0.0036	0.0026	−0.0010
6.0	0.0017	0.0031	0.0024	−0.0007
6.1	0.0018	0.0026	0.0022	−0.0004
6.2	0.0019	0.0022	0.0020	−0.0002
6.3	0.0019	0.0018	0.0018	+0.0001
6.4	0.0018	0.0015	0.0017	0.0003
6.5	0.0018	0.0012	0.0015	0.0004
6.6	0.0017	0.0009	0.0013	0.0005
6.7	0.0016	0.0006	0.0011	0.0006
6.8	0.0015	0.0004	0.0010	0.0006
6.9	0.0014	0.0002	0.0008	0.0006
7.0	0.0013	0.0001	0.0007	0.0006

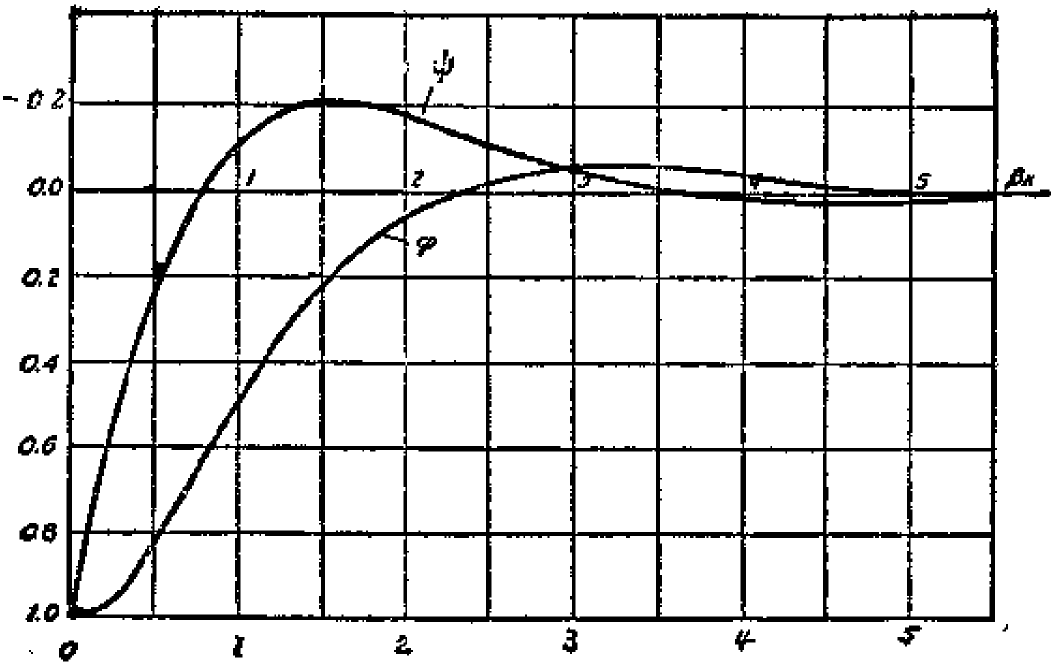


图 2

运用記号(6)和(d)—(f)諸式,得

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{2k}\varphi(\beta x),\ \frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k}\zeta(\beta x), \\ M &= -EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta}\psi(\beta x), \\ V &= -EI_z\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2}\theta(\beta x). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

根据这些方程式和表 1，就能很快地算出梁在任意截面处的挠度、斜率、弯矩及剪力. 最大挠度和最大弯矩发生在原点处,其值各为

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{P\beta}{2k}, \tag{8}$$

$$M_0 = (M)_{x=0} = \frac{P}{4\beta}. \tag{9}$$

运用单个载荷的解[式(3)]和迭加原理,就能很快地求得弹性基础上的无限长梁由任意载荷所产生的挠度.

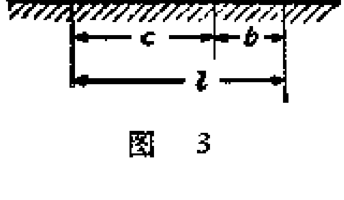


图 3

我們来研究均布载荷作用在一无限长梁的长度 l 上的情形(图 3)作为一例. 研究任意点 A，并以 c 和 b 表示从此点到梁上受载部分的起点和終点的距离. 用 qdx

代替式(3)中的 P，得載荷元 qdx 在 A 点所产生的撓度为

$$\frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x).$$

于是，分布在长度 l 上的載荷在 A 点所产生的撓度为

$$y = \int_0^b \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) +$$
$$+ \int_0^c \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$$
$$= \frac{q}{2k}(2 - e^{-\beta b}\cos\beta b - e^{-\beta c}\cos\beta c). \tag{g}$$

如果 c 和 b 均很大，則 $e^{-\beta b}$ 和 $e^{-\beta c}$ 之值将很小，从而撓度[式(g)]将近似等于 q/k；即在离杆上受載部分两端很远的各点，杆的弯曲可忽略不計，并可假設均布載荷 q 被直接传至弹性基础上。当 A 点取为杆上受載部分的端点时，得 $c = 0$，$b = l$，$e^{-\beta c}\cos\beta c = 1$。設 l 很大，又得 $e^{-\beta b}\cos\beta b \approx 0$。于是 $y = q/2k$；即撓度現在只有上面求得之値的一半。

同样，用式(4)能导出 A 点的弯矩表达式。如 A 点位于梁上受載部分之外，而 b 和 c 分別表示此点到梁上受載部分两端的較大和較小距离，則 A 点的撓度为

$$y = \int_0^b \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) -$$
$$- \int_0^c \frac{qdx}{8\beta^3 EI_z} e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$$
$$= \frac{q}{2k}(e^{-\beta c}\cos\beta c - e^{-\beta b}\cos\beta b). \tag{h}$$

当 $c = 0$ 而 $b = l$ 很大时，得撓度为 $q/2k$，此与我們上面的結論符合。当距离 b 和 c 增加时，式(h)的撓度减小，随 b 和 c 的漸增而趋于零。

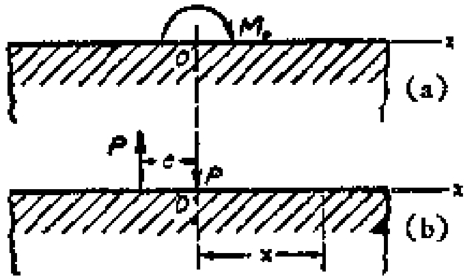


图 4

运用单个載荷的解式(3)也可

以分析一力偶作用于一无限长梁上的情形(图4a). 如当 e 趋于零时 Pe 趋于 M_0, 則力偶的作用就相当于图4b所示的两个力 P. 运用方程組(7)的第一式,求得离原点 x 处的撓度为

$$y = \frac{P\beta}{2k}\{\varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+e)]\}$$

$$= \frac{M_0\beta}{2k} \cdot \frac{\varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+e)]}{e} = -\frac{M_0\beta}{2k}\frac{d\varphi}{dx}.$$

由式(7)得

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\beta\zeta,$$

而由力偶 M_0 所产生的撓度曲綫变成

$$y = \frac{M_0\beta^2}{k}\zeta(\beta x). \tag{10}$$

将上式微分,得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0\beta^3}{k}\psi(\beta x),$$

$$M = -EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0}{2}\theta(\beta x), \tag{10'}$$

$$V = -EI_z\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{M_0\beta}{2}\varphi(\beta x).$$

运用上列諸式和表1,就能很快地算出梁在任意截面处的撓度、斜率、弯矩及剪力.

現在我們来研究多个載荷作用在一无限长梁上的情形. 以討論鋼軌由于机車車輪压力引起的弯曲作为一例. 下面所述的分析鋼軌应力的方法是基于鋼軌下有一連續彈性基础这一假設的. 这一假設与实际很为接近[1], 因为枕木的間距比式(5)所表示的撓度曲綫波长 a 要小得多. 为了求得基础系数 k 的大小, 須将使一根枕木沉陷一单位距离所需的載荷除以枕木間距. 設相应于鋼軌压

1) 参看作者的論文 "Strength of Rails", *Memoirs Inst. Engrs. Ways of Communication* (St. Petersburg), 1915; 及作者发表在 *Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, 1926 中的論文. 并参看本节第二个脚注.

力的两个載荷对枕木是对称作用的. 例如,假設在两个 10000 磅載荷之下枕木沉陷了 0.3 吋,而枕木間距为 22 吋;则

$$k=\frac{10000}{0.3\times 22}=1500\ 磅/吋^2.$$

对于单个車輪載荷 P 的情形,式(8)和式(9)可用来求最大挠度和最大弯矩. 由于鋼軌弯曲而产生的最大应力为

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{Z}=\frac{P}{4\beta Z}=\frac{P}{4Z}\sqrt[4]{\frac{4EI_z}{k}},\tag{i}$$

式中 Z 表示鋼軌的截面模量[1].

为了比較截面几何相似的鋼軌內的应力,式(i)可写成:

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}\cdot\frac{A\sqrt[4]{I_z}}{4Z}\cdot\sqrt[4]{\frac{4E}{k}},\tag{j}$$

式中 A 为鋼軌的截面积. 由于式(j)右面第二个因子对几何形状相似的截面而言为常数而第三个因子与鋼軌的尺寸无关,所以最大应力与截面积成反比,即与鋼軌单位长度的重量成反比.

一根枕木上最大压力 R_{max} 的近似值为最大沉陷与枕木間距 l 及基础系数的乘积. 因此,运用式(8)可得

$$R_{max}=\frac{P\beta}{2k}lk=\frac{P\beta l}{2}=\frac{P}{2}\sqrt[4]{\frac{kl^4}{4EI_z}}.\tag{k}$$

由此可見,枕木上的压力主要与枕木間距 l 有关. 还应指出,k 在式(j)和式(k)中均以四次根出現. 因此,确定 k 时产生的誤差对 σ_{max} 和 R_{max} 的影响是非常小的.

当有多个載荷同时作用在鋼軌上时,必須运用迭加法. 我們来討論一数字例子以說明这一計算方法. 研究一慣性矩 $I_z=44$ 吋^4 的 100 磅鋼軌,枕木間距根据 $k=1500$ 磅/吋^2 而定;于是由式(2)得

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI_z}}=\sqrt[4]{\frac{1500}{4\times 30\times 10^6\times 44}}=\frac{1}{43.3}\ 吋^{-1},$$

1) 写(i)式时假設了初等的梁公式可用于載荷所作用的截面. 由更詳細的研究知,由于局部应力的存在,可以預料与初等方程式(i)有很大的偏离.

而由式(5)得

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 272 \text{ 吋}.$$

例如，有一組相距 66 吋的四个相等車輪載荷．如以第一个輪子的接触点作为坐标原点，則其他几个輪子的 βx 値将如表 2 所示．表中还給出了取自表 1 的函数 φ 和 ψ 的相应数值．

表 2

載荷	1	2	3	4
βx	0	1.52	3.05	4.57
ψ	1	−0.207	−0.051	0.008
φ	1	0.230	−0.042	−0.012

将鋼軌上所有这四个載荷的作用迭加后，由式(4)得，第一个輪子下的弯矩为

$$M_1 = \frac{P}{4\beta}(1 - 0.207 - 0.051 + 0.008) = 0.75\frac{P}{4\beta},$$

即弯矩比单个載荷 P 所产生的要小25%．对于第二个輪子的接触点，同样得

$$M_2 = \frac{P}{4\beta}(1 - 2 \times 0.207 - 0.051) = 0.535\frac{P}{4\beta}.$$

可以看出，由于相邻輪子的作用，第二个輪子下的弯矩比第一个輪子下的要小得多．这一事实已为軌道应力的多次实驗測量所証实．

运用式(3)和表 2 最后一行的数値，求得第一个輪子下的撓度如下：

$$\delta_1 = \frac{P\beta}{2k}(1 + 0.230 - 0.042 - 0.012) = 1.18\frac{P\beta}{2k}.$$

其他各点的撓度可用同样方法求得．

可以看出，迭加法便于用来确定鋼軌由任意配置及任意間距的載荷組引起的弯曲．

上面的分析是基于鋼軌支承反力可为負値这个假設的．因为

在鋼軌与道釘之間通常有間隙，对鋼軌向上移动的阻力很小，这使鋼軌在第一个和最后一个輪子下的弯矩增加。但是，一般而言，上面关于鋼軌因受靜載荷而弯曲的理論与已作的試驗是足够符合的。

习　　题

1. 运用表 2 的数据作鋼軌的弯矩图，設車輪压力为 40000 磅。此弯矩图表明在車輪之間中点截面处的弯矩为負値，即表示出在机車駛过时鋼軌承受反复弯曲应力的作用，这在最后可以引起疲劳裂縫。

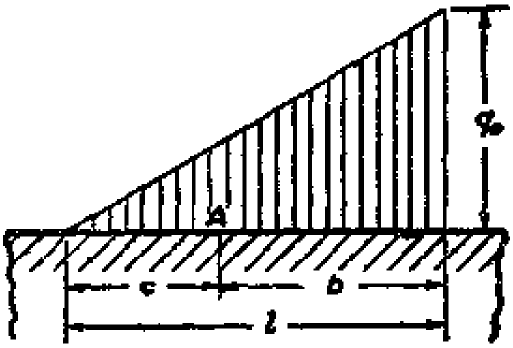


图　5

2. 試求图 3 所示的梁上受載部分中点处的弯矩及同部分左端的撓度曲綫斜率。

3. 試求弹性基础上的无限长梁在三角形載荷作用下任意点 A 的撓度，图 5。

答.　按照第 7 頁式(g)的推导过程，得

$$y = \frac{q_0}{4\beta k}\frac{1}{l}\left[\psi(\beta c) - \psi(\beta b) - 2\beta l\theta(\beta b) + 4\beta c\right].$$

§ 2. 半无限长的梁.　設一弹性基础上的长梁为作用在其一端的力 P 及弯矩 M_0 所弯曲，如图 6 所示，則我們仍能应用上节式(b)的通解。由于撓度及弯矩随着离載荷端的距离 x 的增加而趋于零，所以在通解中必須取 $A = B = 0$。我們得



图　6

$$y = e^{-\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x). \quad \text{(a)}$$

为了确定积分常数 C 和 D，取原点即載荷 P 处的两条件如下：

$$EI_z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = -M_0,$$

1103337

$$EI_z\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -V = P.$$

将式(a)代入上列两式,得两个綫性方程式,从而解出 C 和 D,得

$$C = \frac{1}{2\beta^3 EI_z}(P - \beta M_0);\ D = \frac{M_0}{2\beta^2 EI_z}.$$

代回式(a),得

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 EI_z}[P\cos\beta x - \beta M_0(\cos\beta x - \sin\beta x)], \qquad (11)$$

或运用記号(6),得

$$y = \frac{2\beta}{k}\{P\theta(\beta x) - \beta M_0[\theta(\beta x) - \zeta(\beta x)]\}.$$

为了求載荷处的撓度,須将 $x = 0$ 代入式(11). 于是

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^3 EI_z}(P - \beta M_0). \qquad (11')$$

将式(11)微分,得斜率的表达式. 在端点($x = 0$)处,此斜率变成

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^2 EI_z}(P - 2\beta M_0). \qquad (12)$$

运用式(11′)和(12)并結合迭加原理,就能解更复杂的問題.例如,在弹性基础上有一受均布載荷的长梁,其一端簡支,如图 7a 所示. 由支点撓度为零这一条件可求得端点的反力 R. 考慮到在离支点很远之处梁的弯曲可忽略不計,而梁陷入基础的深度可取为 q/k, 我們以 $M_0=0$ 及 $\delta=q/k$ 代入式(11′)来計算 R. 結果得

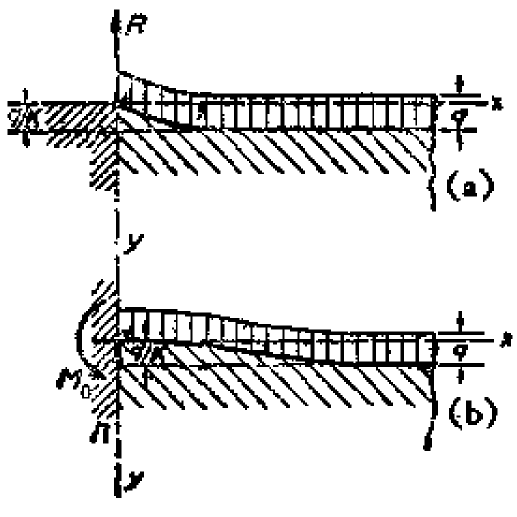


图 7

$$R = 2\beta^3 EI_z\cdot\frac{q}{k} = \frac{q}{2\beta}. \qquad (13)$$

将梁的均匀下陷深度 q/k 减去式(11)对应于 $P = R$ 及 $M_0 = 0$ 时的撓度,即可求得撓度曲綫为

$$y = \frac{q}{k} - \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 EI_z} R\cos\beta x = \frac{q}{k}(1 - e^{-\beta x}\cos\beta x)。\quad (14)$$

对于如图 7b 所示的固定端的情形，反力 R 及弯矩 M_0 的大小可由支点的挠度及斜率为零这两个条件求得．考虑到离支点很远之处挠度等于 q/k 并运用式(11′)和(12)，得下列两个用以計算 R 及 M_0 的方程式[1]：

$$-\frac{q}{k} = -\frac{1}{2\beta^3 EI_z}(R + \beta M_0)$$

和

$$0 = \frac{1}{2\beta^2 EI_z}(R + 2\beta M_0)$$

从而得

$$M_0 = -2\beta^2 EI_z \frac{q}{k},\ R = 4\beta^3 EI_z \frac{q}{k} = \frac{q}{\beta}. \quad (15)$$

M_0 的负号表明弯矩的方向如图 7b 中左面的箭头所示．

习　　题

1. 試求一弹性基础上半无限长梁的挠度曲綫，梁的一端鉸支，而其上作用着一力偶 M_0、图 8.

解. 将 $\delta = 0$ 代入式(11′)，得鉸支点的反力为

$$P = \beta M_0.$$

将此 P 值代入式(11)、得

$$y = \frac{M_0}{2\beta^2 EI_z} e^{-\beta x}\sin\beta x = \frac{M_0}{2\beta^2 EI_z}\zeta(\beta x). \quad (16)$$

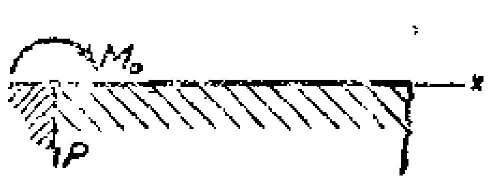


图　8

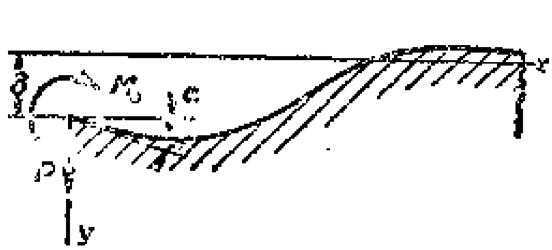


图　9

逐次微分之，得

1) 在式(11′)和(12)中代入 $P = -R$，因为反力的正方向是取为向上的．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{2\beta^3M_0}{k}\cdot\psi(\beta x),\\M&=-EI_z\frac{d^2y}{dx^2}=M_0\cdot\theta(\beta x),\\V&=-EI_z\frac{d^3y}{dx^3}=-\beta M_0\cdot\varphi(\beta x).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

2. 試求作用于一弹性基础上的半无限长梁一端的弯矩 M_0 及力 P，图 9，如果該端的撓度 δ 和斜率 α 为已知。

解. 将已知的 δ 和 $(dy/dx)_{x=0}=\alpha$ 代入式(11′)和(12)，得 M_0 和 P。

3. 試求一弹性基础上的半无限长梁由載荷 P 产生的撓度曲綫，P 的作用点离梁自由端 A 的距离为 c，图 10。

解. 設梁延伸到 A 端的左边，如虛綫所示。对于这一情形，式(3)給出 $x>0$ 时的撓度曲綫，根据式(7)并运用对称条件，在假想的无限长梁的截面 A 处得：

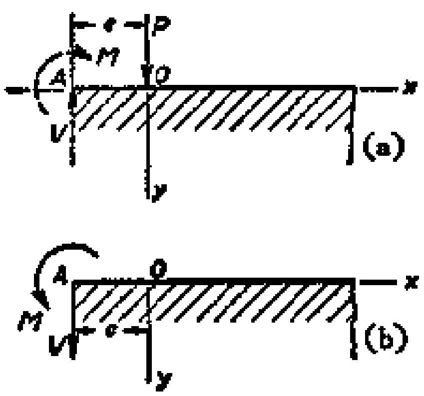


图 10

$$\left.\begin{aligned}M&=\frac{P}{4\beta}\psi(\beta c),\\V&=\frac{P}{2}\theta(\beta c).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

为了求得 A 端自由的半无限长梁所需的撓度曲綫，显然須将半无限长梁由图 10b 所示的力产生的撓度与假想无限长梁的撓度相迭加。这样，运用式(3)，(11)及(c)，当 $x>0$ 时，得

$$\begin{aligned}y&=\frac{P\beta}{2k}\varphi(\beta x)+\frac{2\beta}{k}\{V\theta[\beta(x+c)]+\\&\qquad+\beta M\theta[\beta(x+c)]-\beta M\zeta[\beta(x+c)]\}\\&=\frac{P\beta}{2k}\varphi(\beta x)+\frac{\beta P}{k}\{\theta(\beta c)\theta[\beta(x+c)]+\\&\qquad+\frac{1}{2}\psi(\beta c)\theta[\beta(x+c)]-\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\psi(\beta c)\zeta[\beta(x+c)]\}. \tag{d}$$

此式也可用于$-c < x < 0$;这时只須以x的絕对值代替$\psi(\beta x)$中的x卽可。

§ 3. 弹性基础上有限长的梁 弹性基础上有限长梁的弯曲也可用无限长梁的解[式(3)]及迭加法来研究[1]. 为了說明此方法,我們来研究两端自由的有限长梁受两个对称作用力P的情形,图 11a. 这与枕木受鋼軌压力作用的情形相似. § 1 的通解式(b)可应用于梁的这三个部分,而积分常数可由两端点及载荷作用点的条件定出.然而,如将图 11b 和 11c 所示的无限长梁的两种受載情形之解迭加,就可更容易地求得所需之解. 在图 11b 上有两个力P作用于一无限长的梁上. 在图 11c 上无限长的梁承受力Q_0及弯矩M_0, Q_0及M_0均作用于梁的AB部分之外,并无限地接近于点A及点B,点A及点B相当于該梁的两个自由端,图 11a. 不难看出,如适当地选择力Q_0及弯矩M_0,就可使无限长梁(如图 11b 所示)的截面A及B处由两个力P产生的弯矩及剪力等于零. 于是无限长梁的中間部分显然与图 11a 所示的有限长梁的情形相同,而对有限长梁弯曲的所有需要的数据可由图 11b 及 11c 所示的两种情形的迭加而求得.

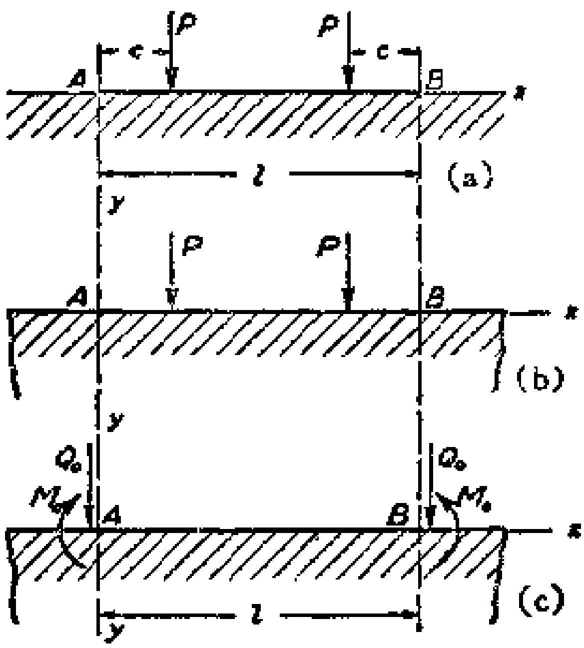


图 11

为了列出用以确定适当的M_0及Q_0值的方程式,我們来研究

1) 这一分析方法是由 M. Hetényi 所发展出来的, *Final Report, 2d Congr. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engng.*, Berlin, 1938. 并参看他的 "Beams on Elastic Foundation", p. 38.

无限长梁的截面 A. 取該点为坐标原点并运用式(7)，則两个力 P (图 11b)在該点所产生的弯矩 M' 及剪力 V' 为

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{P}{4\beta}\{\psi[\beta(l-c)] + \psi(\beta c)\}, \\ V' &= \frac{P}{2}\{\theta[\beta(l-c)] + \theta(\beta c)\}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

图 11c 所示的两个力在同一点所产生的弯矩 M'' 及剪力 V'' 可用式(7)及式(10′)求得，即

$$\left.\begin{aligned} M'' &= \frac{Q_0}{4\beta}[1+\psi(\beta l)] + \frac{M_0}{2}[1+\theta(\beta l)], \\ V'' &= -\frac{Q_0}{2}[1-\theta(\beta l)] - \frac{M_0\beta}{2}[1-\varphi(\beta l)]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

适当的 M_0 及 Q_0 值現在可由下列两式求得：

$$\left.\begin{aligned} M' + M'' &= 0, \\ V' + V'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

在每一特定情形下，运用表 1 就能很快地解出这两个方程式. 一俟 M_0 及 Q_0 求出后，就可用式(7)，(10)和(10′)諸式以及迭加法来求得图 11a 所示的实梁任意截面处的撓度及弯矩.

图 12 所示的特殊情形，系根据我們上面的討論取 $c=0$ 而得出. 按照上述方法，得两端点及中点的撓度表达式如下：

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k}\frac{\cosh\beta l + \cos\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}, \quad \text{(d)}$$

$$y_c = \frac{4P\beta}{k}\frac{\cosh\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2}}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \quad \text{(e)}$$

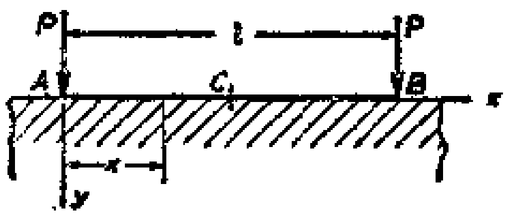


图 12

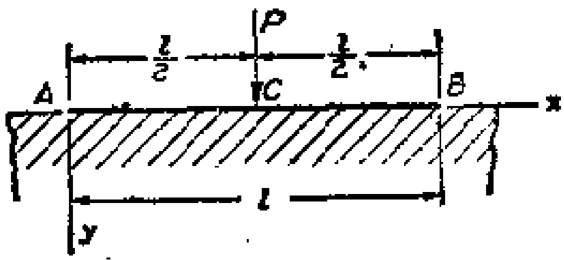


图 13

中点的弯矩为

$$M_c = -\frac{2P}{\beta}\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\beta l}{2}}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \tag{f}$$

有一单个载荷作用于中点的情形(图 13)也可按上面图 11a 所示的情形求得. 只须取 $c = l/2$ 并以 P 代 $2P$ 即可。 这样，我們求得两端点及中点的挠度表达式为:

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k}\frac{\cosh\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2}}{\sinh\beta l + \sin\beta l}, \tag{g}$$

$$y_c = \frac{P\beta}{2k}\frac{\cosh\beta l + \cos\beta l + 2}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \tag{h}$$

我們求得載荷下的弯矩为

$$M_c = \frac{P}{4\beta}\frac{\cosh\beta l - \cos\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \tag{i}$$

用于图 11a 所示的对称情形的方法也可用于图 14a 所示的反对称情形. 这时 Q_0 及 M_0 也可表示一反对称載荷組，如图 14c 所示. 确定适当的 Q_0 及 M_0 值时，可很快写出与(a), (b)和(c)諸式类似的方程組. 一俟 Q_0 及 M_0 算出后，对图 14a 所示梁弯曲的所有需要的数据就可由图 14b 和 14c 所示两种情形的迭加而求得.

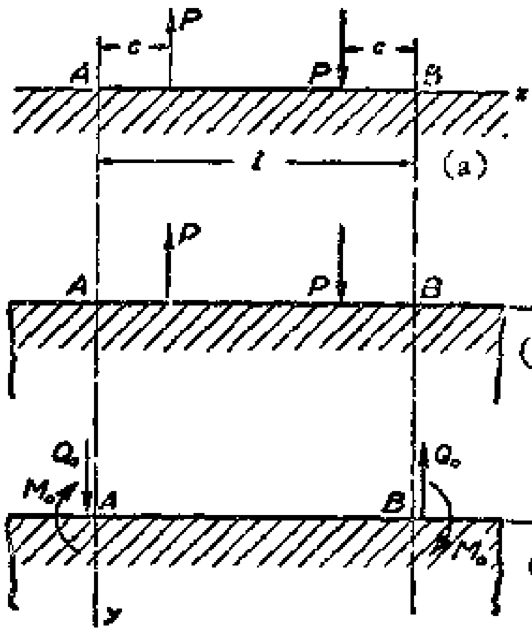


图 14

有了梁受对称載荷及反对称載荷时的解，我們就可用迭加原理很快求得受任意載荷时的解. 例如，图 15a 所示的不对称情形的解系由图 15b 和 15c 所示的对称和反对称情形的解的迭加而求得. 图 16 所示的問題可用同样方法处理. 对于每一种

情形，問題就变为由方程組(c)的两个方程式来确定适当的力Q_0和弯矩M_0之值。

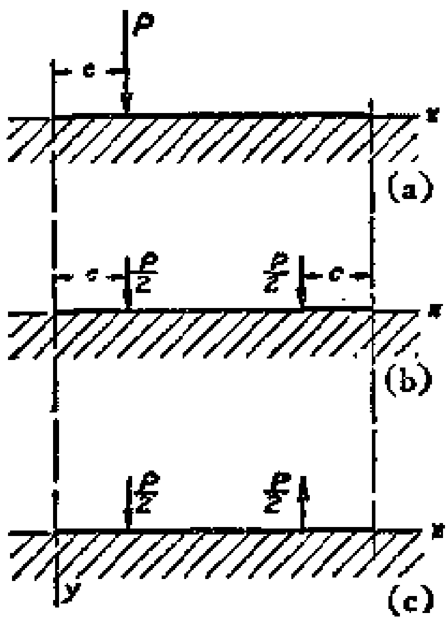


图 15

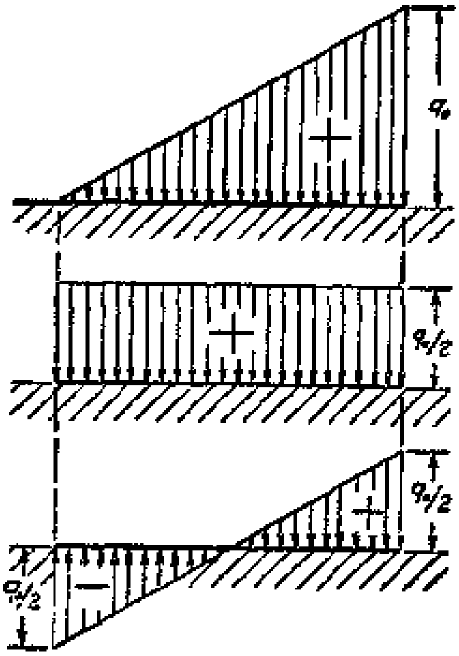


图 16

在討論有限长梁的弯曲时，我們指出，加于梁一端的力对另一端挠度的作用与βl的大小有关。这一数值随梁长的增大而增大。同时从表1中可以看出，函数φ，ψ及θ均急剧地减小，而当βl超过某一数值时，可以認为加于梁一端的力对另一端的影响可忽略不計。这表明我們把梁看作无限长是正确的。对于这一情形，$\varphi(\beta l)$，$\psi(\beta l)$及$\theta(\beta l)$比起式(b)中的1来可忽略不計；因而大大地簡化了式(c)。

一般而言，在討論有限长梁的弯曲时，梁自然而然地分成三类：

I. 短梁，$\beta l < 0.60$。

II. 中长梁，$0.60 < \beta l < 5$。

III. 长梁，$\beta l > 5$。

在討論第一类梁时，我們完全可忽略弯曲而把它看作絕对刚体，因为由弯曲所产生的挠度比起基础的沉陷来通常是小到可以忽略不計。例如，对載荷作用于中点的情形，图13，并設$\beta l = 0.60$，

我們由上面对 y_a 及 y_c 列出的公式求得，中点撓度与端点撓度之差只是总撓度（基础的沉陷）的 0.5% 左右。 这說明了，如把梁作为絕对刚体来处理，并运用下列撓度公式，就可非常准确地求得基础的沉陷：

$$y = \frac{P}{kl}.$$

第二类梁的特征是：加于梁一端的力对另一端有很大的影响，因此这类梁必須作为有限長梁处理。

对于第三类梁，我們在研究其一端时可設另一端在无限远，于是梁可作为无限長梁处理。

在上面的討論中，已假設梁为一連續的弹性基础所支承，但所得結果也能适用于梁为許多等距的弹性支座所支承的情形。我們以支承一組等距竪梁的横梁 AB（图 17）作为其中一例，等距竪梁均带有均布載荷 q[1]。 所有的梁均簡支于端部。 以 EI_1 与 l_1 各表

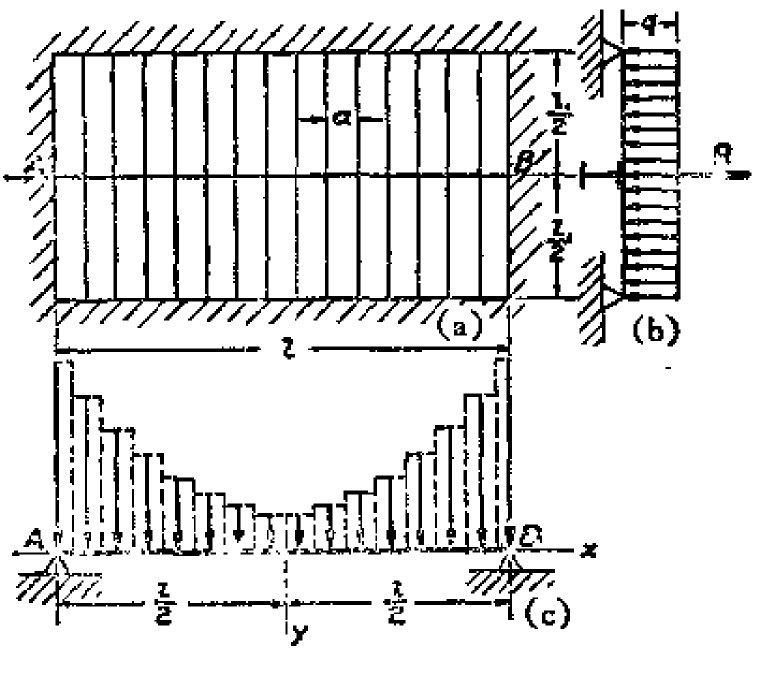


图 17

1) 屬于此类的各种問題可在船舶結构中遇到。 关于这类問題的詳尽討論是由 I. G. Boobnov 所作的，参看他的著作 Theory of Structure of Ships, St. Petersburg, vol. 2, 1914. 并参看 P. F. Papkovitch, Structural Mechanics of Ships, Moscow, vol. 2, Part 1; pp. 318—814, 1946.

示竪梁的抗弯刚度与长度，我們求得其中点的挠度为

$$y=\frac{5}{384}\frac{ql_1^4}{EI_1}-\frac{Rl_1^3}{48EI_1},\tag{j}$$

式中 R 为所研究的竪梁作用在横梁 AB 上的压力. 解出式 (j) 中的 R，我們得知横梁 AB 系受一集中力的作用，图 17c，此力的大小为

$$R=\frac{5}{8}ql_1-\frac{48EI_1}{l_1^3}y.\tag{k}$$

如設竪梁的間距 a 比横梁的长度 l 要小得多，并以相当的均布載荷代替这些集中力，如图 17c 所示；我們也可将強度为 q_1-ky 的連續分布載荷代替阶梯分布載荷（如图中虛綫所示），其中

$$q_1=\frac{5}{8}\frac{ql_1}{a};\ \ k=\frac{48EI_1}{al_1^3}.\tag{l}$$

于是梁 AB 的挠度曲綫的微分方程式为

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q_1-ky.\tag{m}$$

可見横梁实为一在弹性基础上受均布載荷的梁. 載荷強度及基础系数由式(l)給出.

在討論梁的挠度时，我們可运用上述的迭加法，也可直接将式(m)积分。用后一方法时，我們可写出式(m)的通解如下：

$$y=\frac{q_1}{k}+C_1\sin\beta x\sinh\beta x+C_2\sin\beta x\cosh\beta x+$$
$$+C_3\cos\beta x\sinh\beta x+C_4\cos\beta x\cosh\beta x.\tag{n}$$

取中点为坐标原点，图 17c，由对称条件得出

$$C_2=C_3=0.$$

以此代入式(n)，并运用簡支端的两个条件：

$$(y)_{x=l/2}=0,\quad\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2}=0,$$

得

$$C_1=-\frac{q_1}{k}\frac{2\sin\frac{\beta l}{2}\sinh\frac{\beta l}{2}}{\cos\beta l+\cosh\beta l},$$

$$C_4 = -\frac{q_1}{k}\frac{2\cos\frac{\beta l}{2}\cosh\frac{\beta l}{2}}{\cos\beta l + \cosh\beta l}.$$

于是挠度曲綫为

$$y = \frac{q_1}{k}\left(1 - \frac{2\sin\frac{\beta l}{2}\sinh\frac{\beta l}{2}}{\cos\beta l + \cosh\beta l}\sin\beta x\sinh\beta x - \right.$$
$$\left. - \frac{2\cos\frac{\beta l}{2}\cosh\frac{\beta l}{2}}{\cos\beta l + \cosh\beta l}\cos\beta x\cosh\beta x\right). \qquad \text{(o)}$$

将 $x=0$ 代入,得中点的挠度为

$$(y)_{x=0} = \frac{q_1}{k}\left(1 - \frac{2\cos\frac{\beta l}{2}\cosh\frac{\beta l}{2}}{\cos\beta l + \cosh\beta l}\right). \qquad \text{(p)}$$

将此值代入式(k),求得竖梁中間支座的反力，它与梁 AB 交于中点. 値得注意的是,此反力可为負值,这表明横梁仅在其刚度足够大时才眞眞地支持了这些竖梁；否则它可能使某几根竖梁的弯曲增加.

习　　題

1. 試求图 12 所示的梁的挠度曲綫通解.

答.

$$y = \frac{2P\beta}{k}\frac{\cosh\beta x\cos\beta(l-x) + \cosh\beta(l-x)\cos\beta x}{\sinh\beta l + \sin\beta l}.$$

2. 有一梁为两大小相等而方向相反的力偶 M_0 所弯曲，图 18. 試求該梁两端点的挠度及中点的弯矩.

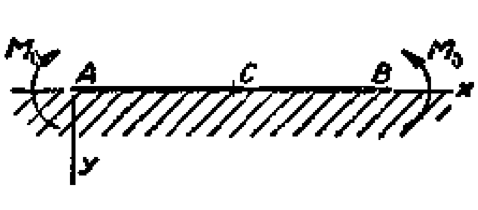


图　18

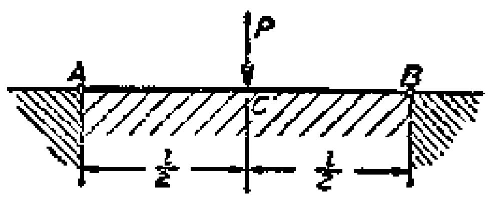


图　19

答.

$$y_a = y_b = -\frac{2M_0\beta^2}{k}\frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l},$$

$$M_c = 2M_0\,\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2} + \cosh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\beta l}{2}}{\sinh\beta l + \sin\beta l}.$$

3. 試求两端鉸支的梁其中点的挠度及弯矩,图 19. 載荷 P 作用在梁的中点.

答.

$$y_c = \frac{P\beta}{2k}\frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\cosh\beta l + \cos\beta l},$$

$$M_c = \frac{P}{4\beta}\frac{\sinh\beta l + \sin\beta l}{\cosh\beta l + \cos\beta l}.$$

4. 試求两端鉸支并受均布載荷的梁其中点的挠度及弯矩, 图 20.

答.

$$y_c = \frac{q}{k}\left(1 - \frac{2\cosh\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2}}{\cosh\beta l + \cos\beta l}\right),$$

$$M_c = \frac{q}{\beta^2}\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\beta l}{2}}{\cosh\beta l + \cos\beta l}.$$

5. 試求两端固定的梁其两端点的弯矩, 梁承受一均布載荷及一作用于中点的載荷,图 21.

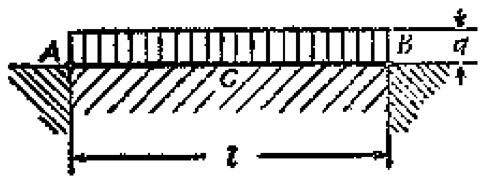


图 20

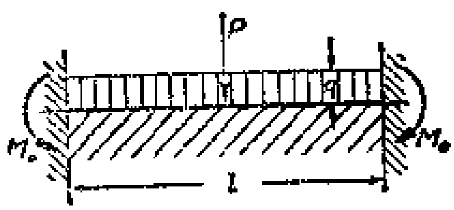


图 21

答.

$$M_0 = -\frac{P}{\beta}\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\beta l}{2}}{\sinh\beta l+\sin\beta l}-\frac{q}{2\beta^2}\frac{\sinh\beta l-\sin\beta l}{\sinh\beta l+\sin\beta l}.$$

6. 試求一彈性基础上的梁的撓度曲綫，載荷作用在梁的一端，图 22.

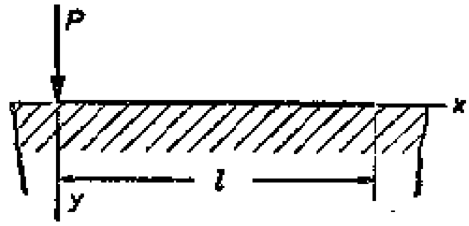


图 22

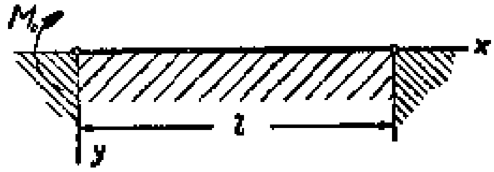


图 23

答.

$$y=\frac{2P\beta}{k(\sinh^2\beta l-\sin^2\beta l)}[\sinh\beta l\cos\beta x\cosh\beta(l-x)-$$
$$-\sin\beta l\cosh\beta x\cos\beta(l-x)].$$

7. 有一两端鉸支的彈性基础上的梁，为一作用于其一端的力偶 M_0 所弯曲，图 23. 試求該梁的撓度曲綫.

答.

$$y=\frac{2M_0\beta^2}{k(\cosh^2\beta l-\cos^2\beta l)}[\cosh\beta l\sin\beta x\sinh\beta(l-x)-$$
$$-\cos\beta l\sinh\beta x\sin\beta(l-x)].$$

第二章　受軸向与横向联合載荷的梁

§4. 直接压縮与横向載荷. 我們从一个两端鉸支的支柱受单个横向力 P 和中心受大小相等而方向相反的两个压縮力 S 的簡单問題开始，图 24. 設支柱有一对称面，而力 P 作用在此平面內，我們看出弯曲也发生在同一平面內. 支柱两部分的撓度曲綫的微分方程式为

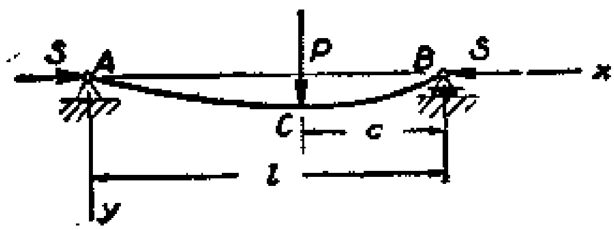


图 24

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{Pc}{l}x, \tag{a}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{P(l-c)}{l}(l-x). \tag{b}$$

运用記号

$$\frac{S}{EI} = p^2, \tag{17}$$

我們把式(a)和(b)的解写成下列形式:

$$y = C_1\cos px + C_2\sin px - \frac{Pc}{Sl}x, \tag{c}$$

$$y = C_3\cos px + C_4\sin px - \frac{P(l-c)}{Sl}(l-x). \tag{d}$$

由于在支柱的两端撓度为零,因此我們得出

$$C_1 = 0,$$

$$C_3 = -C_4\tan pl.$$

其余两个积分常数可由載荷 P 作用点的連續条件求得,即当 $x = l - c$ 时,要求式(c)和(d)得出同样的撓度和同样的斜率. 这样,我們得

$$C_2 \sin p(l-c) = C_4[\sin p(l-c) - \tan pl \cos p(l-c)],$$

$$C_2 p \cos p(l-c) = C_4 p[\cos p(l-c) + \tan pl \sin p(l-c)] + \frac{P}{S},$$

从而得

$$C_2 = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl}, \quad C_4 = -\frac{P \sin p(l-c)}{Sp \tan pl}.$$

代入式(c),我們对支柱的左边部分求得为

$$y = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl} \sin px - \frac{Pc}{Sl} x, \tag{18}$$

微分之,得

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P \sin pc}{S \sin pl} \cos px - \frac{Pc}{Sl}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{Pp \sin pc}{S \sin pl} \sin px. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

在式(18)和(19)中,以$(l-x)$代x和以$(l-c)$代c,并改变$\frac{dy}{dx}$的符号,就可得支柱右边部分的相应表达式。由这些代換得

$$y = \frac{P \sin p(l-c)}{Sp \sin pl} \sin p(l-x) - \frac{P(l-c)}{Sl}(l-x), \tag{20}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \sin p(l-c)}{S \sin pl} \cos p(l-x) + \frac{P(l-c)}{Sl}, \tag{21}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pp \sin p(l-c)}{S \sin pl} \sin p(l-x). \tag{22}$$

对于載荷P作用在中点的特殊情形,$c=\frac{l}{2}$,如引用記号

$$\frac{Sl^2}{4EI} = \frac{p^2 l^2}{4} = u^2, \tag{23}$$

我們就由式(18)得

$$(y)_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{P}{2Sp}\left(\tan\frac{pl}{2} - \frac{pl}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{\tan u - u}{\frac{1}{3}u^3}. \tag{24}$$

式(24)中的第一个因子表示横向載荷 P 单独作用时产生的撓度；第二个因子則表示 P 所产生的撓度由于有軸向压縮力 S 而放大的倍数。当 S 比起欧拉載荷($Se = EI\pi^2/l^2$)来很小时，u 值就很小，而式(24)中的第二个因子接近于1，这說明了在此条件下軸向压縮力对撓度的影响可忽略不計。当 S 接近于欧拉值时，u 值接近于 $\pi/2$ [参看式(23)]，而式(24)中的第二个因子无限地增大，这可以从我們在前面对临界載荷的討論中(参看原书上卷第263頁)得知。

最大弯矩在載荷下，其值可由方程組(19)中的第二式求得，即

$$M_{\max} = -EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2} = EI\frac{Pp}{2S}\tan\frac{pl}{2} = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{\tan u}{u}. \qquad (25)$$

我們又看出，式(25)中的第一个因子表示載荷 P 单独作用时产生的弯矩，而第二个因子为**放大系数**，它表示軸向力 S 对最大弯矩的影响。

解出了对于一个横向載荷 P 的問題(图24)，我們就易于求得支柱为作用在其一端的力偶所弯曲时的解(图25)。只需假設在我們前面的討論中，距离 c 无限地減小并接近于零，而同时 Pc 保持为大小等于 M_0 的常数即可。将 $Pc = M_0$ 和 $\sin pc = pc$ 代入式(18)，得撓度曲綫为

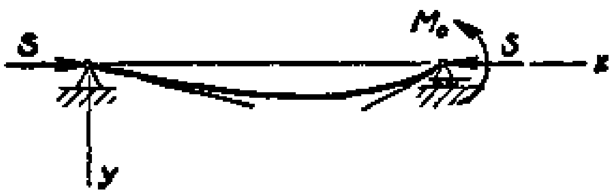


图 25

$$y = \frac{M_0}{S}\left(\frac{\sin px}{\sin pl} - \frac{x}{l}\right), \qquad (26)$$

从而得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{S}\left(\frac{p\cos px}{\sin pl} - \frac{1}{l}\right).$$

梁两端的斜率为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{M_0}{S}\left(\frac{p}{\sin pl} - \frac{1}{l}\right) =$$

$$= \frac{M_0 l}{6EI} \cdot 6\left(\frac{1}{2u\sin 2u} - \frac{1}{(2u)^2}\right), \tag{27}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{M_0}{S}\left(\frac{p}{\tan pl} - \frac{1}{l}\right)$$

$$= \frac{M_0 l}{3EI} \cdot 3\left(\frac{1}{2u\tan 2u} - \frac{1}{(2u)^2}\right). \tag{28}$$

还是一样，在式(27)和(28)中，取适当符号的第一个因子表示力偶 M_0 单独作用时产生的斜率(参看原书上卷第158頁)，而第二个因子則表示軸向力 S 的影响。

研究式(18)和(26)，我們看出，在这些表达式中出現的横向力 P 和力偶 M_0 是綫性的，而在同样表达式中出現的軸向力 S 則較为复杂，因为 p 也包含 S [参看式(17)]，由此得出，如在点 C (图24)，施加两个力 P 和 Q，任何点的撓度就可由载荷 Q 和軸向力 S 所产生的撓度与载荷 P 和同样軸向力所产生的撓度的迭加而得。对于作用于梁一端的力偶，可得同样結論。

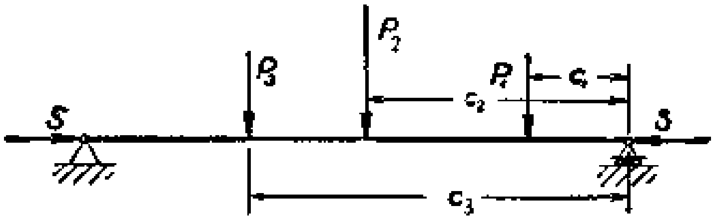


图 26

关于迭加的这一結論可易于加以推广至多个载荷的情形(图26)。对于支柱的每一部分，均可写出一类似于式(a)和(b)的方程式，并均可求得一类似于式(c)和(d)的解。积分常数可由载荷作用点的連續条件和支柱两端的条件求得。这样可以看出，支柱上任何点的撓度均为载荷 P_1, P_2, $\cdots$ 的一个綫性函数，而任何点的撓度均可由各个横向载荷与軸向力 S 同时作用时在該点产生的撓度的迭加而得。

我們来研究一般情形，这时有 n 个作用力，而其中 m 个力作用在我們正要計算其撓度的截面的右边。对于力 P_1, P_2, $\cdots P_m$ 运用式(18)，而对于力 P_{m+1}, P_{m+2}, $\cdots P_n$ 运用式(20)，就可求得此

挠度的表达式。这样，得所需的挠度如下：

$$y=\frac{\sin px}{Sp\sin pl}\sum_{i=1}^{i=m}P_i\sin pc_i-\frac{x}{Sl}\sum_{i=1}^{i=m}P_ic_i+$$

$$+\frac{\sin p(l-x)}{Sp\sin pl}\sum_{i=m+1}^{i=n}P_i\sin p(l-c_i)-$$

$$-\frac{l-x}{Sl}\sum_{i=m+1}^{i=n}P_i(l-c_i). \tag{29}$$

如有一強度为 q 的均布載荷作用在支柱上以代替集中力，則离右端的距离取为 c 的一个載荷元 qdc 可看作一集中力。将其代入式(29)以代替 P_i 并用积分代替和号，得挠度曲綫的表达式如下：

$$y=\frac{\sin px}{Sp\sin pl}\int_0^{l-x}q\sin pc\ dc-\frac{x}{Sl}\int_0^{l-x}qc\ dc+$$

$$+\frac{\sin p(l-x)}{Sp\sin pl}\int_{l-x}^{l}q\sin p(l-c)dc-$$

$$-\frac{l-x}{Sl}\int_{l-x}^{l}q(l-c)dc.$$

积分后得

$$y=\frac{q}{Sp^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{pl}{2}-px\right)}{\cos\frac{pl}{2}}-1\right]-\frac{q}{2S}x(l-x) \tag{30}$$

和

$$y_{\max}=(y)_{x=l/2}=\frac{q}{Sp^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{\frac{1}{\cos u}-1-\frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}. \tag{31}$$

将式(30)微分，我們很快求得斜率和弯矩的表达式。支柱左端的斜率为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{ql}{2S}\left(\frac{\tan\frac{pl}{2}}{\frac{pl}{2}}-1\right)=\frac{ql^3}{24EI}\frac{\tan u-u}{\frac{1}{3}u^3}. \qquad (32)$$

最大弯矩是在中点处,該处

$$M_{\max}=-EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2}$$

$$=EI\frac{q\left(1-\cos\frac{pl}{2}\right)}{S\cos\frac{pl}{2}}=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{2(1-\cos u)}{u^2\cos u}. \qquad (33)$$

結合运用对于一个力偶的解和对于横向载荷的解并应用迭加法，就可很快地解出支柱弯曲的各种静不定情形．以一端固定的支柱受均布载荷的情形作为一例(图 27)，我們由弯曲时固定端并不轉动这一条件求得固定端的弯矩 M_0．运用式(28)和(32)，求得此条件为

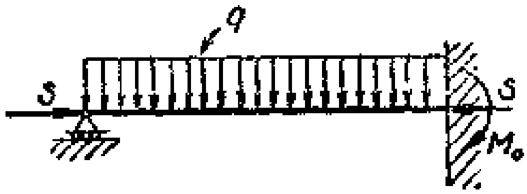


图 27

$$-\frac{ql^3}{24EI}\frac{\tan u-u}{\frac{1}{3}u^3}+\frac{M_0l}{3EI}\cdot\left(\frac{3}{2u\tan 2u}-\frac{3}{(2u)^2}\right)=0$$

从而得

$$M_0=-\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{4\tan 2u(\tan u-u)}{u(\tan 2u-2u)}. \qquad (34)$$

对于两端均为固定的支柱受均布載荷的情形，两端的力矩 M_0 可由下式求得：

$$-\frac{ql^3}{24EI}\frac{\tan u-u}{\frac{1}{3}u^3}+\frac{M_0l}{3EI}\left[\frac{3}{2u\tan 2u}-\frac{3}{(2u)^2}\right]-$$

$$-\frac{M_0l}{6EI}\left(\frac{6}{2u\sin 2u}-\frac{6}{(2u)^2}\right)=0,$$

从而得

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{\tan u - u}{\frac{1}{3}u^2 \tan u}. \tag{35}$$

从式(34)和(35)中可以看出，将横向载荷单独作用时产生的相应力矩乘以一定的放大系数可得静不定力矩之值。

利用确定放大系数的现成的数值表可大大简化所需的計算[1]。表 3 列出了利用下列記号的支柱受均布載荷时的放大系数:

$$\varphi_0(u) = \frac{\frac{1}{\cos u} - 1 - \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4},$$

$$\psi_0(u) = \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}.$$

表 3　受均布载荷支柱的放大系数

u	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$\varphi_0(u)$ $\psi_0(u)$	1.000 1.000	1.004 1.004	1.016 1.016	1.037 1.038	1.070 1.073	1.114 1.117
u	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10
$\varphi_0(u)$ $\psi_0(u)$	1.173 1.176	1.250 1.255	1.354 1.361	1.494 1.504	1.690 1.704	1.962 1.989
u	1.20	1.30	1.40	1.45	1.50	$\pi/2$
$\varphi_0(u)$ $\psi_0(u)$	2.400 2.441	3.181 3.240	4.822 4.938	6.790 6.940	11.490 11.670	∞ ∞

当支柱的最大弯矩已知时，数值最大的应力可由直接应力与最大弯应力的合成而得，即

$$|\sigma|_{\max} = \frac{S}{A} + \frac{M_{\max}}{Z}, \tag{e}$$

1) 支柱受横向載荷的各种特殊情形，曾由 A. P. Van der Fleet 加以討論，*Bull. Soc. Engrs. Ways of Communication*, St. Petersburg, 1900–03. 該著作中列有很多放大系数表。

式中 A 和 Z 各为支柱的截面积和截面模量. 以两端鉸支的支柱受均布載荷的情形为例，由式(33)得

$$|\sigma|_{max}=\frac{S}{A}+\frac{ql^2}{8Z}\cdot\frac{2(1-\cos u)}{u^2\cos u}. \tag{f}$$

在选择支柱合适的截面尺寸时，首先需要建立縱向与横向載荷二者之間的关系. 如果条件是軸向力 S 保持不变，而只有横向載荷 q 才可改变，則式(f)中的最大应力就与載荷 q 成正比. 于是以 $\sigma_{Y.P.}/n$ 代此式中的 σ_{max} 可得所需的截面尺寸，n 为对应于材料屈服点的安全系数[1].

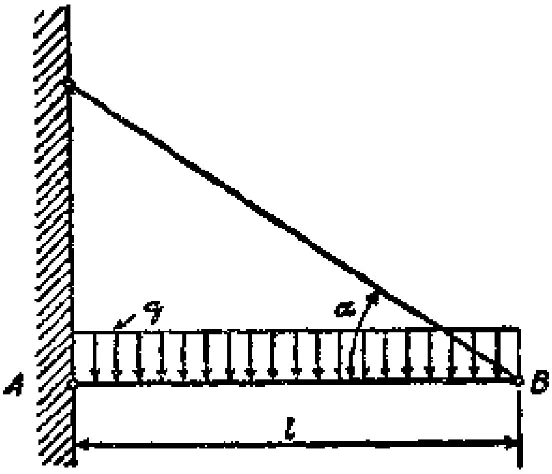


图 28

如果支柱 AB 的条件如图 28 所示，即軸向力 S 与横向載荷 q 同比例地改变，选择安全尺寸的問題就变得較为复杂. 式(f)的右边这項不再与 q 成綫性关系，因为由式(23)所定义的 u 值也与 q 的大小有关. 由于这一事实，所以式(f)中的最大应力比載荷 q 增加得快，如果我們按照前面的情形处理，并用 $\sigma_{Y.P.}/n$ 代替此式中的 σ_{max}，結构的眞实安全系数将小于 n，而开始屈服时的載荷将小于 nq. 为了滿足安全条件，我們用式(f)来定出开始屈服时的条件而写出

$$\sigma_{Y.P.}=\frac{S_{Y.P.}}{A}+\frac{q_{Y.P.}l^2}{8Z}\cdot\frac{2(1-\cos u_{Y.P.})}{u_{Y.P.}^2\cos u_{Y.P.}}. \tag{g}$$

由于在每一特定情形下(例如图 28) $S_{Y.P.}$ 均为 $q_{Y.P.}$ 的函数，而 u 由式(23)定出，所以对于任意假設的 A 和 Z 值，式(g)的右边部分均为极限載荷 $q_{Y.P.}$ 的函数，而此值可根据上列方程式用試算法求得. 知道了 $q_{Y.P.}$ 后，我們就对假定的支柱截面尺寸确定安全載荷

1) 設支柱的材料具有一明显的屈服点.

$q_{Y.P.}/n$. 重复此計算若干次，最后我們可求得具有所需安全系数 n 的截面尺寸[1]。在以前的“**根据假定的誤差来設計柱**”一节中(参看原书上卷第 274 頁)，曾用过类似的方法。

习　　題

1. 图 28 中支柱 AB 的尺寸是由其欧拉載荷等于 2000 磅所定出的。如 $\alpha = 45°$ 和 $ql = 2000$ 磅，試用表 3 求放大系数 $\varphi_0(u)$ 和 $\psi_0(u)$。

答.　$\varphi_0(u) = 2.01$，$\psi_0(u) = 2.03$。

2. 有一两端鉸支的支柱承受一作用在其中点的載荷 P 和一軸向載荷 S，試求其左端的斜率。

答.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P}{2S}\frac{1-\cos u}{\cos u} = \frac{Pl^2}{16EI}\frac{1-\cos u}{\frac{1}{2}u^2\cos u}.$$

3. 試求一受有三角形載荷的支柱其两端的斜率，图 29。

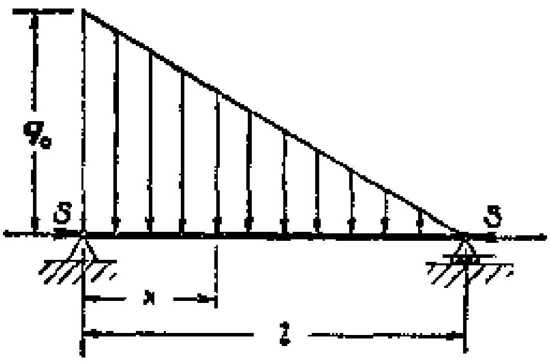


图　29

解.　将 $q_0 c dc/l$ 代入式(29)以代替 P_i，并用积分代替和号，我們求得

$$y = \frac{\sin px}{Sp\sin pl}\int_0^{l-x}\frac{q_0 c}{l}\sin pc\,dc - \frac{x}{Sl}\int_0^{l-x}\frac{q_0 c^2}{l}dc +$$

---

1) 設計支柱的这一方法是由 K. S. Zavriev 所发展出来的，参看 *Memoirs Inst. of Engrs. Ways of Communication* (St. Petersburg), 1913。

$$+\frac{\sin p(l-x)}{Sp\sin pl}\int_{l-x}^{l}\frac{q_0c}{l}\sin p(l-c)dc-$$

$$-\frac{l-x}{Sl}\int_{l-x}^{l}\frac{q_0c}{l}(l-c)dc。$$

将此式对 x 微分，我們求得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{2q_0l}{6p^2EI}(\beta-1)$$

和

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=-\frac{q_0l}{6p^2EI}(\alpha-1),$$

式中 α 和 β 为式(36)（参看本书第 34 頁）所表示的函数。

4. 有一承受两个对称載荷 P 的支柱，如图 30 所示，試求其两端的斜率。

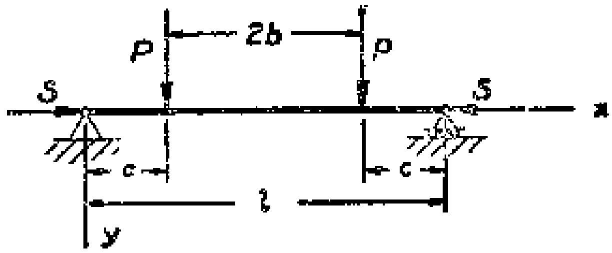


图 30

答.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=\frac{P}{S}\left(\frac{\cos pb}{\cos\frac{pl}{2}}-1\right).$$

5. 有一两端固定的支柱，其受載情形如图 30 所示。試求两端的弯矩 M_0。

解. 力矩 M_0 可由支柱的两端均不旋轉这两个条件求得。运用前題的解答以及式(27)和(28)，求得用以計算 M_0 的方程式如下：

$$\frac{M_0l}{6EI}\alpha+\frac{M_0l}{3EI}\beta+\frac{P}{S}\left(\frac{\cos pb}{\cos\frac{pl}{2}}-1\right)=0,$$

从而得

$$M_0=-\frac{2PEI}{Sl}\frac{u}{\tan u}\left(\frac{\cos pb}{\cos u}-1\right).$$

如 $b=0$，我們就得到有一載荷 $2P$ 集中作用在中点的情形。

§ 5. **連續支柱.** 对于連續支柱的情形，我們按連續梁的情形(参看原书上卷第 203 頁)处理来研究两个相邻跨距，图31[1]. 运用式(23)，(27)和(28)并对第 n 个跨距引用下列記号：

$$u_n^2 = \frac{S_n l_n^2}{4EI_n},$$

$$\alpha_n = 6\left[\frac{1}{2u_n \sin 2u_n} - \frac{1}{(2u_n)^2}\right],$$

$$\beta_n = 3\left[\frac{1}{(2u_n)^2} - \frac{1}{2u_n \tan 2u_n}\right], \tag{36}$$

$$\gamma_n = \frac{\tan u_n - u_n}{\frac{1}{3}u_n^3}, \tag{37}$$

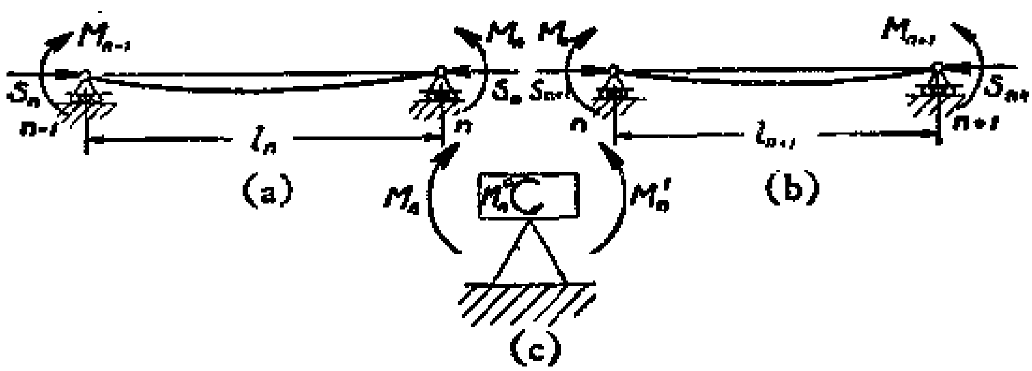


图 31

我們得出，由于端点力矩 M_{n-1} 和 M_n 在第 n 个跨距的右端产生的斜率(图 31a)为

$$-\beta_n \frac{M_n l_n}{3EI_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_n}. \tag{a}$$

由力矩 M_n 和 M_{n+1} 在第 $n+1$ 个跨距的左端产生的斜率为

$$\alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_{n+1}}. \tag{b}$$

如无横向載荷作用在所研究的两个跨距上，則表达式(a)和(b)必定相等，我們得

1) 此理論是由 H. Zimmermann 提出的，Sitzungsber. Akad. Wissensch., Berlin, 1907 和 1909.

$$\frac{\alpha_n l_n}{I_n} M_{n-1} + 2\left(\beta_n \frac{l_n}{I_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) M_n +$$

$$+ \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} M_{n+1} = 0. \tag{38}$$

此即无横向載荷作用在所研究的两个跨距上时的連續支柱的三力矩方程式.

如有一横向載荷作用时，則由此載荷产生的相应斜率必须与表达式(a) 和 (b)相加. 以均布載荷 q_n 和 q_{n+1} 向下作用在跨距 n 和 $n+1$ 上的情形为例，我們由式(32)求得相应的斜率，所得的不是表达式(a)和(b)而是

$$-\beta_n \frac{M_n l_n}{3EI_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_n} - \gamma_n \frac{q_n l_n^3}{24EI_n}, \tag{c}$$

$$\alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_{n+1}} + \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{24EI_{n+1}}. \tag{d}$$

使这两个表达式相等，得

$$\frac{\alpha_n l_n}{I_n} M_{n-1} + 2\left(\beta_n \frac{l_n}{I_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right) M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} M_{n+1} =$$

$$= -\gamma_n \frac{q_n l_n^3}{4I_n} - \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{4I_{n+1}}. \tag{39}$$

此即为支柱在每一个跨距内均受均布載荷时的三力矩方程式. 这与連續梁的三力矩方程式类似；而当 $S = 0$ 和函数 α, β, γ 变成 1 时与它一样.

对于任何其他种类的横向載荷，我們只须改变式(39)的右边部分即可，右边部分与横向載荷所引起的两跨距相邻端的旋轉有关. 以图 32 所示的梯形載荷的情形为例，将載荷分为均布載荷和三角形載荷两部分，对于均布載荷我們用已写在式(39)右边的各項. 我們必须将相应于三角形載荷的各項与这几項相加. 运用上节题 3 中的斜率表达式，对于图 32 所示的載荷我們求得必須将

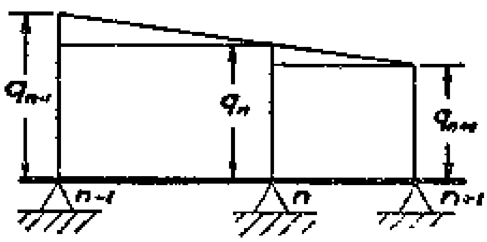


图 32

其加在式(39)右边的两项为

$$-\frac{(q_{n-1}-q_n)l_n}{p^2I_n}(\alpha_n-1)-\frac{2(q_n-q_{n+1})l_{n+1}}{p^2I_{n+1}}(\beta_{n+1}-1), \quad (e)$$

式中 α_n 和 β_{n+1} 由式(36)定出.如有集中力作用在所研究的跨距上时,对轉角所需的表达式很易由挠度曲綫的通用表达式[式(29)]求得.

力矩根据三力矩方程式(39)来計算,如利用函数 α, β 和 γ 的数值表,則計算可大大加以簡化[1]。

在推导式(39)时,假設了在第 n 个支座上的力矩 M_n 对两个相邻跨距具有相同数値. 然而有些情形是有一外力矩 M_n^0 作用在支座上,如图 31c 所示;在这种情形下,我們必須区别支座左边和右边的弯矩. 这两个力矩之間的关系可由静力学方程式表示[2]:

$$M_n-M_n^0-M_n'=0,$$

从而得

$$M_n'=M_n-M_n^0. \quad (f)$$

对于这一情形,式(39)为下式所代替:

$$\frac{\alpha_n l_n}{I_n}M_{n-1}+2\beta_n\frac{l_n}{I_n}M_n+2\beta_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}M_n'+$$
$$+\alpha_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}M_{n+1}=-\gamma_n\frac{q_nl_n^3}{4I_n}-\gamma_{n+1}\frac{q_{n+1}l_{n+1}^3}{4I_{n+1}}. \quad (40)$$

如連續支柱的各支座不在一直綫上,則与三个相邻支座水平位置之差相关联的附加項必須加在式(39)或(40)的右边. 这几項不受軸向力的影响,与梁上无軸向載荷时的(参看原书上卷第 205 頁)相同.

习　　題

1. 如有一集中力 P 作用在跨距 $n+1$ 上离支座 $n+1$ 的距

1) 这种表格可在 A. S. Niles 和 J. S. Newell 的著作中見到, Airplane Structures, New York, vol.2, 1943; 并参看作者所著"弹性稳定理論"(科学出版社, 1958.) (Theory of Elastic Stability, New York, 1936.) 一书.

2) 对于外力矩,图 31c 所示的 M_n^0 方向取为正方向.

离为 c_{n+1} 之处，試写出三力矩方程式的右边各項。

答.

$$-\frac{6P}{p_{n+1}^2 I_{n+1}}\left(\frac{\sin p_{n+1}c_{n+1}}{\sin p_{n+1}l_{n+1}}-\frac{c_{n+1}}{l_{n+1}}\right).$$

2. 如第 n 个跨距的受載情形如图 30 所示，且在跨距 $n+1$ 上无載荷时，試写出三力矩方程式的右边各項。

答. 运用第 33 頁題 4 的解，我們求得下列表达式：

$$-\frac{6P}{p_n^2 I_n}\left(\frac{\cos p_n b_n}{\cos \frac{p_n l_n}{2}}-1\right).$$

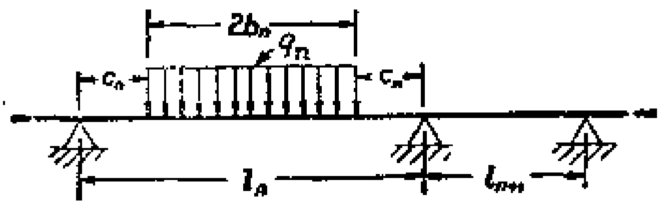


图 33

3. 如載荷如图 33 所示，試求三力矩方程式的右边各項。

答.

$$-\frac{6q_n}{p_n^2 l_n}\left(\frac{\cos p_n b_n}{p_n \cos \frac{p_n l_n}{2}}-b_n\right).$$

§ 6. **受横向載荷的系杆.** 如有一系杆承受拉力 S 和横向載荷 P 的作用(图 34)。我們可以与 § 4 的支柱情形完全一样地写出系杆每一段的挠度曲綫微分方程式，只需改变 S 的符号即可。对于这一情形，我們須以 $-p^2$ 和 $-u^2$ 分别代替式(17)和(23)所定义的 p^2 和 u^2；同时我們須以 $p\sqrt{-1}=pi$ 和 $u\sqrt{-1}=ui$ 代替 p 和 u。将 $-S$, pi 和 ui 代入对图 24 中的支柱所得的公式中以代替 S, p 和 u，我們就得到图34

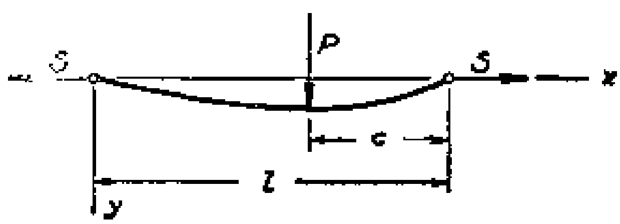


图 34

中的系杆所需的公式，进行这种代换时，我們运用了下列熟知的关系式：

$$\sin ui = i\sinh u,\quad \cos ui = \cosh u,\quad \tan ui = i\tanh u.$$

这样，对于图 34 中系杆的左边这段，我們由式(18)和(19)求得

$$y = -\frac{P\sinh pc}{Sp\sinh pl}\sinh px + \frac{Pc}{Sl}x, \tag{41}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\sinh pc}{S\sinh pl}\cosh px + \frac{Pc}{Sl},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pp\sinh pc}{S\sinh pl}\sinh px. \tag{42}$$

运用式(20)—(22)也可对系杆的右边这段求得类似的公式。有了系杆上受一个載荷 P 作用时的挠度曲綫，我們就可用迭加法很快求得有任何其他种类載荷作用时的挠度曲綫。

以一受均布載荷的系杆为例，运用式(30)和(31)我們求得

$$y = \frac{q}{Sp^2}\left[\frac{\cosh\left(\frac{pl}{2} - px\right)}{\cosh\frac{pl}{2}} - 1\right] + \frac{q}{2S}x(l-x),$$

而最大挠度則为

$$y_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{\frac{1}{\cosh u} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4} =$$

$$= \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\cdot\varphi_1(u), \tag{43}$$

式中

$$\varphi_1(u) = \frac{\frac{1}{\cosh u} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}.$$

由式(32)，左端的挠度曲綫斜率为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{ql^3}{24EI}\frac{u - \tanh u}{\frac{1}{3}u^3}. \tag{44}$$

这时，最大弯矩是在跨距的中点，由式(33)求得为：

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{2(\cosh u-1)}{u^2\cosh u}=\frac{ql^2}{8}\psi_1(u), \tag{45}$$

式中

$$\psi_1(u)=\frac{2(\cosh u-1)}{u^2\cosh u}.$$

可以看出，将无軸向载荷的簡单梁的相应表达式乘以与軸向拉力 S 的大小有关的系数 $\varphi_1(u)$ 和 $\psi_1(u)$ 就可得挠度和最大弯矩. 这些系数的数值列于表 4[1].

表 4　受横向載荷系杆的挠度和最大弯矩常数

u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3	u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	6.5	0.054	0.197	0.047	0.391	0.139
0.5	0.908	0.976	0.905	0.984	0.972	7.0	0.047	0.175	0.041	0.367	0.121
1.0	0.711	0.909	0.704	0.939	0.894	7.5	0.041	0.156	0.036	0.347	0.106
1.5	0.523	0.817	0.511	0.876	0.788	8.0	0.036	0.141	0.031	0.328	0.093
2.0	0.380	0.715	0.367	0.806	0.673	8.5	0.032	0.127	0.028	0.311	0.083
2.5	0.281	0.617	0.268	0.736	0.563	9.0	0.029	0.115	0.025	0.296	0.074
3.0	0.213	0.529	0.200	0.672	0.467	9.5	0.026	0.105	0.022	0.283	0.066
3.5	0.166	0.453	0.153	0.614	0.386	10.0	0.024	0.096	0.020	0.270	0.060
4.0	0.132	0.388	0.120	0.563	0.320	10.5	0.021	0.088	0.018	0.259	0.054
4.5	0.107	0.335	0.097	0.519	0.267	11.0	0.020	0.081	0.017	0.248	0.050
5.0	0.088	0.291	0.079	0.480	0.224	11.5	0.018	0.075	0.015	0.238	0.045
5.5	0.074	0.254	0.066	0.446	0.189	12.0	0.016	0.069	0.014	0.229	0.042
6.0	0.063	0.223	0.055	0.417	0.162						

对于系杆为一作用在右端的力偶所弯曲的情形，挠度曲綫可由式(26)求得，即

$$y=\frac{M_0}{S}\left(\frac{x}{l}-\frac{\sinh px}{\sinh pl}\right). \tag{46}$$

如有大小相等而方向相反的两个力偶作用在系杆的两端时，挠度曲綫可用迭加法求得为

1) 系杆的各种弯曲情形在 A. P. Van der Fleet 的論文中，*loc. cit.*, p.33, 以及在 I. G. Boobnov 的书中，*loc. cit.*, p.20, 均有研究. 表 4 系取自后者.

$$y=\frac{M_0}{S}\left(\frac{x}{l}-\frac{\sinh px}{\sinh pl}\right)+\frac{M_0}{S}\left[\frac{l-x}{l}-\frac{\sinh p(l-x)}{\sinh pl}\right]$$

$$=\frac{M_0}{S}\left[1-\frac{\cosh p\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\cosh\frac{pl}{2}}\right]. \qquad (47)$$

由此式我們求得系杆中点的挠度和左端的斜率各为

$$\left.\begin{aligned}(y)_{x=l/2}&=\frac{M_0}{S}\cdot\frac{\cosh u-1}{\cosh u}=\frac{M_0l^2}{8EI}\cdot\frac{\cosh u-1}{\frac{1}{2}u^2\cosh u},\\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}&=\frac{M_0}{S}p\tanh u=\frac{M_0l}{2EI}\cdot\frac{\tanh u}{u}.\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

中点的弯矩为

$$(M)_{x=l/2}=-EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2}=M_0\cdot\frac{1}{\cosh u}. \qquad (49)$$

有了两端鉸支的系杆为横向載荷和作用于两端的力偶所弯曲时的挠度曲綫，我們就可用迭加法很快地求得系杆弯曲的各种靜不定情形．以两端固定的系杆受均布載荷的情形为例，运用式(44)和(48)，我們可由下式求得两端的弯矩 M_0：

$$\frac{ql^3}{24EI}\cdot\frac{u-\tanh u}{\frac{1}{3}u^3}+\frac{M_0l}{2EI}\cdot\frac{\tanh u}{u}=0,$$

从而得

$$M_0=-\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{u-\tanh u}{\frac{1}{3}u^2\tanh u}=-\frac{ql^2}{12}\psi_2(u), \qquad (50)$$

式中

$$\psi_2(u)=\frac{u-\tanh u}{\frac{1}{3}u^2\tanh u}.$$

函数 $\psi_2(u)$ 的数值列于表 4． 运用式(45)和(49)，求得中点的弯矩 M_1 如下：

$$M_1=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{2(\cosh u-1)}{u^2\cosh u}-\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{u-\tanh u}{\frac{1}{3}u^2\sinh u}$$

$$= \frac{ql^2}{24}\cdot\frac{6(\sinh u - u)}{u^2\sinh u} = \frac{ql^2}{24}\psi_3(u). \tag{51}$$

中点的挠度可用式(43)和(48)求得，即

$$y_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{\dfrac{1}{\cosh u} - 1 + \dfrac{u^2}{2}}{\dfrac{5}{24}u^4} -$$

$$- \frac{ql^4}{16EI}\frac{(u-\tanh u)(\cosh u - 1)}{u^4\sinh u} = \frac{ql^4}{384EI}\cdot\varphi_2(u), \tag{52}$$

式中

$$\varphi_2(u) = \frac{24}{u^4}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u\cosh u - u}{\sinh u}\right).$$

当 $u = 0$ 时，即只有一个横向载荷作用时，函数 $\varphi_1,\cdots\psi_3$ 均等于 1，每一函数均随縱向拉力的增大而减小，即縱向拉力使受横向載荷系杆的挠度和弯矩减小。在以后討論薄板的弯曲时，将举出如何应用上表的一些实例(参看第 71 頁)。

习 题

1. 試求中点受載荷的系杆的最大挠度和最大弯矩。

答.

$$(y)_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}\cdot\frac{u - \tanh u}{\dfrac{1}{3}u^3},$$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{\tanh u}{u}.$$

2. 有一两端固定的系杆受两个对称載荷 P，如图 30 所示，試求其两端的弯矩 M_0。

解. 两端的弯矩可由下式求得：

$$\frac{P}{S}\left(1 - \frac{\cosh p\,b}{\cosh\dfrac{pl}{2}}\right) + \frac{M_0 l}{2EI}\cdot\frac{\tanh u}{u} = 0.$$

3. 有一两端固定的系杆受三角形載荷，如图 29 所示，試求其

两端的弯矩.

提示. 运用第 32 页题 3 的解以及式(46).

4. 試求图 35 所示的杆的最大挠度和最大弯矩.

提示. 把杆看作中点受載荷的系杆的一半.

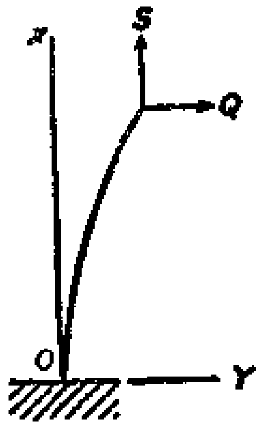


图 35

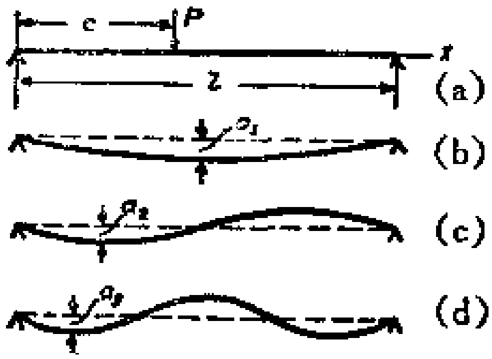


图 36

§7. 用三角級数来表示的挠度曲綫. 在討論梁的挠曲时，将挠度曲綫写成三角級数的形式有时非常有利[1]. 这种表示法的优点是，对整个跨距长度能运用单一的数学表达式. 取图 36 所示的梁两端受支承的情形[2]，任意点的挠度可用下列級数表示:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots. \qquad (a)$$

在几何学上这是指挠度曲綫可由图 36b, c 和 d 所示的簡单正弦曲綫的迭加而得. 式(a)的級数中第一項表示第一根曲綫，第二项表示第二根曲綫，依此类推. 級数的系数 a_1, a_2, a_3 表示这些正弦曲綫的最大縱坐标，而数字 1, 2, 3 则表示半波的数目. 适当地确定系数 a_1, a_2, $\cdots$, 就可使此級数[式(a)]表示任何的挠度曲綫[3]，其准确度决定于所取的項数. 研究下式所表示的梁的应变能[原书

1) 参看作者的論文 "Application of General Coordinates in the Solution of Problems in Bending of Bars and Plates", Bull. Polytech. Inst. (Kiev) 1909 (俄文版); 并参看 H. M. Westergaard, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, vol. 47, pp. 455—533.

2) 对于其他情形，在实际应用时，分析往往太为复杂.

3) 参看 Byerly, Fourier Series and Spherical Harmonics, §§ 19—24. 并参看 Osgood, Advanced Calculus, p. 391. 1928.

上卷第 317 頁式(191)],就可算出这些系数:

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx. \tag{b}$$

由式(a),y 的二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}-a_2\frac{2^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{2\pi x}{l}-a_3\frac{3^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\cdots.$$

式(b)包含此导数的平方,因此包含下列两种不同的項:

$$a_n^2\frac{n^4\pi^4}{l^4}\sin^2\frac{n\pi x}{l} \text{ 和 } 2a_na_m\frac{n^2m^2\pi^4}{l^4}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

直接积分之,可以看出

$$\int_0^l\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}$$

和

$$\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0,\text{ 当 } n\neq m \text{ 时}.$$

因此在式(b)的积分中,凡是包含如 a_na_m 等系数乘积的各項均消失,而只有包含这些系数平方的各項存在. 于是

$$U=\frac{EI\pi^4}{4l^3}(1\cdot a_1^2+2^4\cdot a_2^2+3^4\cdot a_3^2+\cdots)=$$

$$=\frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2. \tag{53}$$

在前面的討論中[参看原书上卷第 360 頁式(a)][1] 曾指出,如有一弹性系統对其平衡位置作一微小的位移,此系統位能的相应增量就等于外力在此位移下所作的功. 当撓度曲綫用式(a)的級数表示时,微小的位移可用系数 $a_1, a_2, a_3\cdots$ 的微小的改变求得. 如任一系数 a_n 有一增量 da_n,我們就在式(a)中以 $(a_n+da_n)\sin(n\pi x/l)$ 一項代替 $a_n\sin(n\pi x/l)$ 这一項,而其他各項仍保持不变. 系数 a_n 的这一增量 da_n 表示由正弦曲綫 $da_n\sin(n\pi x/l)$ 給出的附加小撓度,它与原有的撓度曲綫相迭加. 在此附加的撓度

1) 并参看作者与 D. H. Young 的 "Theory of Structures", New York, p. 229, 1945.

下，外載荷作了功．对于单个載荷 P 作用在离左支座的距离为 c 之处的情形，載荷作用点有一垂直位移 $da_n \sin(n\pi c/l)$，而載荷所作的功等于

$$da_n\left(\sin\frac{n\pi c}{l}\right)P. \tag{c}$$

式(53)所表示的应变能由于 a_n 的增量 da_n 而引起的增量为

$$dU=\frac{\partial U}{\partial a_n}da_n=\frac{EI\pi^4}{2l^3}n^4a_n da_n. \tag{d}$$

使此与式(c)所表示的功相等，得

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3}n^4a_n=P\sin\frac{n\pi c}{l},$$

从而得

$$a_n=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\cdot\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi c}{l}.$$

由此我們可确定式(a)級数中的每一个系数，而撓度曲綫变成

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{2^4}\cdot\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{54}$$

运用此式可对任何的 x 值算出撓度．例如，当載荷在中点($c=x=l/2$)时，中点的撓度将为

$$\delta=(y)_{x=l/2}=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right).$$

只取此級数的第一項，得

$$\delta=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}=\frac{Pl^3}{48.7EI}.$$

与原书上卷第 146 頁式(90)作一比較可知，我們求得的是 48.7，而准确数值为 48，因此，只用第一項来代替整个級数时所造成的誤差为 $1\frac{1}{2}\%$ 左右．对于許多实际情形，这已足够准确了，而且我們还有只用式(a)級数中的一項而得到足够精确度的其他例子．

根据对于单个載荷的解[式(54)]，可用迭加法来研究較复杂

的問題．例如，研究一承受強度为 q 的均布載荷的梁，离左支座的距离为 c 处的一个載荷元 qdc 所产生的撓度可由式(54)用 $P=qdc$ 求得，其值等于

$$dy=\frac{2qdcl^3}{EI\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}}{n^4}.$$

将此对 c 在 $c=0$ 和 $c=l$ 两极限之間积分，得整个載荷所产生的撓度如下：

$$y=\frac{4ql^3}{EI\pi^5}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{55}$$

如我們只用第一項，則受均布載荷的梁中点的撓度为

$$\delta=\frac{4ql^4}{EI\pi^5}=\frac{ql^4}{76.5EI}.$$

将此与下列的精确解作一比較，

$$\delta=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}=\frac{ql^4}{76.8EI},$$

我們看出，只取第一項所造成的誤差不到 $\frac{1}{2}\%$.

当梁除横向載荷外还承受縱向压縮力或拉力的作用时，式(a)的三角級数尤其有用．在图 37 所示的問題中，在弯曲时鉸支点 B 向固定鉸支点 A 靠近，所靠近之值等于撓度曲綫的长度与弦 AB 的长度之差[1]．对于一平坦的曲綫；此差为（参看原书上卷第 178 頁）

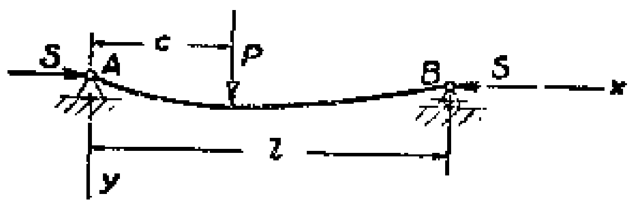


图 37

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx. \tag{56}$$

式中的 y 由式(a)給出、其导数的平方包含下列两种不同形式的項：

---

1) 由軸向力引起的縱向收縮量对于小撓度可以認为不变．

$$a_n^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \text{ 和 } 2a_n a_m \frac{nm\pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

积分之,可以看出

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \text{当 } n \neq m \text{ 时.}$$

于是 λ 的方程式变成

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \tag{57}$$

为了計算式(a)級数中的系数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$,我們仍研究对平衡位置作微小的位移 $da_n \sin(n\pi x/l)$ 时外力所作的功. 在图 37 所示的情形下,力 P 和縱向力 S 在此位移下均作功. 由于系数 a_n 的增量 da_n 而引起的位移 λ 的增量为

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

于是力 S 所作的功为

$$S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

将此与横向力所作的功 [式(c)] 相加,并使其和等于位能的增量 [式(d)]. 这样,我們便求得下列用以确定式(a)中任意系数 a_n 的方程式:

$$P \sin \frac{n\pi c}{l} da_n + S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n,$$

从而得

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{1}{n^2\left(n^2 - \dfrac{Sl^2}{EI\pi^2}\right)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

如縱向力与軸向載荷的临界值(参看第 26 頁)之比用 $\alpha = Sl^2/EI\pi^2$ 表示,则得

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

当将此值代入式(a)时,撓度曲綫为

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\frac{1}{1-\alpha}\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^2(2^2-\alpha)}\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-\alpha)}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{58}$$

将此与只有横向力 P 时的式(54)作一比較，我們看出，杆的撓度由于縱向压縮力 S 的作用而有所增加．我們已知式(a)級数中的第一項表示撓度的一个很好的近似值；因此由縱向力引起的撓度增量将接近于比值 $1:(1-\alpha)$．

如在同一方向有多个横向載荷或有連續載荷作用在梁上时，也可用此結論．以 δ_0 表示横向載荷单独作用时产生的最大撓度，我們可足够精确地認为，在压縮力 S 和横向載荷的联合作用下最大撓度为

$$\delta = \frac{\delta_0}{1-\alpha}. \tag{59}$$

最大撓度的这一表达式也可近似地用来計算支柱中的弯矩．例如，对于两端鉸支的支柱受均布載荷的情形，最大弯矩可由下列近似公式算得：

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{S\delta_0}{1-\alpha}. \tag{60}$$

如縱向力不是压縮力而是拉力，上述方法还是可用的，不过在撓度曲綫的表达式(58)中要用 $-\alpha$ 代 α．如我們只用此表达式中的第一項，中点撓度的近似公式就变成

$$\delta = \frac{\delta_0}{1+\alpha}, \tag{61}$$

式中 δ_0 表示由横向載荷单独产生的撓度．必須指出，对于縱向拉力的情形，α 可以大于 1，而近似方程式[式(61)]的精确度則隨 α 的增大而降低．例如，对于均布的横向載荷，式(61)的誤差在 $\alpha=1$ 时为 0.3% 左右；在 $\alpha=2$ 时誤差为 0.7%，而在 $\alpha=10$ 时誤差为 1.7%．

对于两端固定的杆，为了計算其中点的撓度，可以导出一类似

于式(61)的近似方程式，即

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + \frac{\alpha}{4}}, \tag{62}$$

式中 δ_0 为横向載荷单独作用时在中点产生的挠度，而 α 的意义則与前面相同.

如何应用这些近似方程式，将在后面研究薄矩形板的撓曲时加以說明. 三角級数的方法也可推广至分析变截面的梁[1].

习 題

1. 試用一无穷級数来求图 36a 所示的梁由作用在左端的力偶 M 产生的挠度曲綫.

解. 把 c 看作非常小，并将 $Pc=M$ 和 $\sin(n\pi c/l)\sim(n\pi c/l)$ 代入式(54)的級数中，得

$$y = \frac{2Ml^2}{EI\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

2. 試求受載情形如图 38 所示的簡支支柱的挠度曲綫.

答.

$$y = \frac{2ql^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-\alpha)}\left(\cos\frac{n\pi a}{l} - \cos\frac{n\pi b}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

3. 試求立柱 AB 之 B 端的挠度 δ. 此柱在 A 端固定而在 B 端

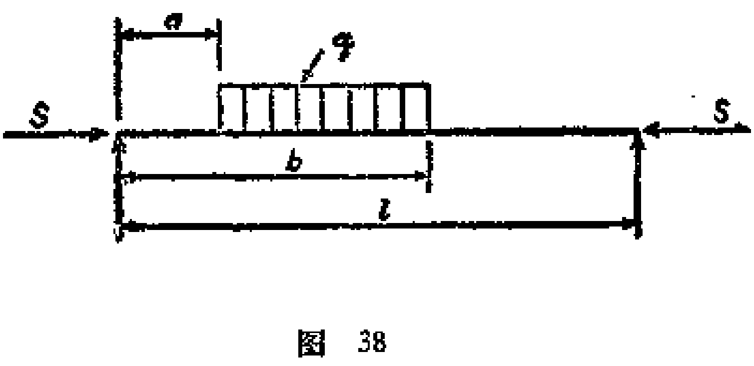


图 38

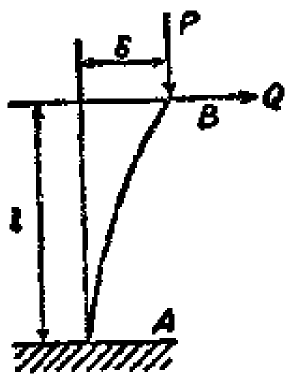


图 39

1) 参看 M. Hetényi 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. A-49, 1937.

受載荷，如图 39 所示.

答.

$$\delta = \frac{Ql^3}{3EI} \cdot \frac{1}{1-\alpha},$$

式中

$$\alpha = \frac{P(2l)^2}{EI\pi^2}.$$

§ 8. **具有微小初曲率的杆的撓曲.** 如有一具有微小初曲率的杆只因横向力而发生弯曲时，撓度就可用对直杆所用的方法来計算. 然而，如除了横向力外还有縱向力，則情况就完全不同了. 这一微小初曲率使这些縱向力对撓度的影响有很大的改变. 如用三角級数来表示曲綫的初始形状和弯曲所产生的撓度，就可大大簡化所涉問題[1]. 同前面一样，設曲杆有一对称平面而外力作用在此平面内，同时認为杆的两端簡支. 以 y_0 表示从連接两端中心的弦量起的杆中心綫的初始縱坐标，而以 y_1 表示外力所产生的撓度，则弯曲后合成縱坐标为

$$y = y_0 + y_1. \tag{a}$$

令初撓度曲綫用下列級数表示：

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots, \tag{b}$$

而令載荷所产生的撓度为

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots. \tag{c}$$

这时可用与直杆相同的应变能表达式[式(53)]. 对于图 37 所示的受載情形，在計算縱向力 S 所作的功时，必須用下列值代替 λ 值[参看式(56)].

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{d(y_1 + y_0)}{dx}\right]^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 dx =$$

---

1) 参看作者的論文，Festschrift zum 70. Geburtstage August Föppl, Berlin, p.74, 1924.

$$= \frac{\pi^2}{4l}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right). \tag{63}$$

它表示撓曲时曲杆的一端对另一端的縱向位移.

我們按直杆的情形(第 43 頁)处理,而給予杆一个无穷小的附加撓度 $da_n \sin(n\pi x/l)$. 縱向力 S 在此撓度下所作的功为

$$S\frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_0)}{\partial a_n}\, da_n = S\frac{n^2\pi^2}{2l}(a_n + b_n)da_n.$$

載荷 P 所作的功为

$$P \sin\frac{n\pi c}{l}\, da_n,$$

由式(53),应变能的增量为

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n.$$

用以計算 a_n 的方程式为

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n = P \sin\frac{n\pi c}{l} da_n + S\frac{n^2\pi^2}{2l}(a_n + b_n)da_n,$$

从而得

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin\frac{n\pi c}{l} + Sn^2\pi^2 l^2 b_n}{EI\pi^4 n^4 - Sn^2\pi^2 l^2}.$$

代入式(c),并用記号

$$\alpha = \frac{Sl^2}{EI\pi^2},$$

我們得

$$y_1 = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\frac{\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{1-\alpha} + \frac{\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^4 - 2^2\alpha} + \cdots\right) +$$

$$+ \alpha\left(\frac{b_1 \sin\frac{\pi x}{l}}{1-\alpha} + \frac{b_2 \sin\frac{2\pi x}{l}}{2^2 - \alpha} + \cdots\right). \tag{64}$$

式(64)右边第一个表达式表示直杆的撓度[参看式(58)], 而第二个則表示由初曲率所引起的附加撓度.

以具有一初挠度 $y_0 = b\sin(\pi x/l)$ 的杆为例．最大挠度是在跨距的中点，其大小等于 b．如只有纵向力 S 作用在杆上($P=0$)时，将 $P=0$，$b_1=b$，$b_2=b_3=\cdots=0$ 代入式(64)，可得这些力在中点所产生的挠度．于是

$$y_1 = \frac{\alpha b \sin\dfrac{\pi x}{l}}{1-\alpha}. \tag{d}$$

弯曲后中心綫的合成縱坐标为

$$y = y_1 + y_0 = \frac{\alpha b \sin\dfrac{\pi x}{l}}{1-\alpha} + b\sin\frac{\pi x}{l} = \frac{b}{1-\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{65}$$

由于有縱向压縮力 S，中心綫的縱坐标有所增加，与原来之比为 $1/(1-\alpha)$，即縱坐标的增量决定于縱向力与临界力之比 α 的大小。

如不是压縮力而是縱向拉力作用在杆上时，只需在上面各方程式中以 $-\alpha$ 代 α 即可．对于 $y_0 = b\sin(\pi x/l)$ 的特殊情形，变形后中心綫的縱坐标变成

$$y = \frac{b}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{66}$$

可見縱向拉力使初縱坐标減小．例如，取縱向力等于其临界值($\alpha=1$)，我們求得

$$y = \frac{1}{2}b\sin\frac{\pi x}{l},$$

此縱向力使杆的初縱坐标減小了一半。

第三章　梁弯曲中的一些特殊問題

§9. 梁弯曲中的局部应力. 棱柱杆中弯曲应力的初等公式只有在离載荷作用点較远之处才得出令人滿意的結果．在此点附近，应力将不規則地分布．对于狹长矩形截面，这种不規則性可利用一承受集中力 P 作用的无限大的板（图 40）中应力分布的精确解来加以研究．力 P 作用在板的中面內并与板边垂直．这时，应

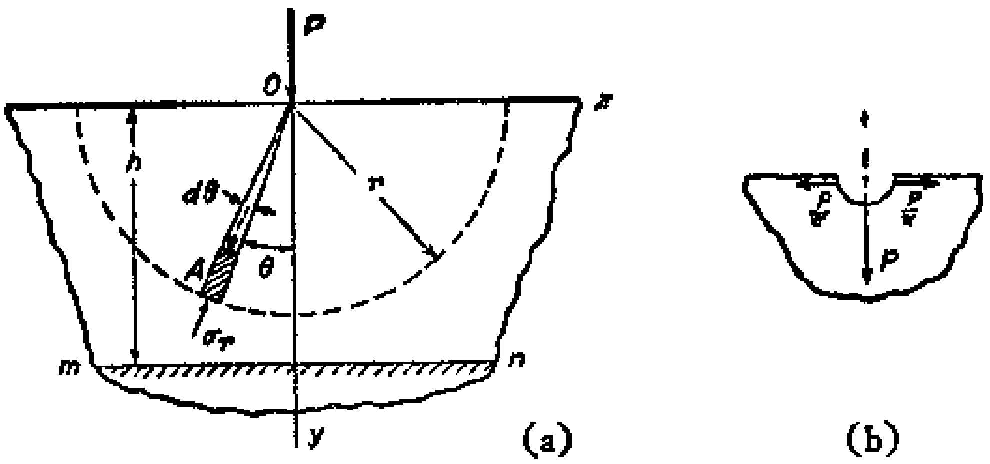


图　40

力分布为簡单径向应力分布[1]． 如点 A 所示的一体元在径向承受簡单压縮，应力为

$$\sigma_r = -k\frac{P\cos\theta}{br}, \tag{a}$$

式中 r 为离載荷作用点的径向距离，而 b 为板厚，系数 k 可由沿图中虛綫所示的半圓长度分布的应力 σ_r 与載荷 P 相平衡这一事实来确定．于是

1) 参看作者和 J. N. Goodier 所著的 "Theory of Elasticity", New York, p. 85, 1951. 承受集中載荷的組合式大梁中的局部应力曾由 E. W. Parkers 加以研究，*Proc. Roy. Soc., A*, vol. 231, No. 1186, 1955, pp. 379—387.

$$-2b\int_0^{\pi/2}\sigma_r\cos\theta\, r d\theta = P.$$

以 σ_r 的表达式[式(a)]代 σ_r，得

$$k=\frac{2}{\pi},$$

而式(a)变成

$$\sigma_r = \frac{-2P}{\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{br}. \tag{67}$$

如果我們研究一离板边的距离为 h 的水平面 mn（图 40），則作用在該平面上的正应力为

$$\sigma_y=\sigma_r\cos^2\theta=\frac{-2P}{\pi}\frac{\cos^3\theta}{br}=\frac{-2P}{\pi}\frac{\cos^4\theta}{bh}. \tag{68}$$

可以看出，压力随角 θ 的增加而急剧地减小。同时还可以看出，应力随距离 h 的減小而增加．知道了由一集中載荷 P 的作用所产生的应力，并运用迭加法，我們就易于討論有多个載荷作用的情形了。

如有一集中力作用在一高度为 h 的狹长矩形截面梁的中点时，式(67)所表示的高度集中的应力就与梁中的弯曲应力相迭加，而在載荷作用点的附近引起复杂的应力分布．由集中載荷引起的应力分布的这种剧变具有局部特性，只有在接近載荷作用点之处才具有重要性．如果我們研究梁上离載荷的距离例如大于梁高度的一半的一个截面，則該截面上的应力分布就接近于由簡单梁公式所求得者。

确定图 40a 中虛綫半圓每一半的径向压力 $b\sigma_r r d\theta$ 水平分量的合力时，可以看出集中力 P 产生一楔入作用，此作用在图 40b 中用大小为 P/π 而方向相反的两个力表示．对于高度为 h 和厚度为 b 的梁，作用在离梁的軸綫 $h/2$ 处的这些力，在中間截面上不但产生由下式表示的拉应力

$$\sigma_x'=\frac{P}{\pi hb}, \tag{b}$$

同时还产生由下式表示的弯应力：

$$\sigma_x'' = -\frac{Ph}{2\pi}\frac{y}{I_z}, \tag{c}$$

式中 $Ph/2\pi$ 为水平力 P/π 所产生的弯矩，y 为离梁轴綫的距离，向下取为正，而 $I_z = bh^3/12$ 为截面慣性矩. 将式(b)和(c)的应力与用普通梁公式求得的弯应力相迭加，我們求得梁的加載截面內最远纖維中的拉应力为

$$(\sigma_x)_{y=h/2} = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{6}{bh^2} + \frac{P}{\pi bh} - \frac{3P}{\pi bh}$$

$$= \frac{Pl}{4}\cdot\frac{6}{bh^2}\left(1 - \frac{4}{3\pi}\frac{h}{l}\right). \tag{d}$$

括弧內第二項表示由載荷 P 的楔入作用所产生的应力. 可以看出，对于短梁此应力相当大.

式 (d) 是对狹长矩形截面的梁推出的，但是它也可用于工字梁. 設載荷 P 的局部作用完全由梁的腹板来承受，我們又得楔入力 P/π，而相应的应力将为

$$\sigma_x' = \frac{P}{\pi A}, \quad \sigma_x'' = -\frac{Ph}{2\pi}\frac{y}{I_z},$$

式中 A 和 I_z 为梁的截面积和截面慣性矩. 将这些应力与用簡单梁公式求得的应力相迭加，我們求得最大拉应力为

$$(\sigma_x)_{y=h/2} = \left(\frac{Pl}{4} - \frac{Ph}{2\pi}\right)\frac{h}{2I_z} + \frac{P}{\pi A}. \tag{e}$$

此应力与实驗結果很好地符合[1].

为了研究狹长矩形截面梁支座处的局部应力，我們可利用图 41 所示楔的两种受載情形的已知解[2]. 对于这些情形，我們仍得单純的径向应力分布，并仍能用径向压縮应力的公式(a). 对于楔受压縮的情形，图 41a，常数 k 可由下式求得：

$$2b\int_0^\alpha \sigma_r \cos\theta \; r d\theta = 2\int_0^\alpha kP\cos^2\theta d\theta =$$

---

1) 参看 Arnold W. Hendry 的論文, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 7_2, p. 91, 1949.

2) 参看作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity", p. 96, 1951.

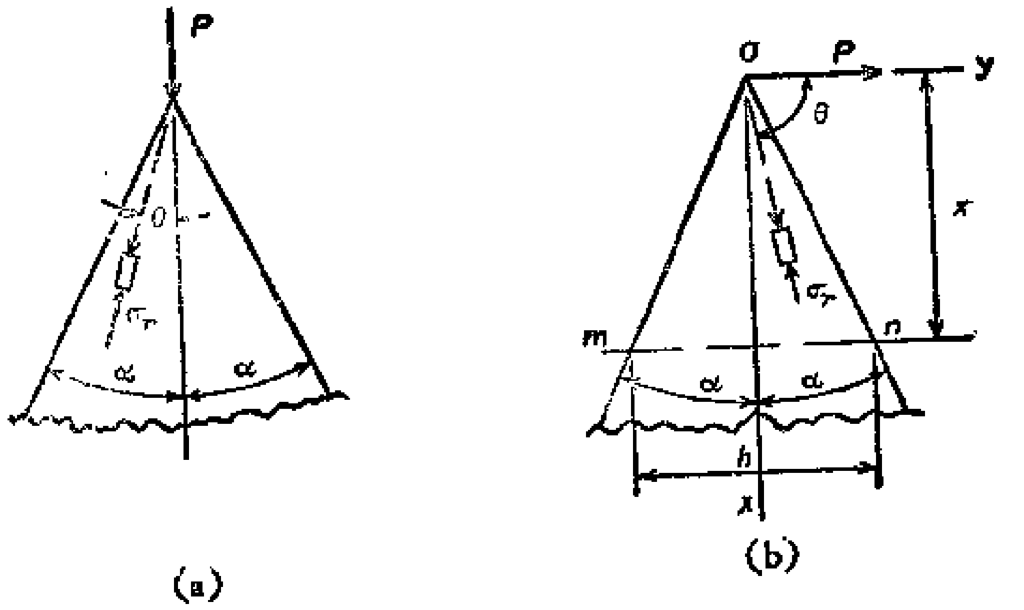


图 41

$$= kP\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = P,$$

从而得

$$k = \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}.$$

于是我們由式(a)求得应力为

$$\sigma_r = -\frac{P\cos\theta}{br\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}. \tag{69}$$

对于楔受弯曲的情形，图 41b，角 θ 仍从力 P 的方向量起，静力学方程式变成

$$b\int_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha} \sigma_r \cos\theta \ r d\theta = -P,$$

从而得

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}}.$$

于是我們得径向压縮应力的公式为

$$\sigma_r = -\frac{P\cos\theta}{br\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}. \tag{70}$$

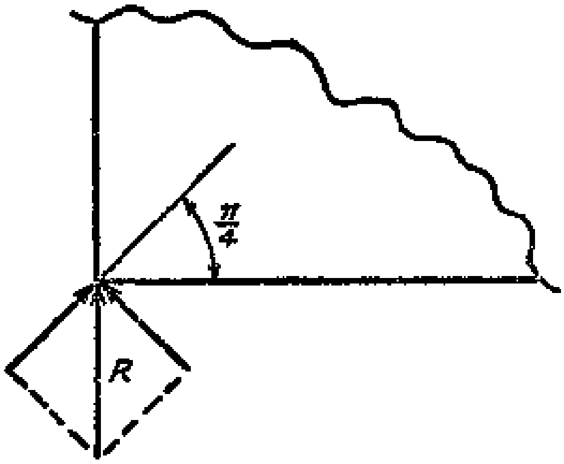


图 42

可以看出，如果 θ 大于 $\pi/2$，则径向应力变成正的或拉应力。

結合式(69)和(70)这两个解，就可得出矩形梁支座处的径向应力分布，图 42。

§ 10. 变截面梁中的剪应力. 运用上节的式(70)，我們現在来研究楔形悬臂中的弯应力，图41b. 取垂直于 x 軸的截面 mn，得[参看原书上卷第 38 頁式(17)和(18)]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \sin^2\theta = \frac{My}{I_z}\,\frac{4\tan^3\alpha\sin^4\theta}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)};\\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_r}{2}\sin 2\theta = \frac{P}{bh}\,\frac{16y^2}{h^2}\,\frac{\tan^3\alpha\sin^4\theta}{2\alpha - \sin 2\alpha},\end{aligned} \tag{a}$$

式中

$$h = 2x\tan\alpha;\quad I_z = \frac{bh^3}{12};\quad M = -Px.$$

对于楔的中性面，$\theta = \pi/2$ 而正应力和剪应力均为零. 最大的正应力和剪应力发生在 $\theta = (\pi/2) + \alpha$ 处. 它們可由式(a)算得，即

$$(\sigma_x)_{\max} = -\beta\frac{Mh}{2I_z},\ (\tau_{xy})_{\max} = 3\beta\frac{P}{bh}, \tag{b}$$

式中

$$\beta = \frac{4}{3}\cdot\frac{\tan^3\alpha\cos^4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

当 $\alpha=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ 和 20° 时，系数 β 分别为 1.00，0.970，0.947 和 0.906.

可以看出，如果角 α 足够小，由公式(b)的第一式知，最大正应力 σ_x 与普通梁公式求得的接近相同. 当 $\alpha = 20^\circ$ 时，可以从系数 β 的数值中看出，簡单梁公式的誤差为 10% 左右. 公式(b)的第二式所表示的最大剪应力为平均剪应力 P/bh 的三倍左右，它发生在离中性軸最远的点上. 后面这一事实与对稜柱杆所得的結

果(原书上卷第 116 頁)正相反. 在許多情形下，实际的剪应力不很重要，因而只考虑正弯应力. 于是对棱柱梁导出的最大弯应力公式也能足够准确地用于变截面杆，只要截面的变化并不太快.

根据簡单梁公式能足够准确地用于計算变截面梁中的正弯应力这一假設，这些梁中的剪应力可应用曾对棱柱梁所用的方法(参看原书上卷第 116 頁)来計算. 設有一具有变高度 h 和等寬度 b 的矩形梁为一作用在一端的载荷 P 所弯曲(图 43). 取两个相邻

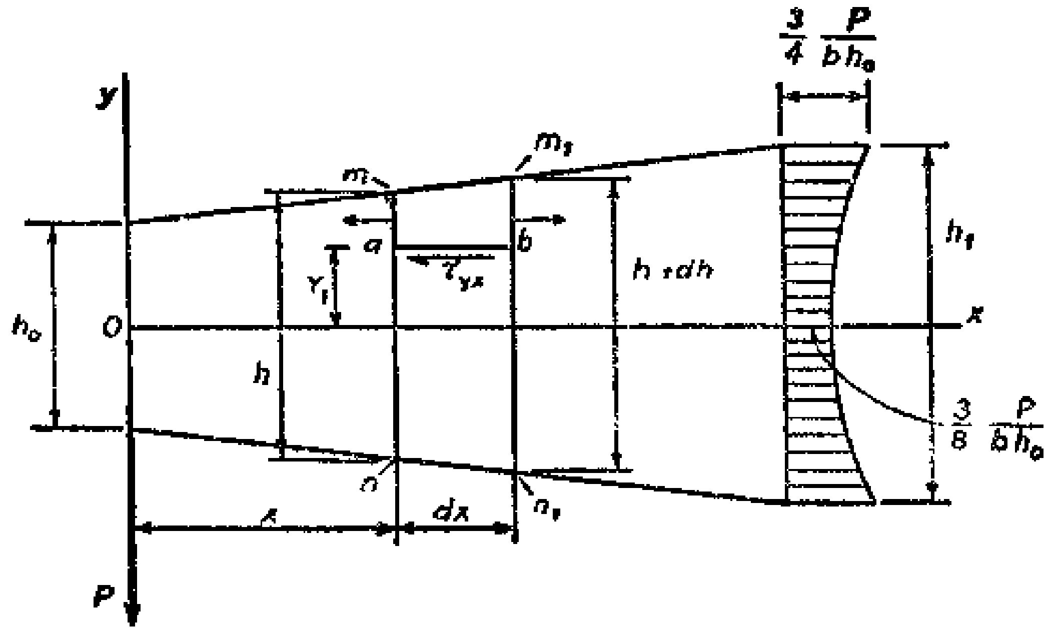


图 43

截面 mn 和 m_1n_1, 并用一水平面 ab 切出一体元 mm_1ba, 我們可由此体元的平衡方程式来求剪应力 τ_{yx} 的大小，平衡方程式为

$$b\int_{y1}^{(h+dh)/2}(\sigma_x + d\sigma_x)dy - b\int_{y1}^{h/2}\sigma_x dy = b\tau_{yx}dx, \qquad (c)$$

式中

$$\sigma_x = \frac{12Pxy}{bh^3}, \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}dx = \frac{12Py}{b}\left[\frac{x}{h^3} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{h^3}\right)dx\right].$$

代入式(c)，得

$$\frac{3Px}{h^2}dh + 6P\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{h^3}\right)dx\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) = b\tau_{yx}dx,$$

从而得

$$\tau_{yx} = \frac{3Px}{bh^2}\frac{dh}{dx} + \frac{6P}{b}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{h^3}\right). \qquad (d)$$

如果已知 h 为 x 的确定的函数，τ_{yx} 就可由此方程式很快算得。例如，設 h 为 x 的綫性函数而 $h_1 = 2h_0$，图 43。于是我們有 $h = h_0(1 + x/l)$并由式(d)得

$$\tau_{yx} = \frac{6Ph_0}{bh^2}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{y_1}{h}\right)^2\left(\frac{2x - l}{l}\right)\right].$$

可以看出，剪应力的分布不但与 y_1 有关，同时还与离加載端的距离 x 有关。当 $x = 0$ 时，同稜柱矩形梁一样，我們得到拋物綫形的应力分布。对于在 $x = l$ 处的固定端，得

$$\tau_{yx} = \frac{3P}{8bh_0}\left(1 + \frac{y_1^2}{h_0^2}\right).$$

此应力分布在图 43 中用阴綫面积表示。

式(d)是假設了图 43 所示的特殊受載情形而导出的。考虑到这时弯矩等于 Px 并在式(d)中以 M 代 Px，得下列方程式：

$$\tau_{yx} = \frac{3M}{bh^2}\frac{dh}{dx} + \frac{6}{b}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{h^3}\right), \tag{e}$$

此式可用于梁的任何受載情形。

§ 11. **薄凸緣的有效寬度.** 由簡单弯曲公式［参看原书上卷

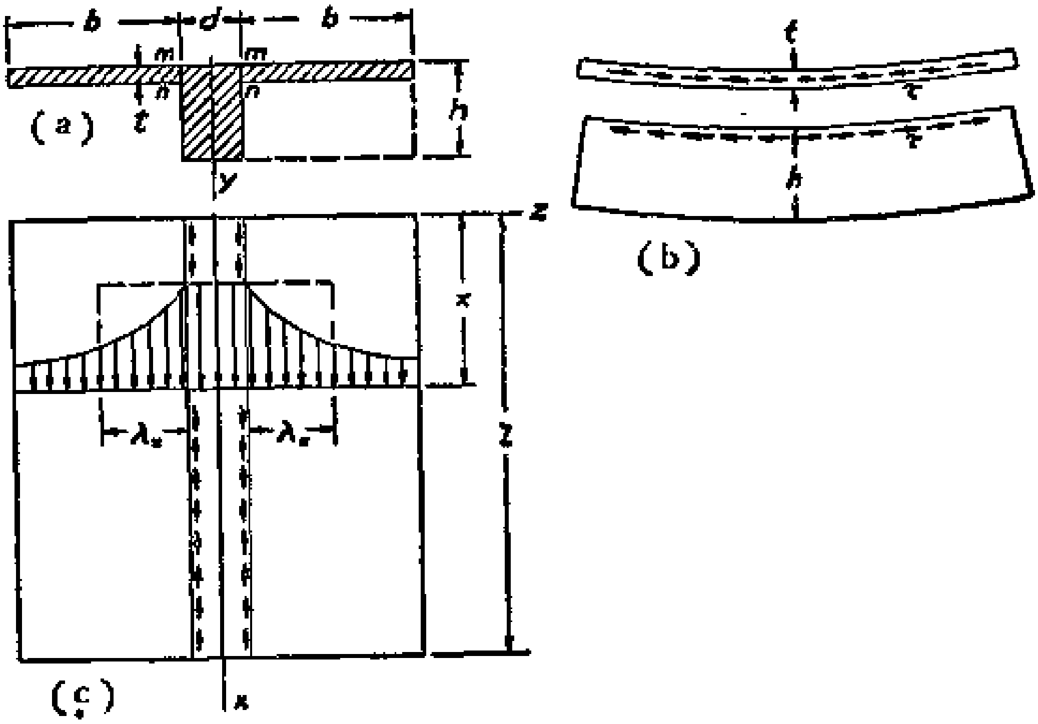


图 44

第 94 頁式(55)]知,梁中的弯应力与离中性軸的距离成正比. 只有在我們所研究的梁其截面尺寸比起长度来很小时,以及我們所研究的各点离两端相当远时,此結論才是正确的. 在实际应用中,我們有时用到寬凸緣的梁,对此应用初等的梁公式就不够精确了.以图 44 所示的由一肋和一寬凸緣所組成的梁为例. 設梁在两端簡支而在中面 xy 内受載,我們发現在凸緣与肋之間沿面 mn 有剪应力作用(图 44a),其方向如图 44b 所示. 可以看出,这些应力有助于減小肋的撓度,也就是使其刚度变大. 同时它們使凸緣受压縮. 把在肋一面的凸緣看作一沿一个边承受剪力作用的矩形板(图 44c),我們看出压縮应力将沿凸緣的寬度不均匀地分布,而由精确的分析知[1],分布将如阴綫面积所示,凸緣中的最大应力与肋的上部纖維中的相同. 由应力分布的这种不均匀性可以得出,如将表示最大弯应力的簡单梁公式应用于图 44a 中的梁时,我們必須用一**折合寬度** $2\lambda_x$ 来代替两个凸緣的真实寬度 $2b$,以便求得最大应力的正确值. 这一折合寬度通常称为**有效寬度**,如果由图 44c 中阴綫面积所示的压縮应力分布为已知时,它就可以算出. 只需使图中虛綫所示的矩形面积等于阴綫面积卽可. $2\lambda_x$ 的大小通常沿梁的跨距变化,因为它与梁的尺寸及弯矩图的形状有关.

对于凸緣寬度非常大,例如 $2b \geqslant l$ 的特殊情形,弯矩图可用下列正弦曲綫表示:

$$M = M_1 \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{a}$$

折合寬度变成常数,其值等于

$$2\lambda_x = \frac{4l}{\pi(1+\mu)(3-\mu)},$$

---

1) 由 Th. v. Karman 求得的精确解在作者和 Goodier 所著"Theory of Elasticity", p. 171, 1951 一书中有討論. 并参看 W. Metzer, *Luftfahrtforsch.*, vol. 4, p. 1, 1929; K. Girkmann, *Stahlbau*, vol. 6, p. 98, 1933; H. Reissner, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 14, p. 312, 1934; E. Reissner, *Stahlbau*, vol. 7, p. 206, 1934; F. Chwalla, *Stahlbau*, vol. 9, p. 73, 1936; I. Beschkine, *Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg.*, vol. 5, p. 65, 1937—1938.

式中 μ 为泊桑比．对于 $\mu=0.3$，得

$$2\lambda_x = 0.363l. \tag{71}$$

因此对于此特殊情形，真实的梁可用两凸緣寬度等于 $0.363l$ 的一个等截面的**等价T形梁**来代替．将簡单梁公式应用于此梁，我們就可求得与真实的梁相同的最大应力．

对于受横向載荷的一般情形，弯矩图可用下列正弦級数表示：

$$M_x = \sum M_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{b}$$

式中系数 M_n 对于任何特定情形均可由下列的已知公式[1]算得

$$M_n = \frac{2}{l}\int_0^l M_x \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{c}$$

例如，对于受均布載荷的情形，我們有

$$M_x = \frac{qx(l-x)}{2},$$

而由公式(c)得出

$$M_n = \frac{4ql^2}{n^3\pi^3}, \tag{d}$$

式中 $n=1, 3, 5, \cdots$.

有了式(b)級数中的系数 M_n，我們就可由精确解求得有效寬度，对于凸緣寬度很大的情形，得

$$\frac{l}{2\lambda_x} = \beta\left[\frac{M_x}{\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{M_n\sin(n\pi x/l)}{4+(k/\beta)n\pi}} - 4\right], \tag{72}$$

式中 $\beta = tl/dh$ 为面积 tl 与肋的截面积之比，而

$$k = \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{4} = 0.878,\ \text{当}\ \mu = 0.3\ \text{时}.$$

以梁受均布載荷的情形为例，将式(d)的 M_n 代入公式(72)，我們求得当比值 β 为各种数值时，有效寬度沿梁长度的变化如图 45 所示．可以看出，在跨距的中段，有效寬度变化很小，与一正弦弯矩图[参看式(71)]近似相同．当有效寬度由公式(72)求得时，将簡

1) 参看§7.

单梁公式应用于等价梁就可求得最大应力和最大挠度.

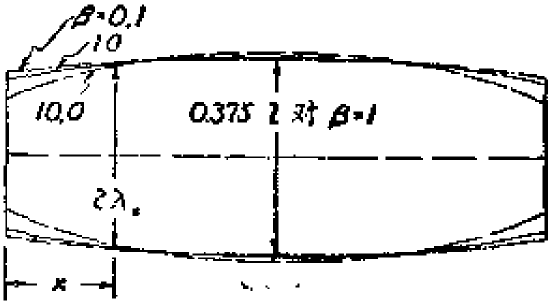


图 45

我們已討論了梁的凸緣寬度非常大的情形. 对于凸緣并不非常寬的情形，以及对于一长矩形板用一組相同而等距的肋来加固的情形，也都有精确解. 对于所有这些情形，問題化为計算一个等价梁的应力和挠度[1].

与上面所討論者通性相同的問題发生在飞机結构中. 研究一由两槽鋼組成的箱形梁，图 46，此两槽鋼用沿边鉚接或焊接与两

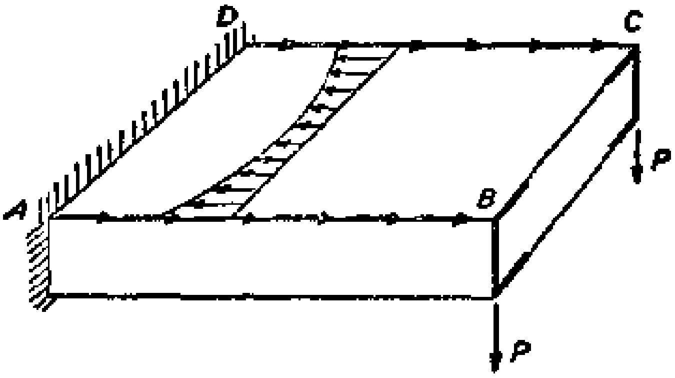


图 46

薄板相固結. 如整个梁在左端固定，而作为一悬臂承受作用在槽鋼另一端的两个力 P 时，則由初等弯曲理論得知，在薄板 $ABCD$ 中将有一拉伸弯应力在平行于 BC 的任意截面上均匀分布. 然而，事实上薄板因它边上由槽鋼传来的剪应力而又受到拉应力，如图 46 所示. 拉应力在薄板寬度上将不均匀地分布，正如图 46 所示，边上将較中間为大. 这种与初等理論所假設的均匀性的偏离称为

1) 这些精确解已应用于鋼筋混凝土板的規范中. 在飞机設計中，寬凸緣中不均匀的应力分布是用一近似理論来加以考虑的，此理論在 P. Kuhn 的論文中有討論，*Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Repts.*, No. 608, 1937 和 No. 636, 1938. 并参看 H. Ebner, *Luftfahrtforsch.*, vol. 14, p. 93, 1937，和 vol. 15, p. 527, 1938.

剪切滞后，因为它涉及薄板中的剪切变形．此問題曾由应变能的研究在一些簡化假設下作了分析[1]．

§12. 迭加法的限制． 在討論梁的弯曲时，指出了挠度的計算可用迭加法来大大加以簡化(参看原书上卷第162頁)．如果梁的弯曲并不使外力的作用发生任何变化，此法就总可以应用．例如，梁由于横向載荷产生的小挠度并不改变这些載荷下的弯矩图，因而可以成功地应用迭加法．但是如果我們有弯曲同时又有軸向拉伸或压縮时，则由横向載荷产生的挠度就改变了軸向力的作用，后者不但引起軸向拉伸或压縮，同时还引起一些附加弯曲．对于这种情形，正如我們已在前面所看到的(§4)，对迭加法就有一些限制；我們只能对横向載荷应用此法，而設軸向力始終保持不变．在其他一些情形下，梁的小挠度可能使力的作用发生很大的变化．对于这种情形就不能用迭加法．現在来討論属于此类的一些例子．

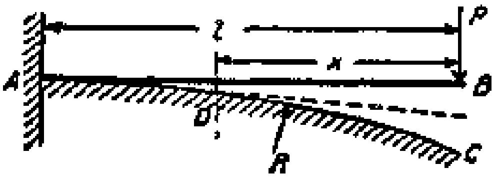


图 47

我們来研究悬臂 AB 的弯曲作为第一个例子(图47)．如果弯曲时它逐漸与一刚性圓柱支承面 AC 相接触，而支承面 AC 具有不变的曲率 $1/R$ 和点 A 处的水平切綫．可以看出，当由下式所表示的梁在 A 端的曲率

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{EI_z}=\frac{Pl}{EI_z}\tag{a}$$

小于支承面的曲率 $1/R$ 时，悬臂将只在点 A 与表面 AC 接触，而在 B 端的挠度 δ 可用下列的已知公式求得：

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI_z}.\tag{b}$$

根据方程式

1) 参看論文：E. Reissner, *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, p. 268, 1946; J. Hadji-Argyris, *Aeronaut. Research Council (Brit.) Repts. and Mem.*, No. 2038, 1944; J. Hadji-Argyris 和 H. L. Cox, *ibid.*, No. 1969, 1944. 在这些論文中列有更早出版的参考資料．

$$\frac{1}{r}=\frac{Pl}{EI_z}=\frac{1}{R},\tag{c}$$

我們可求得載荷 P 的极限値，在此値下梁开始与圓柱支承面在点 A 以外接触。令 $P_1=EI_z/lR$ 为載荷的这个极限値；于是当 $P>P_1$ 时梁的 AD 部分将被支承，如图 47 中虚綫所示。悬臂未被支承部分的长度 x 可由梁在点 D 的曲率 $1/r$ 等于支承面的曲率这一条件求得；于是

$$\frac{Px}{EI_z}=\frac{1}{R},$$

而我們求得

$$x=\frac{EI_z}{PR}.\tag{d}$$

悬臂 B 端的总撓度由下面三部分組成：(1)梁 DB 部分的撓度同一簡单悬臂一样，即

$$\delta_1=\frac{Px^3}{3EI_z}=\frac{(EI_z)^2}{3P^2R^3},\tag{e}$$

(2)由于点 D 的斜率而有的撓度，即

$$\delta_2=\frac{x(l-x)}{R}=\frac{EI_z}{PR^2}\left(l-\frac{EI_z}{PR}\right),\tag{f}$$

和(3)表示点 D 到点 A 处的水平切綫之距离的撓度，即

$$\delta_3\approx\frac{(l-x)^2}{2R}=\left(l-\frac{EI_z}{PR}\right)^2\frac{1}{2R}.\tag{g}$$

将这三部分相加，得总撓度如下：

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3=\frac{l^2}{2R}-\frac{1}{6}\frac{(EI_z)^2}{P^2R^3}.\tag{h}$$

如果 P 大于极限値 $P_1=EI_z/lR$，就必須用这一撓度表达式来代替式(b)。应当指出，撓度不再与 P 成正比。如果除了 P 外还有一載荷 Q 作用在悬臂的 B 端，则总撓度将不等于把 P 和 Q 两者看作单独作用时 P 所产生的撓度与 Q 所产生的撓度之和。因此这时不能用迭加法。

我們来研究如图 48 所示的两端固定的梁受均布載荷的情形

作为第二个例子． 設弯曲时梁的中段为一刚性水平基础所支承，因此这段挠度不变并等于 δ． 可以看出，如果中点的挠度小于 δ

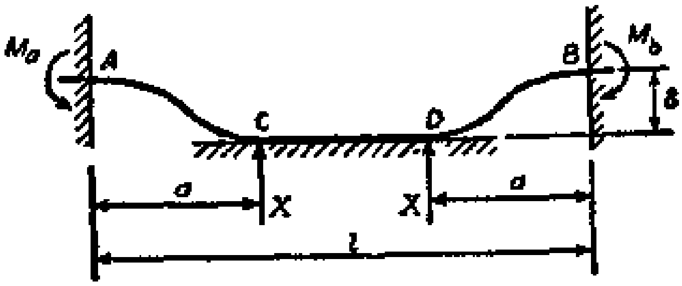


图 48

时，我們就得一两端固定的梁的通常弯曲情形． 載荷的极限值 q_1 可由下列的已知方程式求得：

$$\frac{1}{384}\frac{q_1 l^4}{EI_z}=\delta. \tag{i}$$

对于強度为 q_1 的載荷，梁恰好在中点与水平基础相接触． 当載荷 q 繼續增加时，在接触点上出現一反力 $2X$．反力的大小可由下式确定：

$$\frac{ql^4}{384EI_z}-\frac{2Xl^3}{192EI_z}=\delta. \tag{j}$$

此条件一直可以維持到載荷达到 q_2 时，这时梁中点的弯矩和曲率均等于零． q_2 之值可由下式求得：

$$\frac{q_2 l^2}{24}-\frac{2Xl}{8}=0, \tag{k}$$

即

$$2X=\frac{q_2 l}{3}.$$

代入式(j)得

$$\frac{1}{3}\frac{q_2 l^4}{384EI_z}=\delta. \tag{l}$$

将此与式(i)比較，我們求得 $q_2=3q_1$． 当載荷強度等于 q_2 时，梁在中点的体元变成平直并与水平基础接触．

当載荷強度大于 q_2 时，梁的一部分将为基础所支承，如图 48 所示． 这部分保持平直，因此无弯矩作用在梁的 CD 部分，而載荷

则为均布反力所平衡．然而在C和D两端，集中反力X将作用在梁未被支承的部分．如把梁的AC部分看作一受均布载荷q和一端受一集中载荷X的悬臂，就可求得梁未被支承部分的长度a和集中反力X的大小．考虑到弯曲时点C的截面并不旋轉并运用原书上卷第150和151頁的式(94)和(100)，得

$$\frac{qa^3}{6EI_z}=\frac{Xa^2}{2EI_z},$$

从而得

$$X=\frac{qa}{3}. \tag{m}$$

另一方程式可由点C的撓度等于δ这一条件求得．运用悬臂撓度的已知公式，得

$$\frac{qa^4}{8EI_z}-\frac{Xa^3}{3EI_z}=\delta. \tag{n}$$

解出式(m)和(n)，得

$$a=\sqrt[4]{\frac{72\delta EI_z}{q}},\ X=\sqrt[4]{\frac{8\delta EI_zq^3}{\text{o}}}. \tag{o}$$

可以立即看出反力X与载荷不成正比．数值最大的弯矩是在固定端，它可由下式求得：

$$|M_a|=|M_b|=\frac{qa^2}{2}-Xa,$$

从而得

$$M_a=\frac{qa^2}{6}=\sqrt{2\delta EI_zq}. \tag{p}$$

我們还看出弯矩并不与载荷按同比例增加．因此不能用迭加法．

习　　题

1. 若以均布載荷q代替力P时，試求图47所示的悬臂的撓度．

2. 有一在中点承受一力P的梁（图49）为半径为R的两个相同圓柱面所支承，試求其中点的撓度表达式．

解． 随着载荷P的增加，梁与支承面的接触点向内移动而跨

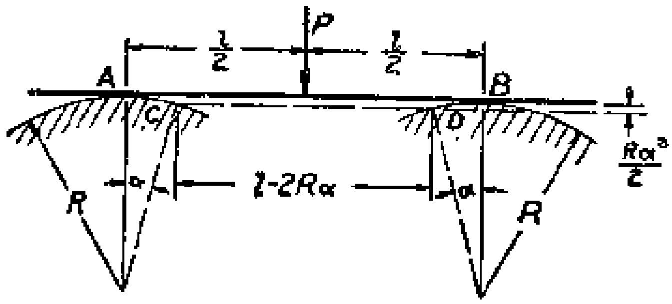


图 49

距減小；因此撓度增加的比例較載荷 P 为小。定出接触点位置的角 α 可由撓度曲綫与支承面在这些点上相切这一条件求得；因此当 α 值很小时

$$\alpha=\frac{P(l-2R\alpha)^2}{16EI_z}.$$

有了 α，我們就可由下式求得中点的撓度：

$$\delta=\frac{P(l-2R\alpha)^3}{48EI_z}+\frac{R\alpha^2}{2}.$$

3. 如設梁在 A 和 B 两点固定时，試解上題。

4. 如載荷不在跨距 AB 的中点时，試解題 2。

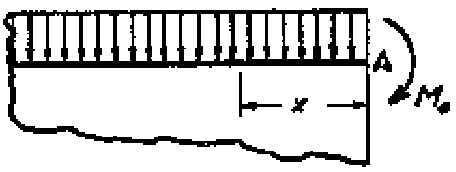


图 50

5. 有一承受均布載荷的长梁为一水平刚性基础所支承，图 50。它的长度 x 为作用在一端的力矩 M_0 所弯曲，試求 A 端的轉角 α 和长度 x。

解. 长度 x 可由下式求得：

$$\frac{qx^3}{24EI}=\frac{M_0x}{6EI}.$$

A 端的轉角为

$$\alpha=\frac{M_0x}{3EI}-\frac{qx^3}{24EI}.$$

6. 有一鉛直力 P 作用在一稜柱杆 AB 的 A 端，稜柱杆 AB 的全长为一水平刚性平面所支承（图 51）。如設 P 小于杆重 ql 的一半时，試研究杆的弯曲。

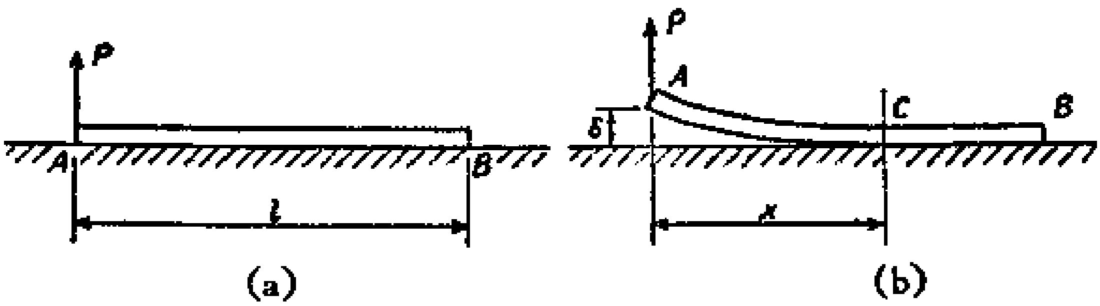


图 51

解. 杆的 BC 部分(图 51b)保持平直而点 C 的弯矩为零. 于是杆上承受弯曲的 AC 部分的长度 x 可由下式求得:

$$\frac{qx^2}{2}=Px,$$

从而得

$$x=\frac{2P}{q}.$$

在点 C 将作用有一大小等于 P 的集中铅直反力, 杆的 AC 部分与一跨距为 x 的受均布载荷梁的条件相同. 此杆 A 端的挠度为

$$\delta=\frac{qx^4}{24EI_z}.$$

第四章　薄板与薄壳

§13. 板弯成圓柱面的弯曲.　設有一具有等厚度 h 的矩形板被弯成一圓柱面(图 52)[1]. 这时完全可以把单位寬度的一小条，例如 AB，单独看作一长度为 l 的矩形截面梁. 由連續条件可得，弯曲时小条的截面将不发生畸变，如原书上卷第 93 頁图 82b 所示. 于是小条的縱向纤維例如 ss(图 53)不仅承受縱向拉应力 σ_x，而且还承受側向拉应力 σ_z，側向拉应力必定阻止纤維作側向收縮. 同前面一样(参看原书上卷第 92 頁)，我們假設弯曲时小条的截面保持为平面. 于是在 x 和 z 方向的单位伸长各为

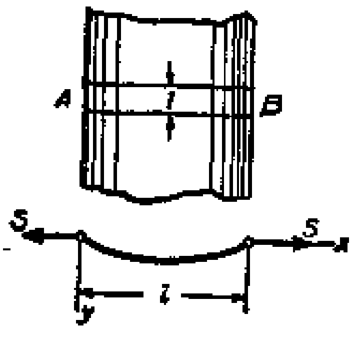


图 52

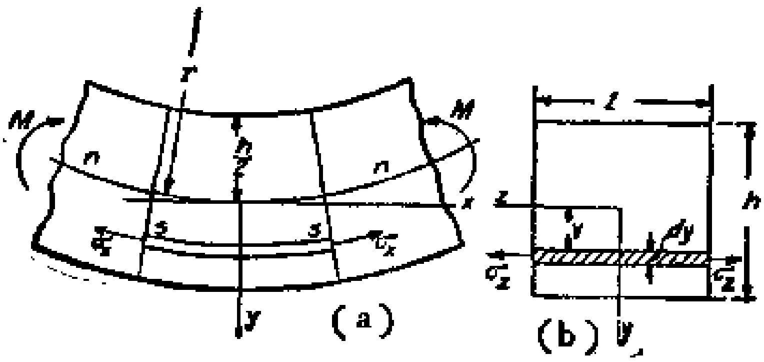


图 53

$$\varepsilon_x = \frac{y}{r};\quad \varepsilon_z = 0.$$

于是在 x 和 z 方向的相应应力可按在两垂直方向受拉伸的情形求得. 运用原书上卷第 55 頁式(38)，求得

1) 对于长矩形板，如作用力不沿板的长度变化，并且只考虑板上离两端足够远的部分时，就会发生这种弯曲.

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x E}{1-\mu^2} = \frac{Ey}{(1-\mu^2)r};$$

$$\sigma_z = \frac{\mu \varepsilon_x E}{1-\mu^2} = \frac{\mu E y}{(1-\mu^2)r}.$$

我們現在按照杆的弯曲情形計算小条任意截面处的弯矩. 于是

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y dy = \frac{E}{(1-\mu^2)r}\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)r},$$

从而得

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}, \tag{73}$$

式中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{74}$$

此値称为板的**弯曲刚度**,它代替了在討論梁的弯曲时所用的 EI_z. 由小条的式(73)与杆的式(56)(原书上卷第95頁)的比較知,板内小条的刚度較同样截面单独杆的刚度为大,两者之比为 $1:(1-\mu^2)$.

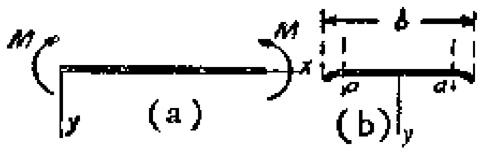


图 54

由实驗知,当寬度 b 很大的单独薄条发生弯曲时,截面的畸变只发生在边附近(图54b),而薄条的中間部分 aa 則被弯成一圓柱形[1]; 因此式(73)可用于計算撓度,并且可証明薄条的刚度較之由簡单梁公式所求得的为大.

当小条 AB(图52)的撓度很小时, 曲率 $1/r$ 可用其近似值 d^2y/dx^2 来代替,小条撓度曲綫的微分方程式为

$$D\frac{d^2y}{dx^2} = -M. \tag{75}$$

板弯成圓柱面的弯曲的討論牵涉到此方程式的积分. 由于均布载荷而弯成圓柱面的特殊情形在下一节中討論.

---

1) 此现象是由 G. F. C. Searle 加以說明的, Experimental Elasticity, Cambridge, 1908. 并参看 H. Lamb, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 21, p. 70, 1891, 及作者在 *Mech. Engrg.*, (1923) 中第259頁的論文.

§14. 受均布载荷的长矩形板的弯曲. 如长度比寬度大得多的一块矩形板受有均布載荷时，可以假設在发生最大撓度和应力的中心附近撓曲面接近于圓柱形，而式(75)可用来計算撓度[1]. 我們来研究此重要問題[2]的两个极端情形：(1)板边簡支，并能在弯曲时自由地旋轉，和(2)板边固定. 在这两种情形下，均設板边在板的平面内无位移. 于是如图 52 中 AB 之类的微条就与受均布横向載荷和拉力 S 的系杆情形(参看§6)相同. 力 S 的大小可由小条的伸长量等于撓度曲綫的长度与弦 AB 的长度 l(图 52)之差这一条件求得.

簡支边. 对于簡支边的情形，如設撓度曲綫为一正弦曲綫，即

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{a}$$

就可求得 S 的很好的近似值，式中 δ 表示中点的撓度. 于是根据式(56)，小条中心綫的伸长量为

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{\pi^2\delta^2}{4l}. \tag{b}$$

取中点撓度的近似式(61)，得

$$\delta = \frac{\delta_0}{1+\alpha}, \tag{c}$$

式中

$$\delta_0 = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{D} \quad 和 \quad \alpha = \frac{S}{S_{cr}} = \frac{Sl^2}{\pi^2 D}. \tag{76}$$

代入式(b)，得

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \cdot \frac{\delta_0^2}{(1+\alpha)^2}. \tag{d}$$

設弯曲时在板的平面内小条的側向收縮量为零，于是由式(74)和

---

1) 如簡支板的长度为其寬度的 3 倍，而固定板的长度为其寬度的 2 倍时，根据此假設导出的解就足够精确.

2) 此問題的解是由 I. G. Boobnov 給出的. 参看他的著作"Theory of Structure of Ships", St. Petersburg, vol. 2, p. 545, 1914. 此問題的討論以及船壳中应力的計算載于作者的"Theory of Plates and Shells"(New York, 1940)一书中.

(76)得，由力 S 引起的小条中心綫的伸长量为

$$\lambda = \frac{Sl(1-\mu^2)}{Eh} = \frac{\pi^2 \alpha h^2}{12l}. \tag{e}$$

使式(d)与(e)相等，求得用以确定 α 从而纵向力 S 的方程式如下：

$$\alpha(1+\alpha)^2 = \frac{3\delta_0^2}{h^2}. \tag{77}$$

如载荷 q 和板的尺寸均为已知，就很容易算出式(77)的右面这項．令

$$1 + \alpha = x, \tag{f}$$

可簡化式(77)的解．于是此式变成

$$x^3 - x^2 = \frac{3\delta_0^2}{h^2},$$

卽 x 値使其立方与平方之差为一已知値．因此 x 可由計算尺或适当的表格确定，而 α 則由式(f)求得．于是小条 AB 的挠度和应力用系杆的表 4（参看第 39 頁）来計算．运用此表时，必需記住，根据式(23)和(76)

$$u = \frac{pl}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}. \tag{78}$$

以一承受均布载荷 $q = 10$ 磅/吋^2 而尺寸为 $l = 45$ 吋和 $h = \frac{3}{8}$ 吋的鋼板为例．于是式(77)变成

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 290, \tag{g}$$

从而得

$$\alpha = 5.97 \text{ 和 } u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha} = 3.83.$$

由纵向力 S 产生的拉应力为

$$\sigma_x' = \frac{S}{h} = \frac{\alpha S_{cr}}{h} = \frac{\alpha \pi^2 D}{hl^2} = 11300 \text{ 磅/吋}^2,$$

根据式(45)，小条中点的最大弯矩为

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}\psi_1(u). \tag{h}$$

仍用表 4，当 $u = 3.83$ 时，用内插法求得 $\psi_1(u) = 0.131$。这表明弯矩由于纵向力 S 的作用而大为减小，它仅为由横向载荷单独作用时产生的力矩的 13% 左右。运用式(h)得

$$M_{\max} = \frac{10 \times 45^2}{8} \times 0.131 = 332 \text{ 吋磅}.$$

相应的最大弯应力为

$$\sigma_x'' = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \times 332 \times 8^2}{3^2} = 14200 \text{ 磅/吋}^2,$$

将拉应力与弯应力相迭加，得最大应力为

$$\sigma_{\max} = \sigma_x' + \sigma_x'' = 11300 + 14200 = 25500 \text{ 磅/吋}^2.$$

可見，由于纵向力的作用，最大应力并不与载荷強度按同比例增加。例如，在上面的数字例子中，如取 $q = 20$ 磅/吋²，則由式(g)得

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 290 \times 4 = 1160,$$

从而得

$$\alpha = 9.85; \quad u = 4.93.$$

由纵向力 S 产生的拉应力为

$$\sigma_x' = \frac{S}{h} = 18600 \text{ 磅/吋}^2,$$

当 $u = 4.93$ 时，$\psi_1(u) = 0.082$。最大弯应力为

$$\sigma_x'' = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \times 20 \times 45^2 \times 8^2}{8 \times 3^2} \times 0.082 = 17900 \text{ 磅/吋}^2,$$

而最大合成应力为

$$\sigma_{\max} = \sigma_x' + \sigma_x'' = 18600 + 17900 = 36500 \text{ 磅/吋}^2.$$

換言之，由于纵向力 S 的作用，应力比载荷增加得慢。在此情形下，当载荷加倍时，最大应力只增加 43%。

固定边. 对于固定边的情形，式(a)用下式代替[1]：

$$y = \frac{\delta}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right), \tag{i}$$

1) 参看作者論文，*loc. cit.*, p. 47.

此式满足固定边上的条件，因为在 $x=0$ 和 $x=l$ 处，挠度 y 和斜率 dy/dx 均变成零。将式(i)代入式(b)，得小条中心綫的伸長量为

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=\frac{\pi^2\delta^2}{4l}. \qquad (j)$$

对于中点的挠度，我們用近似式(62)：

$$\delta=\frac{\delta_0}{1+\frac{\alpha}{4}},$$

由式(j)和(e)求得 α 的方程式如下：

$$\alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)^2=\frac{3\delta_0^2}{h^2}, \qquad (79)$$

或令 $1+\left(\frac{\alpha}{4}\right)=x$，得

$$x^3-x^2=\frac{3}{4}\frac{\delta_0^2}{h^2}. \qquad (k)$$

在前面 $q=10$ 磅/吋^{2}的数字例子中，式(k)变成

$$x^3-x^2=2.90,$$

从而得 $x=1.849$ 和 $\alpha=3.40$。于是拉力較簡支边的情形为小，两者之比为 3.40/5.97，我們得

$$\sigma_x'=\frac{3.40}{5.97}\times 11300=6430 \text{ 磅/吋}^2.$$

計算弯曲应力时，用第 39 頁表 4。鉴于这时 $u=(\pi/2)\sqrt{\alpha}=2.89$，我們从表中用內插法求得 $\psi_2=0.686$，$\psi_3=0.488$。每一固定边上的弯矩为

$$M=-0.686\frac{ql^2}{12}=-1.150 \text{ 吋磅}.$$

相应的最大弯应力为

$$\sigma_x''=49300 \text{ 磅/吋}^2.$$

最大合成应力为[1)]

1) 設鋼的比例極限大于所計算的应力。

$$\sigma_{max} = \sigma_x' + \sigma_x'' = 6430 + 49300 = 55700 \text{ 磅/吋}^2.$$

将此应力与上面对簡支边的相同板求得的作一比較可以看出，将边固定可提高最大应力．此結果可説明如下：由于边的固定，板的挠度减小，而縱向力 S 及其对弯矩的影响也减小．对于簡支边的情形，最大弯矩仅为由横向載荷单独产生的 0.131．但是对于固定边的情形，这些边上的弯矩为由横向載荷单独产生的 0.686；即对于簡支边的情形，縱向力的影响較为显著．

此近似方法可用于計算承受流体靜压的船壳板中的应力．

最大应力显然与載荷強度 q 及比値 l/h 有关．对于簡支边的情形和比値 l/h 的不同数値，此应力的大小用图 55 中的曲綫[1]表示．可見由于随載荷而增加的拉力 S 的存在，最大应力与載荷 q 不成正比．

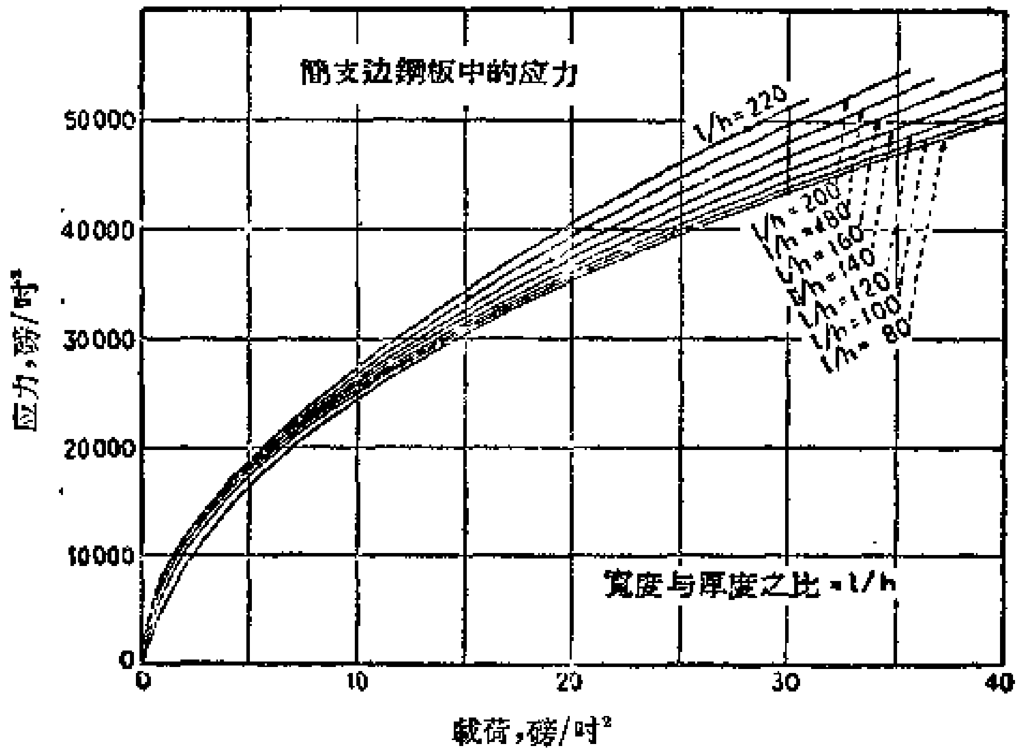


图 55

对于板边为固定的情形，最大应力的曲綫示于图 56．可見，当載荷強度 q 之值很小时，这时軸向力对小条挠度的影响很小，最

1) 这些曲綫取自 S. Way 于 1932 年 6 月在新港美国机械工程師协会应用力学組的会議上发表的論文．

大应力与 q 近似地按同比例增加。但是当 q 值較大时，載荷与最大应力之間的关系就变成非綫性了。

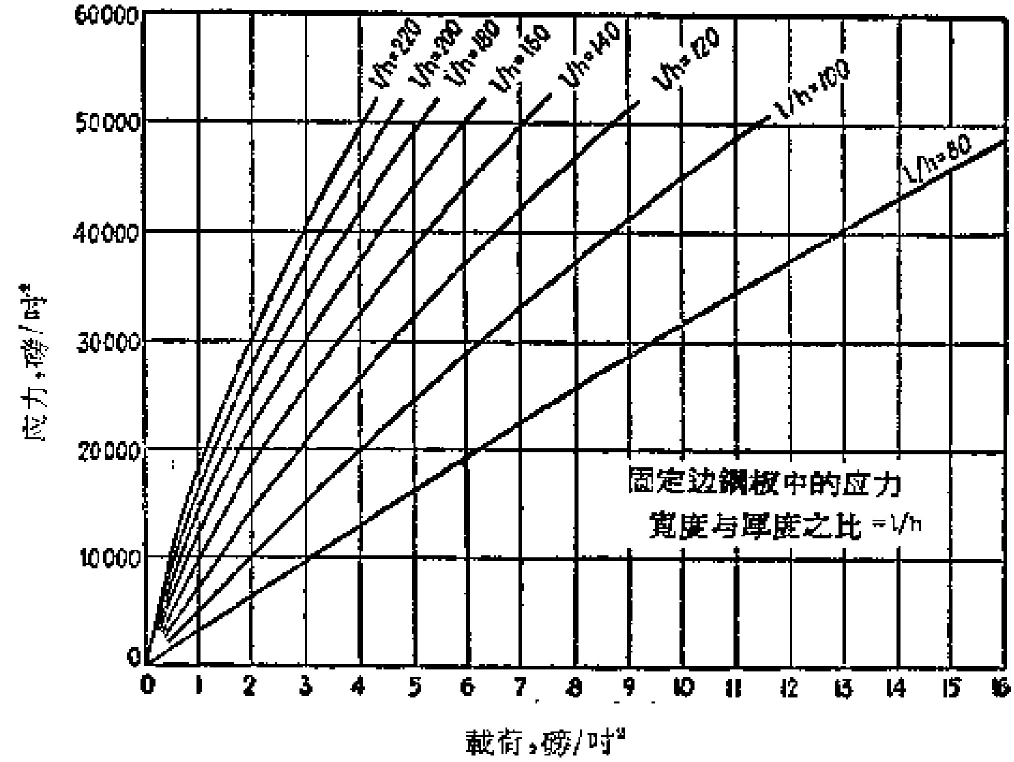


图 56

§ 15. **具有微小初圓柱曲率的长矩形板的撓曲**[1]。 对此問題，我們可运用对具有微小初曲率的杆的弯曲求得的結果(第 49 頁)。設板边簡支，并取坐标軸和微条如图 52 所示。令

$$y_0 = b\sin\frac{\pi x}{l} \tag{a}$$

表示板的小初撓度，板中点的最大撓度等于 b。 如果施加一均布載荷 q，就产生一附加撓度，同时引起板中面[2]的伸长。 同前面一样，以 S 表示单位寬度的小条 AB 上的拉力，而以 α 表示此力与临界力 $S_{cr} = \pi^2 D/l^2$ 之比。于是由載荷 q 产生的附加撓度为

$$y_1 = \frac{\delta_0}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha b}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{b}$$

1) 參看作者論文，*loc. cit.*, p. 54.

2) 中面即板上下两面之間的中間面。

右边第一项表示直綫小条撓度的近似表达式，此式在前面曾对平板用过；第二项表示初曲率的影响[参看第 51 頁式(d)]．将式(a)和(b)相加，得中心綫的合成縱坐标：

$$y = y_0 + y_1 = b\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{\delta_0}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha b}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l} =$$

$$= \frac{b+\delta_0}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{c}$$

研究了小条 AB 的伸长量就可确定 α 的大小．运用了与 § 14 相同的推理，得此伸长量的表达式如下：

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 dx.$$

将式(a)和(c)的 y_0 和 y 代入幷积分，得

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l}\left[\left(\frac{b+\delta_0}{1+\alpha}\right)^2 - b^2\right].$$

使此值等于由縱向力 S 引起的伸长量[§ 14 式(e)]，得

$$\frac{\pi^2}{4l}\left[\left(\frac{b+\delta_0}{1+\alpha}\right)^2 - b^2\right] = \frac{\pi^2\alpha h^2}{12l}$$

或

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 3\left(\frac{b+\delta_0}{h}\right)^2 - 3\frac{b^2}{h^2}(1+\alpha)^2. \tag{80}$$

如果 $b = 0$，这就变成平板的式(77)．

以与 § 14 中尺寸相同的鋼板为例：

$$l = 45 \text{ 吋}, \quad h = \frac{3}{8} \text{ 吋}, \quad q = 10 \text{ 磅/吋}^2,$$

幷設 $b = \frac{3}{8}$ 吋．于是

$$\delta_0 = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{D} = 3.686 \text{ 吋},$$

而式(80)变成

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 351.6 - 3(1+\alpha)^2. \tag{d}$$

同前面一样，令

$$1 + \alpha = x;$$

于是

$$x^3 + 2x^2 = 351.6,$$

从而得

$$x = 6.45, \quad \alpha = 5.45.$$

由縱向力 S 产生的拉应力为

$$\sigma_x' = \frac{S}{h} = \frac{\alpha\pi^2 D}{hl^2} = 10200 \text{ 磅/吋}^2.$$

此应力略低于平板的相应应力(参看 71 頁)。

計算弯应力时必須指出，式(b)所表示的挠度包括两部分。第一部分与平板的相同；第二部分，即

$$-\frac{\alpha b}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l},$$

則表示初曲率的影响。对应于挠度第一部分的最大弯应力在 $\alpha = 5.45$, $u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha} = 3.67$, $\psi_1 = 0.142$ 时(由第 39 頁表 4)为 15300 磅/吋²。对应于挠度第二部分的弯矩为

$$-D\frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{\alpha b}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}\right) = -\frac{\alpha\pi^2 bD}{(1+\alpha)l^2}\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad \text{(e)}$$

此力矩带有負号，而应从对平板算得的应力中減去的相应最大压应力为

$$-\frac{6}{h^2}\cdot\frac{\alpha\pi^2 bD}{(1+\alpha)l^2} = -9500 \text{ 磅/吋}^2.$$

将此应力与应力 σ_x' 及对平板求得的弯应力 15300 磅/吋²加以合成，得完全应力：

$$\sigma_x = 10200 + 15300 - 9500 = 16000 \text{ 磅/吋}^2.$$

将这些結果同平板的作一比較可以看出，此处拉力 S 略有減小，而由于弯矩为負值之故[式(e)]中点的弯应力大为減小。初曲率的影响使合成应力从 25500 磅/吋²減小到 16000 磅/吋²。此結果是在初挠度等于板厚时求得的。增加初挠度可使最大应力繼續降低。

§16. 在两个垂直方向的純弯曲. 我們首先来研究一为沿边

均布的力矩所弯曲的矩形板(图 57). M_1 表示与 y 軸平行的边上单位长度內的弯矩，而 M_2 表示与 x 軸平行的边上单位长度內的弯矩. 以图中所示的力矩方向作为正方向. 取板上、下两面之間的中間面即板的**中面**为 xy 平面，則 z 軸与此平面垂直并向下. 用平行于 xz 和 yz 平面的两对平面从板中切出一体元(图 58). 板的

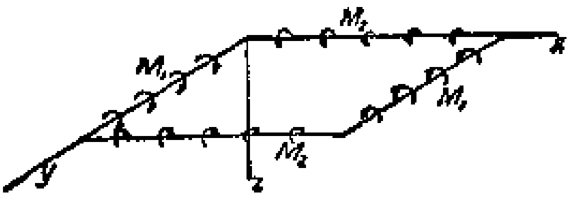


图 57

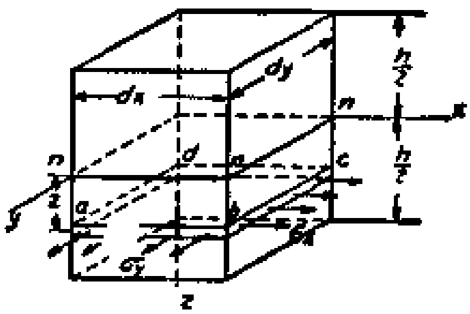


图 58

純弯曲理論系基于弯曲时此体元的侧面均保持为平面，并繞中性軸 n-n 旋轉这一假設的. 对于如图 57 所示的这种力矩，体元上部受压縮而下部受拉伸. 在板作此弯曲时，中面 nn 并不发生任何变形，所以它就是**中性面**. 以 $1/r_1$ 和 $1/r_2$ 分别表示此中性面在平行于 xz 和 yz 平面的截面內的曲率；于是离中性面 z 处的一薄层 $abcd$ 在 x 和 y 方向的单位伸长可按梁的情形(原书上卷第 93 頁)求得，分别等于

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_1}; \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_2}. \tag{a}$$

运用原书上卷第 55 頁式(38)，相应的应力分别为

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r_1} + \mu\frac{1}{r_2}\right), \tag{b}$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r_2} + \mu\frac{1}{r_1}\right). \tag{c}$$

这些应力均与离中性面的距离 z 成正比. 使作用在体元侧面上的內力矩等于外力偶的力矩，得下列方程式：

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dy dz = M_1 dy, \tag{d}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_y z dx dz = M_2 dx. \tag{e}$$

将式(b)和(c)的 σ_x 和 σ_y 代入，鉴于

$$\frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D,$$

式中 D 表示**板的弯曲刚度**[式(74)]，我們求得

$$D\left(\frac{1}{r_1} + \mu\frac{1}{r_2}\right) = M_1, \tag{81}$$

$$D\left(\frac{1}{r_2} + \mu\frac{1}{r_1}\right) = M_2, \tag{82}$$

这相当于原书上卷第 95 頁适用于直杆純弯曲的式(56)。以 w 表示板在 z 方向的小撓度，則曲率的近似公式为

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ 和 } \frac{1}{r_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

用 w 表示之，于是式(81)和(82)变成

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = M_1 \tag{83}$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = M_2. \tag{84}$$

这些方程式相当于原书上卷第 139 頁适用于直杆撓度曲綫的式(79)。

对于 $M_1 = M_2 = M$ 的特殊情形，撓曲面在两垂直方向的曲率相等，面为球面。根据式(81)，球的曲率为

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D(1+\mu)}. \tag{85}$$

这一球形撓曲面是对任意形状的板当弯曲力矩 M 在其边上均匀分布时求得的。

在前面的討論中假設了中面纖維的长度不变，即此面为弯板的中性面。只有在弯板的面为**一可展**曲面时，例如 § 15 所討論的圓柱面，此条件才能被严格遵守。对于非可展曲面，只有在板的撓度 w 比起板的厚度 h 来很小时，上面的假設才足够精确。为了

說明这一点,我們来研究圓板由沿边均布的力偶 M 所引起的弯曲. 从前面的理論中得知,撓曲面为一半径如式(85)所示的球面. 以 AOB（图 59）表示弯曲圓板的直径截面，圓板的外半径为 a 而其中点的撓度为 δ（我們首先假設板的中面沿經綫例如 AOB 无伸长）. 于是弧 $OB = a$, $\varphi = a/r$, 和 $CB = a_1 = r\sin\varphi$. 在这一情形下显而易見,在板发生撓曲的同时,在圓周方向产生一压縮应变. 在板边处此应变的大小为

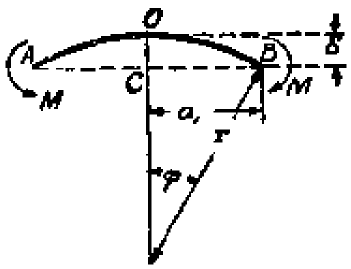


图 59

$$\varepsilon = \frac{a - a_1}{a} = \frac{r\varphi - r\sin\varphi}{r\varphi}.$$

当撓度 δ 很小时,角 φ 很小,所以 $\sin\varphi \approx \varphi - (\varphi^3/6)$, 因此

$$\varepsilon = \frac{\varphi^2}{6}, \tag{f}$$

或鉴于

$$\delta = r(1 - \cos\varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2},$$

我們得

$$\varepsilon = \frac{\delta}{3r}. \tag{g}$$

它代表边上周向应变的上限. 它是假設了經綫应变为零而求得的. 在实际情形下,在經綫方向将有一定大小的应变,而眞正的周向压縮将小于式(g)所示者[1].

关于板弯曲的近似理論完全忽略了中面内的应变，而只考虑如式(a)所示的应变,对此应变上例中的最大値为 $h/2r$. 因此,如果 $\delta/3r$ 比起 $h/2r$ 来很小时，也就是如果撓度 δ 比起板厚 h 来很小时,則如式(g)所示的应变就可忽略不計，而中面就可看作无

1) 如撓度并不很小而且計及了中面内的应变时，曾指出在半径 $a = 23h$ 的圓板受純弯曲的情形下，当中点的撓度等于板厚的 0.6 时，边上中面内的周向压縮应力为最大弯应力的 18% 左右. 参看作者論文，*Memoirs Inst. Engrs. Ways of Communication*, St. Petersburg, 1915. 并参看他的"Theory of Plates and Shells" p. 332, 1940.

应变．只有在合乎此假設时，后面对板弯曲的各种特殊情形給出的結果才能足够精确地应用。

§17. 板中的热应力． §16 中适用于弯成球形的式(85)，对計算板中由于受热不均匀而产生的热应力非常有用。以 t 表示板上、下两面的温度差，而以 α 表示材料的綫膨胀系数。設板厚內的温度按照綫性規律变化，則相应的膨涨也按照同一規律；如板边为自由，則由这种膨涨所引起的挠曲将为球形[1)]．最大膨涨量与中面处膨涨量之差为 $\alpha t/2$，由此不均匀膨涨所产生的曲率由下式表示：

$$\frac{\alpha t}{2}=\frac{h}{2r},$$

从而得

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha t}{h}. \tag{86}$$

如各边为自由而挠度比起厚度来很小时，板的这种弯曲就不产生任何应力。

然而，如板边为固定，則受热时将沿边产生弯矩．这些弯矩的大小恰使由受热不均匀所产生的曲率消除[曲率如式(86)所示]，因为只有这样才能滿足固定边的条件．我們由式(85)和(86)求得固定边单位长度內的弯矩方程式如下：

$$M=\frac{\alpha t(1+\mu)D}{h}.$$

由于 M 作用在高度为 h、寬度为单位长的矩形面积上，因此相应的最大弯应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{6M}{h^2}=\frac{6\alpha t(1+\mu)D}{h^3}=\frac{\alpha t}{2}\frac{E}{1-\mu}. \tag{87}$$

此应力与热膨涨系数 α、板两面的温度差 t[2)] 以及弹性模量成正比．温度差 t 似乎随板厚而增加；所以同薄板比較，厚板中可望有較大

1) 設挠度比起板厚 h 来很小．

2) 必須指出，t 表示板两面的温度差，而不是与板接触的液体或气体的温度差。由于板表面上温度的急剧改变，后者可能大大地大于 t．

的热应力。 应当指出，对平板推导的式(87)也可足够精确地用于球形壳和圆筒壳的情形(参看 119 頁)。

§ 18. 圆板受中心对称載荷时的弯曲[1]. 对于这种情形，挠曲面对垂直于板并通过其中心的軸綫对称，而研究通过此軸綫的直径截面足可算出挠度和应力。 图 60 表示具有对称軸 Oz 的这一直径截面。 以 w 表示板上离軸綫 x 处的任意点 A 在 z 方向的挠度。当 w 值很小时，我們可以令 $\varphi=-(dw/dx)$ 表示挠曲面在同一点的斜率。于是板在直径截面 xz 內的曲率为

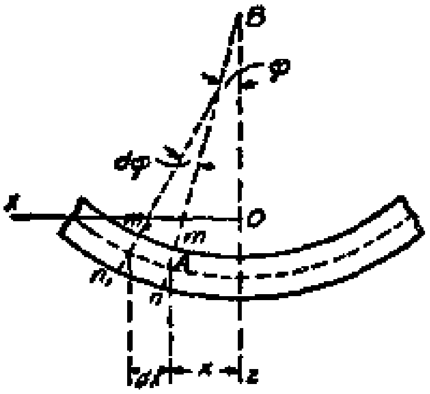


图 60

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d\varphi}{dx}. \tag{a}$$

确定在垂直于 xz 平面的方向內的曲率半径 r_2 时必須指出，在板发生挠曲后，如 nm 这样的截面就形成一圆錐面，其頂点 B 即 nm 与軸綫 Oz 的交点。于是 AB 表示半径 r_2，由图 60 得

$$\frac{1}{r_2}=\frac{\varphi}{x}. \tag{b}$$

我們現在忽略剪切对弯曲的影响，并假設弯矩与曲率之間的关系与板純弯曲的情形(§16)相同，所以可以应用式(81)和(82)；将式(a)和(b)代入式(81)和(82)，得

$$M_1=D\left(\frac{d\varphi}{dx}+\mu\frac{\varphi}{x}\right), \tag{88}$$

$$M_2=D\left(\frac{\varphi}{x}+\mu\frac{d\varphi}{dx}\right). \tag{89}$$

在这些方程式中，M_1 和 M_2 均表示单位长度內的弯矩，M_1 作用在如 mn 这样的圆柱截面上，而 M_2 作用在直径截面 xz 上。

---

1) 这种弯曲情形是由 Poisson 所发展出来的，*Mém. de l'Acad.* (Paris), vol. 8, 1829.

式(88)和(89)只包含一个变量 φ，它可由体元 $abcd$（图 61）的平衡方程式确定，而体元 $abcd$ 是由两个圆柱截面 ab 和 cd 以及两个直径截面 aO 和 bO 从板上切出的。作用在体元 cd 面上的力偶为

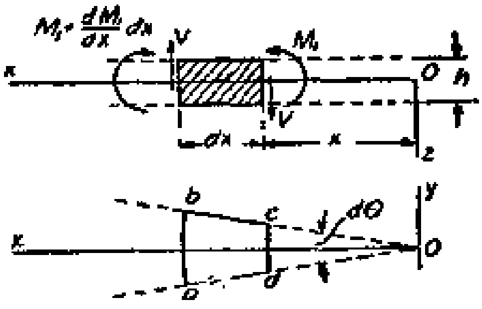


图 61

$$M_1 x d\theta. \tag{c}$$

ab 面上的相应力偶为

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx}dx\right)(x + dx)d\theta. \tag{d}$$

ad 和 bc 面上的力偶各等于 $M_2\,dx$，而它們在 xz 平面内的合力偶等于

$$M_2 dx d\theta. \tag{e}$$

除了这些力偶外，在 ab 和 cd 面上还有剪力 V[1]。如 V 表示单位长度內的剪力，则作用在体元 cd 面上的总剪力为 $Vxd\theta$。忽略高次微量，在 ab 面上就作用着一个同样大小的剪力。这两个力在 xz 平面內产生一个力偶，其大小等于

$$Vxd\theta dx. \tag{f}$$

用适当的符号将力矩(c)，(d)，(e)和(f)相加，则体元 $abcd$ 的平衡方程式为

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx}dx\right)(x + dx)d\theta - M_1 x d\theta - M_2 dx d\theta + Vxdxd\theta = 0,$$

忽略高次微量，从而得

$$M_1 + \frac{dM_1}{dx}x - M_2 + Vx = 0. \tag{g}$$

将式(88)和(89)的 M_1 和 M_2 值代入，式(g)就变成

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{V}{D}. \tag{90}$$

---

1) 由对称性得知，在体元的 bc 和 ad 面上无剪力。

对于受对称载荷的圆板的任何特定情形，均可由静力学来确定剪力 V，然后可用式(90)来确定板的斜率 φ 和挠度 w。

例如，研究一受強度为 q 的均布載荷和作用在中心的集中載荷 P 的圆板．如取板上用軸綫 Oz 和半径为 x 的圆柱面切出的一个截面，我們就可由板上用圆柱面切出的里面部分的平衡方程式来求出此截面单位长度內的剪力 V．作用于板上这部分的載荷为 $P+\pi x^2 q$。这一載荷必須等于分布在圆柱截面上的剪力的合力，于是

$$2\pi x V = P + \pi x^2 q$$

和

$$V = \frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}. \tag{91}$$

代入式(90)，得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{1}{D}\left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}\right),$$

或

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\varphi)\right] = -\frac{1}{D}\left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}\right),$$

积分之，得

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\varphi) = -\frac{1}{D}\left(\frac{qx^2}{4} + \frac{P}{2\pi}\ln x\right) + C_1, \tag{h}$$

式中 C_1 为积分常数．由式(h)的积分得

$$x\varphi = -\frac{qx^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D}\left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) + C_1\frac{x^2}{2} + C_2,$$

或

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} - \frac{Px}{8\pi D}(2\ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \tag{92}$$

式中 C_2 为第二个积分常数．对于小挠度(图 60)，我們得

$$\varphi = -\frac{dw}{dx},$$

由此得挠度方程式如下：

$$\frac{dw}{dx} = \frac{qx^3}{16D} + \frac{Px}{8\pi D}(2\ln x - 1) - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x},$$

积分之，得

$$w = \frac{qx^4}{64D} + \frac{Px^2}{8\pi D}(\ln x - 1) - \frac{C_1x^2}{4} - C_2\ln x + C_3. \quad (93)$$

对于每一特定情形，积分常数 C_1, C_2 和 C_3 均须由板边的条件来确定。

在上面的討論中，式(81)和(82)是根据板的中面为一中性面，也就是在此面上无应变这一假設来应用的。同我們在前面看出的一样(80 頁)，只有在板中面內的板边无应力以及挠度比起板厚来很小时，此假設才是正确的。

§ 19. 受均布載荷圓板的弯曲。 边为固定的板。 对于这种情形，在式(92)和(93)中令 $P=0$ 就可得斜率和挠度。以 a 表示板的外半径，对于固定边我們得：当 $x=a$ 和 $x=0$ 时 $\varphi=0$。由这些条件得出下列用以計算式(90)中任意常数 C_1 和 C_2 的方程式：

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1x}{2} - \frac{C_2}{x}\right)_{x=a} = 0,$$

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1x}{2} - \frac{C_2}{x}\right)_{x=0} = 0,$$

从而得

$$C_2 = 0 \text{ 和 } C_1 = \frac{qa^2}{8D}. \quad (a)$$

将这两个值代入式(92)，得

$$\varphi = \frac{qx}{16D}(a^2 - x^2). \quad (94)$$

現在由式(93)来計算挠度。在此方程式中，我們首先令 $P=0$，然后将式(a)的任意常数 C_1 和 C_2 之值代入，得

$$w = \frac{qx^4}{64D} - \frac{qa^2x^2}{32D} + C_3. \quad (b)$$

常数 C_3 可由板边处挠度为零这一条件求得。于是

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^4}{32D} + C_3 = 0,$$

从而得

$$C_3 = \frac{qa^4}{64D}.$$

将此值代入式(b)，得

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - x^2)^2. \tag{95}$$

最大挠度是在板的中心处，其大小为

$$\delta = \frac{qa^4}{64D}. \tag{96}$$

此挠度等于两端固定而长度等于圓板直径的小条（图 52）挠度的 3/8.

将式(94)中的φ值代入式(88)和(89)，就可得板中的弯矩．这样，我們得

$$M_1 = \frac{q}{16}[a^2(1+\mu) - x^2(3+\mu)], \tag{c}$$

$$M_2 = \frac{q}{16}[a^2(1+\mu) - x^2(1+3\mu)]. \tag{d}$$

在板边($x = a$)处，力矩为

$$M_1 = -\frac{qa^2}{8};\quad M_2 = -\frac{\mu qa^2}{8}; \tag{e}$$

而在中心($x = 0$)处，力矩为

$$M_1 = M_2 = \frac{1+\mu}{16}qa^2. \tag{f}$$

最大应力是在板边处，其大小等于

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6}{h^2}\frac{qa^2}{8} = \frac{3}{4}\frac{qa^2}{h^2}. \tag{97}$$

边为简支的板． 迭加法可用来計算边为簡支的板的挠度．前已指出，对于固定边的情形，有負的弯矩 $M_1 = -(qa^2/8)$ 作用在边上(图 62a)． 如果将此情形与图 62b 所示的純弯曲的情形相結合以消去边上的弯矩，我們就得边为簡支的板的弯曲． 由純弯曲(图 62b)所产

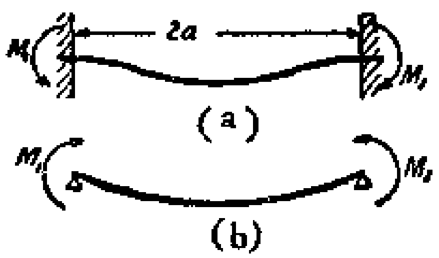


图 62

生的挠度可由式(85)求得 将 $M = qa^2/8$ 代入此式,得

$$\frac{1}{r} = \frac{qa^2}{8D(1+\mu)}.$$

对于球面,中点的相应挠度为(原书上卷第 97 頁)

$$\delta_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{qa^4}{16D(1+\mu)}.$$

为了求得边为簡支的板的挠度,必須将此与边为固定的板的挠度[式(96)]相加. 于是我們得中心的挠度为

$$\delta = \frac{qa^4}{64D} + \frac{qa^4}{16D(1+\mu)} = \frac{5+\mu}{64(1+\mu)D}qa^4. \qquad (98)$$

当 $\mu = 0.3$ 时,此挠度为边为固定时的四倍左右.

在計算弯矩时,必須将常数弯矩 $qa^2/8$ 与前面对固定边的情形求得的式(c)和(d)的弯矩相迭加. 于是

$$M_1 = \frac{q}{16}(3+\mu)(a^2 - x^2),$$

$$M_2 = \frac{q}{16}[a^2(3+\mu) - x^2(1+3\mu)].$$

最大弯矩是在中心处,該处

$$M_1 = M_2 = \frac{3+\mu}{16}qa^2.$$

相应的最大应力为

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{3(3+\mu)}{8}\cdot\frac{qa^2}{h^2}. \qquad (99)$$

为了比較边为固定与边为簡支的板其下表面的弯应力 σ_x 和 σ_y,在图 63 中画出了这些应力沿板半径变化的图綫. 从通过点 O 的水平軸起測量縱坐标,我們求得边为固定的板的应力. 将常数值 $3qa^2/4h^2$ 与这些应力相加,也就是从图 63 中通过点 O_1 的水平軸起測量縱坐标,我們求得簡支板的应力. 可見,将边固定可得到較有利的应力状态.

在前面的討論中忽略了剪应变对挠度的影响. 当板厚比起板

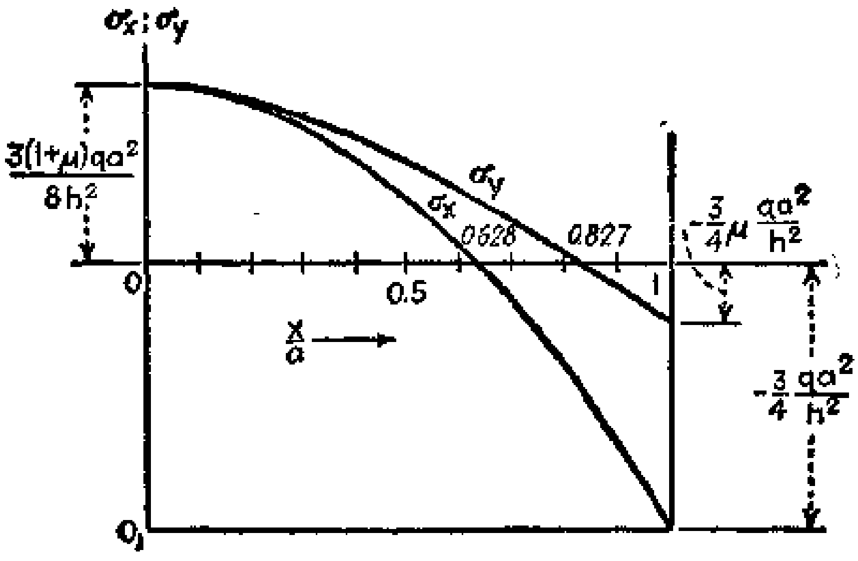


图 63

的半径来不很小时，此影响可能很大，必须加以考虑[1]。由于剪切而引起的附加挠度可用与梁的情形相同的方法求得（参看原书上卷第 170 頁）。对于均布載荷的情形，由式(91)得剪力为

$$V=\frac{qx}{2}.$$

如果我們假設板厚度上剪应力的分布与矩形截面杆的情形相同，則最大剪应力就在中面上，在离板中心 x 处它的大小为

$$\tau=\frac{3}{2}\frac{V}{h}=\frac{3}{4}\frac{qx}{h}.$$

在板中面上的相应剪应变为

$$\gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{3}{4}\frac{qx}{Gh},$$

而由于如图 61 中 $abcd$ 等体元的畸变而引起的附加挠度为

$$\gamma dx=\frac{3}{4}\frac{qxdx}{Gh}.$$

将沿板半径长度的这些挠度相加并考虑到边上挠度为零，得

1) 由于剪切而引起的挠度增大是由 G. M. Russell 通过实验来加以証实的，*Engineering*, vol. 123, p. 343, 1927. 并参看 H. Carrington 的論文，*ibid.*, vol. 125, p. 31, 1928.

$$w_1 = \frac{3}{4}\frac{q}{Gh}\int_x^a x\,dx = \frac{3}{8}\frac{q}{Gh}(a^2 - x^2).$$

为了求得边为固定的板的总挠度，将此与弯矩所引起的挠度［式(95)］相加，得

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - x^2)^2 + \frac{3}{8}\frac{q}{Gh}(a^2 - x^2),$$

或运用式(74)，得

$$w = \frac{q}{64D}\left[(a^2 - x^2)^2 + \frac{4}{1-\mu}h^2(a^2 - x^2)\right]. \qquad (100)$$

中心的挠度为

$$\delta = \frac{qa^4}{64D}\left(1 + \frac{4}{1-\mu}\frac{h^2}{a^2}\right). \qquad (101)$$

对于厚板，表示剪应力影响的括弧内第二项在实用上可能很重要。

上面关于圆板弯曲的理論系基于挠度比起厚度来很小这一假設的。当挠度較大时，必須考虑板中面的伸长。如果这样，就能看出在較大的挠度下，板的刚度变得較上面理論所指出的为大[1]，而挠度不再与載荷成正比。对于边为固定的圆板受均布載荷的情形，此挠度可由下式算得[2]：

$$\delta + 0.58\frac{\delta^3}{h^2} = \frac{qa^4}{64D}, \qquad (102)$$

此与实驗很为符合。

在实际应用中，有时用到受均布載荷的非常薄的板。在这种情形下，弯曲应力比起由于中面伸长而引起的应力来可能很小，而板可看作一弯曲刚度为零的薄膜[3]。受均布載荷的圆膜中点的挠度可由下式求得：

$$\delta = 0.662a\sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}. \qquad (103)$$

---

1) 参看作者的論文，*loc. cit.*, p. 90. 并参看他的 "Theory of Plates and Shells", 1940.

2) *Ibid.*, p. 336.

3) H. Hencky, *Z. Math. u. Phys.*, vol. 63, p. 311, 1915.

在式(102)中 δ 比起包含 δ^3 的这一項来可忽略不計，因此我們得一类似的方程式。对薄膜所作的实験与式(103)很为符合[1]。

§ 20. 变厚度圓板的弯曲. 对于变厚度圓板受均布載荷的情形，厚度随径向距离的变化可足够精确地用下式表示:

$$\frac{h}{h_0}=e^{-\beta x^2/6a^2},$$

式中 h/h_0 为径向距离为 x 处的厚度与中心处的厚度 h_0 之比，而 β 为一常数。图 64 表示在各常数数值 β 下板直径截面的形状。

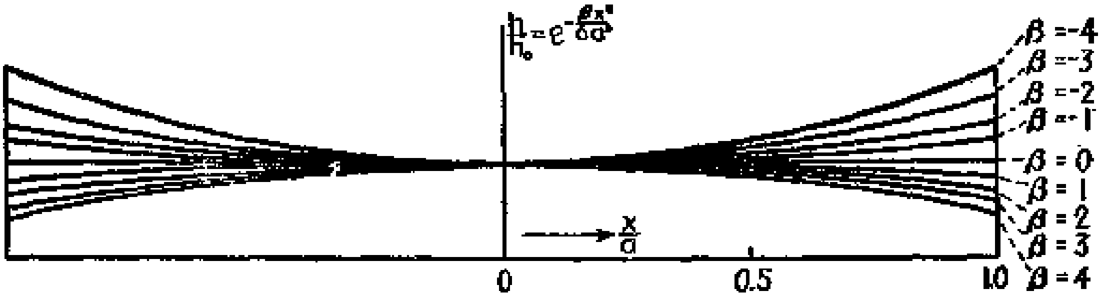


图 64

在离中心的径向距离为 x 处的径向最大弯曲应力 σ_x 可用下式表示:

$$\sigma_x=\gamma\frac{3qa^2}{h_0^2},$$

式中 γ 为一随径向距离 x 而变的系数。对于边为固定的板，此系数的数值[2]可由图 65 中的曲綫得出。对于簡支板，这些数值示于图 66。

1) Bruno Eck, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 7, p. 498, 1927. 关于波形薄膜的資料，可参看 *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, No. 738, 1939.

2) 这些数值載于 O. Pichler 的論文中，Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Berlin, 1928. 关于变厚度圓板弯曲的最近研究是由 Henri Favre 和 Eric Chabloz 所作的，*Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 1, p. 317, 1950, 及 *Bull. tech. Suisse romande*, No. 1, 1952. 并参看 H. Favre 于1952年在伊斯坦布尔国际应用力学会議上发表的論文。

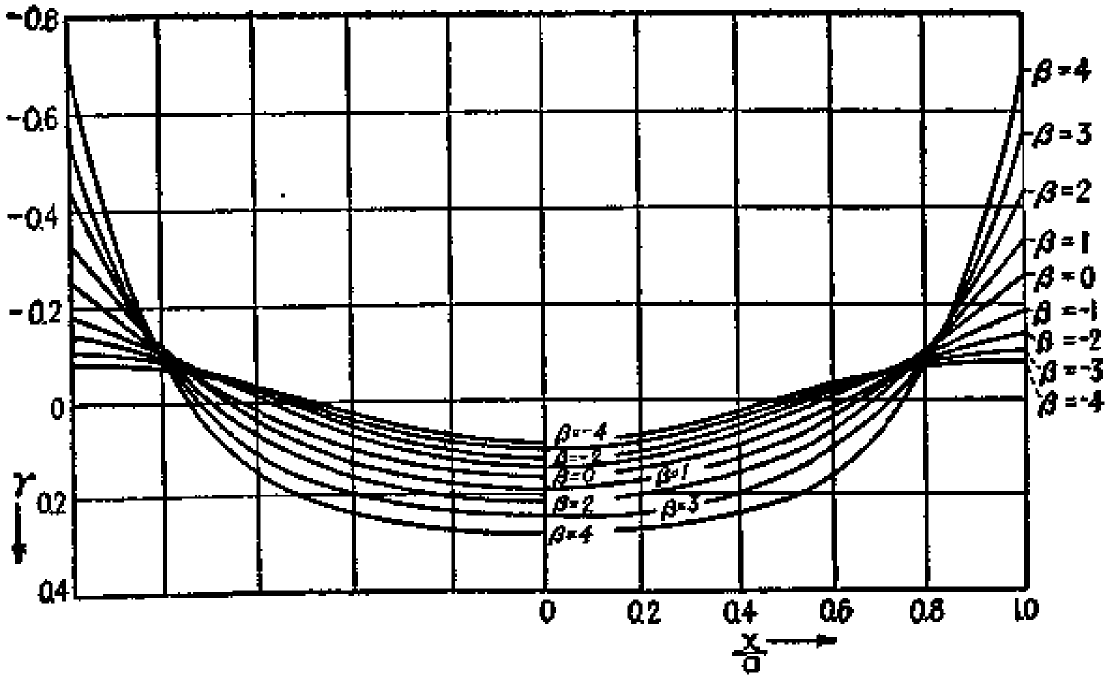


图 65

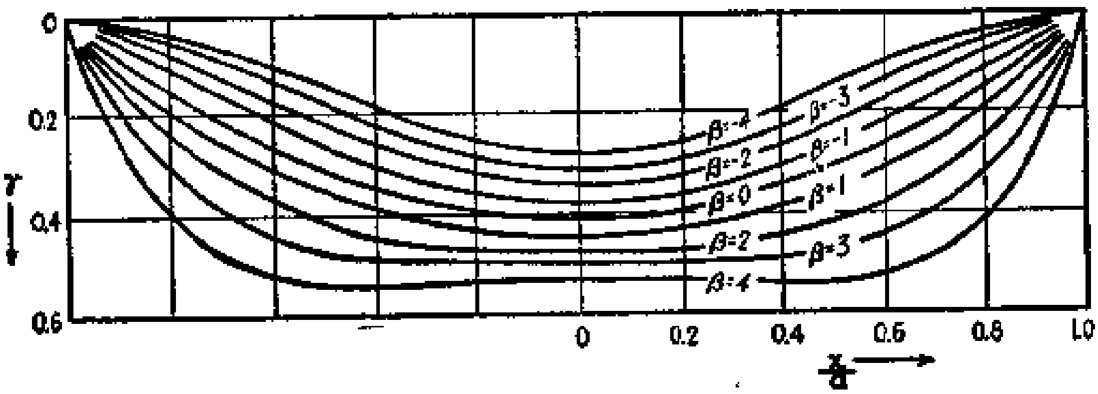


图 66

§ 21. 中心受载荷的圆板的弯曲. **边为固定的板.** 对于此情形,将 $q=0$ 代入式(92),得

$$\varphi=-\frac{Px}{8\pi D}(2\ln x-1)+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x}. \tag{a}$$

积分常数 C_1 和 C_2 由固定边上和板中心处 φ 均等于零这两个条件求得;于是

$$\left[-\frac{Px}{8\pi D}(2\ln x-1)+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x}\right]_{x=0}=0,$$
$$\left[-\frac{Px}{8\pi D}(2\ln x-1)+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x}\right]_{x=a}=0. \tag{b}$$

由于$(x\ln x)_{x=0}=0$，因此由式(b)求得的任意常数之值如下：

$$C_1=\frac{P}{4\pi D}(2\ln a-1);\quad C_2=0, \tag{c}$$

而式(a)变成

$$\varphi=\frac{Px}{4\pi D}\ln\frac{a}{x}. \tag{d}$$

将 $q=0$ 和式(c)中任意常数之值代入式(93)，得挠曲面的方程式如下：

$$w=\frac{Px^2}{8\pi D}\left(\ln\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)+C_3. \tag{e}$$

常数 C_3 由固定边上挠度为零这一条件求得，即 $C_3=Pa^2/16\pi D$。将此值代入式(e)，得

$$w=\frac{Px^2}{8\pi D}\ln\frac{x}{a}+\frac{P}{16\pi D}(a^2-x^2). \tag{f}$$

中点的挠度为

$$\delta=\frac{Pa^2}{16\pi D}. \tag{104}$$

此挠度为同样大小的均布载荷所产生的[参看式(96)]四倍.

弯矩根据式(88)和(89)用式(d)算得，即

$$M_1=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{x}-1\right], \tag{g}$$

$$M_2=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{x}-\mu\right]. \tag{h}$$

在边上($x=a$ 处)，这些力矩变成

$$M_1=-\frac{P}{4\pi};\quad M_2=-\mu\frac{P}{4\pi}; \tag{105}$$

而相应的最大应力为

$$(\sigma_x)_{\max}=\frac{3}{2}\frac{P}{\pi h^2},\quad (\sigma_y)_{\max}=\frac{3\mu}{2}\frac{P}{\pi h^2}. \tag{106}$$

与受均布载荷时的式(97)作一比较可以看出，集中在中心的载荷在板的固定边上所产生的应力为均布在板上的同样大小的载荷所产生的应力的两倍.

在板的中心，由式(g)和(h)得出无限大的弯矩和应力. 此結果是由于載荷集中在一点[1]这一假設而产生的. 如果載荷作为分布在一小圓上，应力就变成有限(参看 96 頁).

在确定中心受載荷的圓板的安全尺寸时，我們可把研究限制在計算板底的最大拉伸弯应力上. 前已指出，式(g)和(h)不适用于此目的，由較詳細的研究[2]知，計算上述拉应力用的合适公式为

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{P}{h^2}(1+\mu)\left(0.485 \ln \frac{a}{h} + 0.52\right). \qquad (107)$$

虽然在載荷高度集中的情形下，板頂的压縮应力可能比板底的拉应力大很多倍. 但是由于它們的高度局限性，它們并不引起直接危險. 如果板底的拉应力保持在安全极限內时，在延性材料中发生的局部屈服將不影响板的一般变形. 由于脆性材料的压縮強度通常比其拉伸強度大很多倍，因此如果板底的拉应力在安全极限內时，由脆性材料制成的板也是安全的.

边为簡支的板. 边为簡支的板的撓度可用迭加法求得. 我們將板中由沿边均布的力矩 $M_1 = P/4\pi$ 所产生的撓度与前面对固定边的情形求得的撓度[式(f)]相迭加，这样就得到了簡支板的情形. 由力矩 $M_1 = P/4\pi$ 所产生的曲率由式(85)求得为

$$\frac{1}{r} = \frac{P}{4\pi(1+\mu)D},$$

而中点的相应撓度为

$$\delta_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D}.$$

將此与式(104)的撓度相加，求得簡支板中点的撓度如下:

$$\delta = \frac{Pa^2}{16\pi D} + \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D} = \frac{Pa^2}{16\pi D}\cdot\frac{3+\mu}{1+\mu}. \qquad (108)$$

此撓度为固定板情形的 2.5 倍左右.

---

1) 集中載荷作用点的局部应力在 H. Hencky 的論文中有討論，Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, Darmstadt, p. 54, 1913. 并参看 A. Nadai, Elastische Platten, p. 97, 1925.

2) 此問題在作者的"Theory of Plates and Shells" (p. 75, 1940)一书中有討論.

将 $P/4\pi$ 与上面对固定板求得的式(g)和(h)的力矩相加，得弯矩的表达式. 将$(6/h^2)(P/4\pi)$与由公式(107)算得的应力相加，得最大拉应力.

§ 22. 受集中載荷的圓板的弯曲. 我們从載荷沿半径为 b 的圆均匀分布的情形（图 67）开始. 这时我們分开研究板在此圓里面的部分和在此圓外面的部分. 对于每一部分均用通式(93)，$q=0$ 适合于两部分而 $P=0$ 只适合于里面部分. 确定任意常数时应使其在圓 $x=b$ 处滿足連續条件[1]. 以 P 表示总載荷，得下列結果[2]:

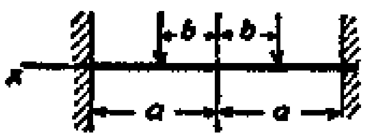


图 67

固定边. 对于里面部分$(x<b)$，

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-(x^2+b^2)\ln\frac{a}{b}+(x^2-b^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(a^2-x^2)\right]. \qquad \text{(a)}$$

对于外面部分$(x>b)$，

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-(x^2+b^2)\ln\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(a^2-x^2)\right]. \qquad \text{(b)}$$

圓支边. 对于里面部分$(x<b)$，

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-(x^2+b^2)\ln\frac{a}{b}+(x^2-b^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{(3+\mu)a^2-(1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2}(a^2-x^2)\right]. \qquad \text{(c)}$$

对于外面部分$(x>b)$，

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[-(x^2+b^2)\ln\frac{a}{x}+\right.$$
$$\left.+\frac{(3+\mu)a^2-(1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2}(a^2-x^2)\right]. \qquad \text{(d)}$$

---

1) 引起圓 $x=b$ 处的斜率不連續的剪应力影响这时忽略不計;参看 G. A. Garabedian 的論文，*J. École polytechnique*, 2e Ser., C, No. 26, 1927.

2) 参看 St.-Venant 譯自 Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper (Paris) 一书的第 45 节的注解.

运用这些方程式以及迭加法就可解圆板受中心对称载荷时的弯曲的任何其他情形. 例如，研究图 68 所示的情形，这时载荷均匀分布于板上由半径为 c 的圆所包围的里面部分. 将 $P=2\pi bqdb$ 代入式(a)，我們求得由图所示的环形载荷元在板中心产生的撓度：

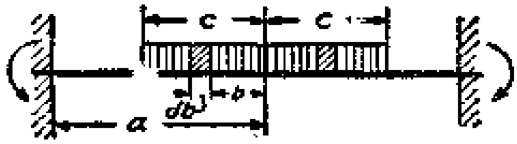


图 68

$$dw=\frac{q}{4D}\left[-b^2\ln\frac{a}{b}-b^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]bdb. \tag{e}$$

于是由整个载荷在板中心产生的撓度为

$$\delta=\int_0^c dw=\frac{q}{4D}\int_0^c\left[-b^2\ln\frac{a}{b}-b^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]bdb$$

$$=\frac{q}{4D}\left[-\frac{c^4}{4}\ln\frac{a}{c}-\frac{3}{16}c^4+\frac{a^2c^2}{4}\right]. \tag{109}$$

如 $c=a$，此式就与适用于受均布载荷的板的式(96)一致. 将 $c=0$ 和 $\pi c^2q=P$ 代入式(109)，我們得到适用于由集中載荷所产生的撓度的式(104).

为了确定板中心处的弯矩和应力，我們計算式(a)对 x 的二阶导数. 在此导数中令 $x=0$ 和 $P=2\pi bqdb$，由环形载荷元(图 68)在中心产生的曲率变成

$$\frac{q}{4D}\left(-2\ln\frac{a}{b}+1-\frac{b^2}{a^2}\right)bdb.$$

于是由整个载荷在中心产生的曲率为

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0}=\frac{q}{4D}\int_0^c\left(-2\ln\frac{a}{b}+1-\frac{b^2}{a^2}\right)bdb$$

$$=-\frac{qc^2}{4D}\left(\ln\frac{a}{c}+\frac{c^2}{4a^2}\right). \tag{110}$$

由式(83)和(84)得中心的相应弯矩为

$$M_1=M_2=-D(1+\mu)\frac{d^2w}{dx^2}=$$

$$=\frac{1+\mu}{4}qc^2\left(\ln\frac{a}{c}+\frac{c^2}{4a^2}\right), \tag{111}$$

而中心处的最大弯应力则为

$$(\sigma_x)_{max} = (\sigma_y)_{max} =$$

$$= \frac{3}{2}(1+\mu)\frac{qc^2}{h^2}\left(\ln\frac{a}{c}+\frac{c^2}{4a^2}\right). \qquad (112)$$

对整个載荷 $\pi c^2 q$ 用記号 P，此式变成

$$(\sigma_x)_{max} = (\sigma_y)_{max} =$$

$$= \frac{3}{2}(1+\mu)\frac{P}{\pi h^2}\left(\ln\frac{a}{c}+\frac{c^2}{4a^2}\right). \qquad (113)$$

減小上面有載荷分布的圓的半径 c，我們就接近于集中載荷的情形。中心的应力随 c 的減小而增大，但只要 c 为有限它就保持为有限。

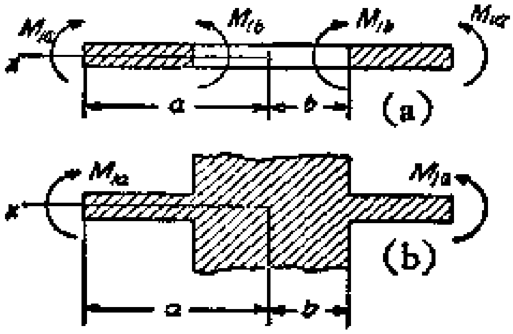


图 69

§ 23. 中心有一圓孔的圓板受对称載荷时的撓曲．由力偶引起的弯曲． 我們以 M_{1a} 和 M_{1b} 分别表示外边和內边单位长度內的弯矩(图69a)。对此情形，我們有 $P=q=0$，而由式(92)和(93)得

$$\varphi = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \qquad (a)$$

$$w = -\frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln\frac{x}{a} + C_3. \qquad (b)$$

任意常数 C_1, C_2 和 C_3 現在可由边上的条件确定．将式(a)代入式(88)，得

$$M_1 = D\left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2} + \mu\left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2}\right)\right]. \qquad (c)$$

将 $x=a$ 及 $x=b$ 代入，得下列用以确定 C_1 和 C_2 的两个方程式：

$$D\left[\frac{C_1}{2}(1+\mu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\mu)\right] = M_{1a},$$

$$D\left[\frac{C_1}{2}(1+\mu) - \frac{C_2}{b^2}(1-\mu)\right] = M_{1b},$$

从而得

$$C_1=\frac{2(a^2M_{1a}-b^2M_{1b})}{(1+\mu)D(a^2-b^2)};\quad C_2=\frac{a^2b^2(M_{1a}-M_{1b})}{(1-\mu)D(a^2-b^2)}. \tag{d}$$

常数 C_3 由考虑板的挠度而确定．例如，設板的外边为簡支，于是在此边上的挠度为零，而 C_3 可由式(b)算得．当 $x=a$，它变成

$$-\frac{C_1a^2}{4}+C_3=0,$$

因此

$$C_3=\frac{a^2}{4}C_1.$$

现在将 C_1, C_2 和 C_3 代入式(b)就可求得板的挠曲面．

我們来研究当內边为固定时板由力偶 M_{1a} 引起弯曲的情形(图 69b) 作为第二个例子．这时式(a)中的任意常数 C_1 和 C_2 由 $x=b$ 时 $\varphi=0$ 和 $x=a$ 时 $M_1=M_{1a}$ 这两个条件来确定．于是由式(a)和(c)得

$$\frac{C_1b}{2}+\frac{C_2}{b}=0,$$

$$\frac{C_1}{2}(1+\mu)-\frac{C_2}{a^2}(1-\mu)=\frac{M_{1a}}{D},$$

因而我們得

$$C_1=\frac{2a^2M_{1a}}{D[a^2(1+\mu)+b^2(1-\mu)]},$$

$$C_2=-\frac{a^2b^2M_{1a}}{D[a^2(1+\mu)+b^2(1-\mu)]}.$$

将这些值代入式(a)和(c)，得

$$\varphi=\frac{a^2M_{1a}}{D[a^2(1+\mu)+b^2(1-\mu)]}\left(x-\frac{b^2}{x}\right), \tag{e}$$

$$M_1=\frac{a^2M_{1a}}{a^2(1+\mu)+b^2(1-\mu)}\left[1+\mu+(1-\mu)\frac{b^2}{x^2}\right]. \tag{f}$$

由沿內边和外边均匀分布的載荷所引起的弯曲． 如弯曲是由沿边均匀分布的載荷所引起(图 70a)，则 $q=0$ 而 P 等于內边上的总載荷．将这些值代入式(92)和(93)．于是由式(92)得

$$\varphi = -\frac{Px}{8\pi D}(2\ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}. \tag{g}$$

积分常数 C_1 和 C_2 由边上的条件来确定．例如，如板边为固定(图 70b)，任意常数就由 $x=a$ 和 $x=b$ 时 $\varphi=0$ 这两个条件来确定．于是，由式(g)得，

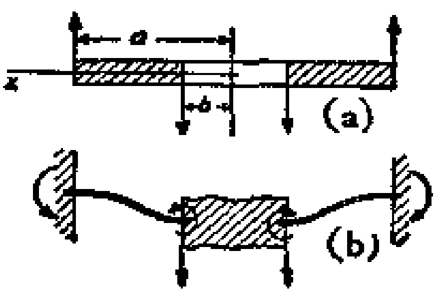


图 70

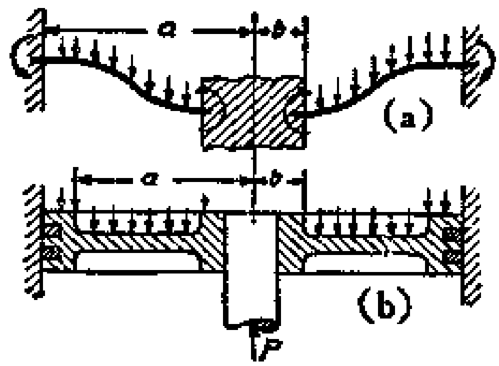


图 71

$$-\frac{Pa}{8\pi D}(2\ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0,$$

$$-\frac{Pb}{8\pi D}(2\ln b - 1) + \frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} = 0.$$

由这些方程式算得 C_1 和 C_2，并将其代入式(g)可得 φ 的表达式．于是弯矩可由式(88)和(89)算得．

如果板上作用有均布载荷，而非沿边分布的载荷(如图 71a 所示)，则离中心的距离为 x 的任何点上的剪力 V 为

$$V = \frac{1}{2\pi x}\pi q(x^2 - b^2) = \frac{qx}{2} - \frac{qb^2}{2x}.$$

必须将此值代入式(90)，于是式(92)和(93)变成

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} + \frac{qb^2 x}{8D}(2\ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x},$$

$$w = \frac{qx^4}{64D} - \frac{b^2 q x^2}{8D}(\ln x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3.$$

在确定任意常数时，必须运用边上的条件． 例如，如板边为固定，则用以确定 C_1 和 C_2 的方程式为

$$-\frac{qa^3}{16D} + \frac{qab^2}{8D}(2\ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0,$$

$$-\frac{qb^3}{16D}+\frac{qb^3}{8D}(2\ln b-1)+\frac{C_1b}{2}+\frac{C_2}{b}=0.$$

将本节所討論的解結合应用，就可求得如蒸汽机活塞的弯曲及汽缸与管件凸緣弯曲[1]之类問題的解．例如，結合(70b)和(71a)所示的情形，就可求得关于活塞由于蒸汽压力而发生弯曲(图71b)的問題的近似解[2]．

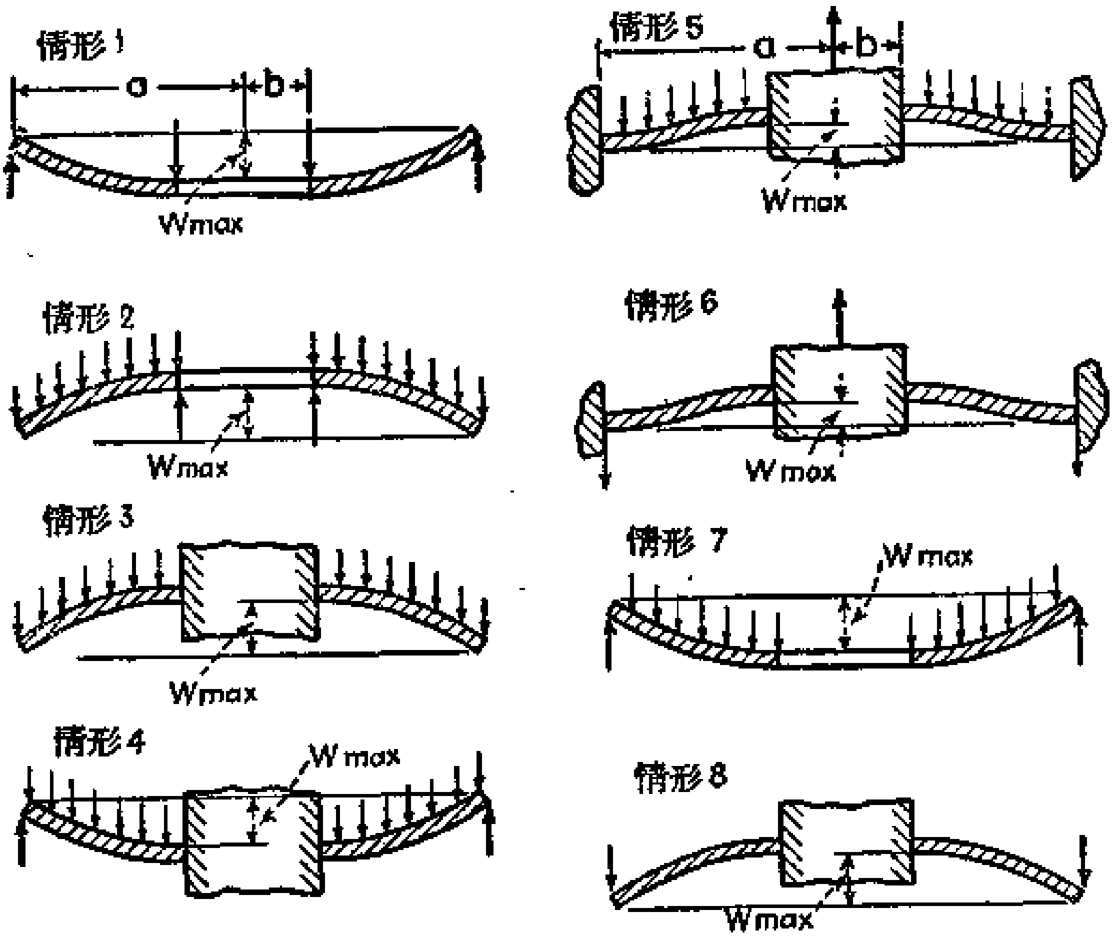


图 72

1) 參看 Everett O. Waters 和 J. Hall Taylor 的論文，*Trans. A. S. M. E.*, 1927.

2) 屬于此类的一些問題在 M. Ensslin 的論文中有研究，*Dinglers Polytech. J.*, 1903 和 1904，并參看 Pfleiderer, *Forschungsarb.*, No. 97, 1911. 对活塞所作的实驗在 C. Codron 的論文中有說明，*Revue de mécanique*, vol. 13, p. 340, 1903. M. Schilhansl 曾討論了用肋加強的圓板，*Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 6, p. 484, 1926，及 *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 71, p. 1154, 1927. 关于圓板的深入研討載于作者的"Theory of Plates and Shells"(1940)中．

在图 72 中列出在实用上很重要的一些情形[1]. 在所有这些情形下，最大应力均可用下列形式的公式之一表示：

$$\sigma_{\max}=k\frac{qa^2}{h^2} \text{ 或 } \sigma_{\max}=\frac{kP}{h^2}, \tag{114}$$

根据施加的载荷是在表面上均布还是沿边集中而定. 表 5 列出了当泊桑比 $\mu=0.3$ 时对比值 a/b 的一些数值算得的系数 k 的数值. 在同样情形下，最大挠度可由下列形式的公式表示：

$$w_{\max}=k_1\cdot\frac{qa^4}{Eh^3} \text{ 或 } w_{\max}=k_1\cdot\frac{Pa^2}{Eh^3}. \tag{115}$$

数字系数 k_1 也列于表 5 中[2].

表 5　在图 72 所示的八种情形下式(114)和(115)中的系数 k 和 k_1

a/b	1.25		1.5		2		3		4		5	
情形	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1.10	0.341	1.26	0.519	1.48	0.672	1.88	0.734	2.17	0.724	2.34	0.704
2	0.66	0.202	1.19	0.491	2.04	0.902	3.34	1.220	4.30	1.300	5.10	1.310
3	0.135	0.00231	0.410	0.0183	1.04	0.0938	2.15	0.293	2.99	0.448	3.69	0.564
4	0.122	0.00343	0.336	0.0313	0.74	0.1250	1.21	0.291	1.45	0.417	1.59	0.492
5	0.090	0.00077	0.273	0.0062	0.71	0.0329	1.54	0.110	2.23	0.179	2.80	0.234
6	0.115	0.00129	0.220	0.0064	0.405	0.0237	0.703	0.062	0.933	0.092	1.13	0.114
7	0.592	0.184	0.976	0.414	1.440	0.664	1.880	0.824	2.08	0.830	2.19	0.813
8	0.227	0.00510	0.428	0.0249	0.753	0.0877	1.205	0.209	1.514	0.293	1.745	0.350

§24. 矩形板的弯曲.

矩形板的弯曲理論較圓板复杂，因此下面只給出关于弯矩和挠度的一些最后結果[3]. 在推导这些結果时，設挠度比起板厚来很小，而在弯曲时各边可在板平面內自由移动，即无应力作用在板的中面內.

边为简支的板. 对于受均布載荷 q 的情形，最大挠度发生在

1) 参看 A. M. Wahl 和 G. Lobo 的論文，*Trans. A.S.M.E.*, vol. 52, 1929.

2) 关于受对称載荷的圓板較完备的資料，可参看 W. E. Trumpler 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 10, p. 173, 1943.

3) 关于矩形板弯曲的較完备的討論載于作者的 "Theory of Plates and Shells" (New York, 1940) 一书中.

板的中心(图 73),它可用下式表示:

$$\delta = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}, \tag{116}$$

式中 a 为板的短边, h 为板厚而 α 为决定于比值 b/a 的数字系数. 同前面一样, 我們用符号 M_1 和 M_2 分别表示平行于 y 軸和 x 軸的截面上单位长度內的弯矩. 发生在板中心的最大弯矩为

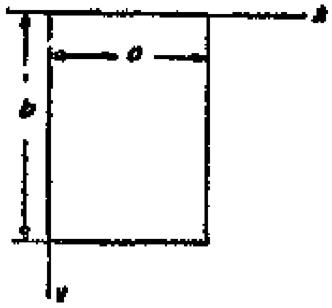


图 73

$$(M_1)_{\max} = \beta_1 qa^2; \quad (M_2)_{\max} = \beta_2 qa^2, \tag{117}$$

式中 β_2 和 β_2 表示决定于比值 b/a 的数字系数. 表 6 列出了系数 α, β_1 和 β_2 的一些数値. 这些数値是根据泊桑比等于 0.3 这一假設算得的. 从表 6 可以看出,当 $b/a > 3$ 时, 最大挠度和最大弯矩与在 $b/a = \infty$ 时算得的相差不大. 这就是說, 对于长矩形板 ($b/a > 3$)可忽略短边的影响,而可足够精确地应用 §§ 13—15 中对弯成圓柱面的情形导出的公式.

表 6 受均布載荷的簡支边矩形板的常数

b/a	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
α	0.0443	0.0530	0.0616	0.0697	0.0770	0.0843	0.0906	0.0964
β_1	0.0479	0.0553	0.0626	0.0693	0.0753	0.0812	0.0862	0.0908
β_2	0.0479	0.0494	0.0501	0.0504	0.0506	0.0500	0.0493	0.0486
b/a	1.8	1.9	2.0	3.0	4.0	5.0	∞	
α	0.1017	0.1064	0.1106	0.1336	0.1400	0.1416	0.1422	
β_1	0.0948	0.0985	0.1017	0.1189	0.1235	0.1246	0.1250	
β_2	0.0479	0.0471	0.0464	0.0404	0.0384	0.0375	0.0375	

边为固定的板. 最大撓度发生在板的中心,它可用对边为簡支的板所用过的同一方程(116)来表示. 数値最大的弯矩发生在长边的中点,它可用下式表示:

$$|M_1|_{\max} = \beta qa^2. \tag{118}$$

表 7 列出了系数 α 和 β 的一些数値.

表 7　受均布載荷的固定边矩形板的常数

b/a	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	∞
α	0.0138	0.0199	0.0240	0.0264	0.0277	0.0284
β	0.0513	0.0665	0.0757	0.0806	0.0829	0.0833

表 7 中的数值表明，将板边固定可大大减小最大撓度．并且，将边固定对最大弯应力的影响并不很大．此外还可以看出，对于固定边的情形，当 $b/a=2$ 时最大撓度和最大弯矩与在 $b/a=\infty$ 时求得的接近相等．这一点証实了 §14 中对弯成圆柱面的情形所得的結果可以用于計算較长的固定边矩形板($b/a \geqslant 2$)．

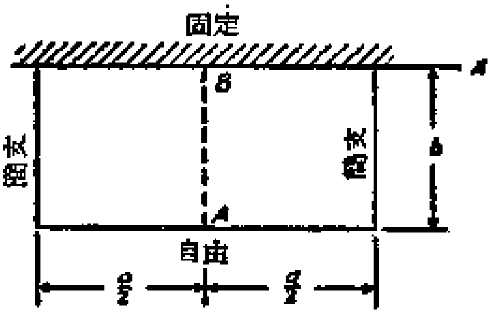


图　74

两个对边为简支，第三边为固定而第四边为自由的板（图 74）． 对于受均布載荷的情形，最大撓度是在自由边的中点 A 处．此撓度可用下式表示：

$$\delta=\alpha\frac{qb^4}{Eh^3}. \tag{119}$$

表 8 列出了此式中数字系数 α 的数值．最大弯矩 M_1 也发生在点 A 处，其大小由下式表示：

$$(M_1)_{max}=\beta_1 qa^2. \tag{120}$$

数值最大的弯矩 M_2 发生在点 B 处，即固定边的中点处，它由下式表示：

$$(M_2)_{max}=\beta_1 qb^2. \tag{121}$$

表 8 列出了系数 β_1 和 β_2 的一些数值．从表中可以看出，当 a 比

表 8　图 74 所示的受均布載荷矩形板的常数

b/a	0	1/3	1/2	2/3	1
α	1.37	1.03	0.635	0.366	0.123
β_1	0	0.0078	0.0293	0.0558	0.0972
β_2	0.500	0.428	0.319	0.227	0.119

起 b 来很大时，中間小条 AB 接近于在点 B 固定的悬臂受均布載荷的情形.

具有許多等距支点的受均布載荷的板（图 75）. 这时在如下所述的支点附近，我們能求得很好近似的最大应力和应力分布：板上由半径为 $a = 0.22c$（此处 c 为支点間距离）的圓所包围的支点附近这部分可看作外边为簡支、内边承受向上作用的載荷 $P = qc^2$，并承受強度为 q 而向下作用的均布載荷的圓板. 图 75b 表示这种受載情形[1]. 此問題可用 § 23 中所推演的方法来解.

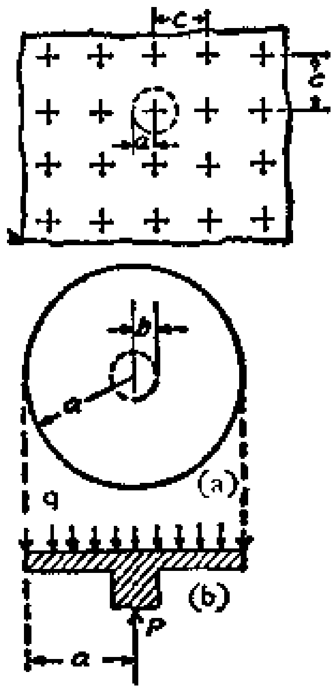


图 75

弹性基础上矩形板的弯曲与混凝土道路中应力分析的关系已由韦斯脱加德（H. M. Westergaard）作了討論[2].

§ 25. 承受内压的薄壁容器. 本节将局限于研究具有迴轉面形状而承受強度为 p 的連續内压的容器，此連續内压不一定要均匀分布但須对迴轉軸綫 $O-O$ 对称（图 76）. 如果壁厚比起曲率半径来很小，并在經綫中无突然弯折等不連續性时，則計算应力时就可足够精确地忽略容器壁的弯曲，即假設壁中的拉应力在厚度上均匀分布[3]. 于是应力的大小不难由静力学方程式算得.

我們来研究用两个經綫截面 mn 和 sq 及两个垂直于經綫的截面 ms 和 nq 从容器壁上切下的体元 $mnsq$. 由对称条件可以看

1) 参看 H. M. Westergaard 和 A. Slater 的論文，*Proc. Am. Concrete Inst.*, vol. 17, 1921. 并参看 V. Lewe, Die strenge Lösung des Pilzdecken-problems, Berlin, 1922.

2) 参看他的論文，*Ingeniøren*, Copenhagen, p. 513, 1923, 以及 *Public Roads*, vol. 7, p. 25, 1926. 并参看作者的 "Theory of Plates and Shells", 1940.

3) 不能抗弯的薄壳有时称为薄膜，忽略弯曲而算得的应力則称为薄膜应力. 設沿壳边均匀分布的外力与經綫相切.

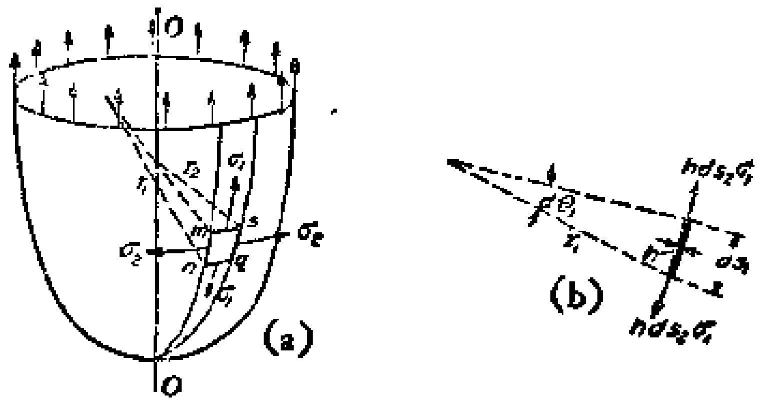


图 76

出，只有正应力作用在此体元的各面上．我們要用到的符号如下：

σ_1 = 在經綫方向的拉应力，或称**經綫应力**，

σ_2 = 沿平行圓周的拉应力，或称**圓周应力**，

h = 壳的等厚度，

ds_1 = 体元在經綫方向的尺寸，

ds_2 = 体元在平行圓周方向的尺寸，

r_1 = 經綫的曲率半径，

r_2 = 取为垂直于經綫的截面的曲率半径．

于是作用在体元表面上的总拉力为 $h\sigma_1 ds_2$ 和 $h\sigma_2 ds_1$．作用在体元的 ms 和 nq 两面上的拉力 $h\sigma_1 ds_2$ 在垂直于体元方向的分力等于(参看图 76b)：

$$h\sigma_1 ds_2 d\theta_1 = \frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1}. \tag{a}$$

同样，作用在 mn 和 sq 两面上的拉力的法向分力为

$$h\sigma_2 ds_1 d\theta_2 = \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2}. \tag{b}$$

这些法向分力之和与体元上的法向压力相平衡；因此

$$\frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1} + \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2} = p ds_1 ds_2 \tag{c}$$

或

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{h}. \tag{122}$$

現在来討論此式的一些应用．

受均布內压的球形容器. 这时 $r_1 = r_2 = r$ 和 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. 式(122)变成

$$\sigma = \frac{pr}{2h}.$$

圓錐形桶. 我們来研究一盛着液体的开式圓錐形桶(图77). 这时經綫曲率 $1/r_1 = 0$，由液体压力所产生的圓周应力 σ_2 可由式(122)算得. 离液体表面的距离为 $d - y$ 的平面 $m-n$ 上那些点处的內压力为

$$p = \gamma(d - y),$$

式中 γ 为单位体积液体的重量. 在这些点上曲率半径 r_2 为

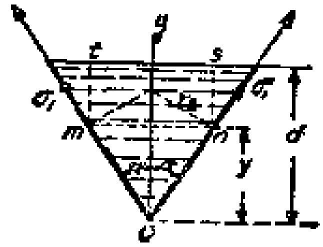


图 77

$$r_2 = \frac{y\tan\alpha}{\cos\alpha}.$$

于是式(122)变成

$$\sigma_2 \frac{\cos\alpha}{y\tan\alpha} = \frac{\gamma(d - y)}{h},$$

从而得

$$\sigma_2 = \frac{\gamma(d - y)}{h}\,\frac{y\tan\alpha}{\cos\alpha}. \tag{d}$$

此应力的最大値发生在乘积 $(d - y)y$ 最大的点上. 如果我們令 $(d - y)y$ 的导数等于零,則得 $y = d/2$，而此点的应力則为

$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{\gamma d^2}{4h}\,\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}. \tag{e}$$

在水平面 $m-n$ 处的应力 σ_1 可由壳中經綫拉力的鉛直分量支持体积为 $tmOns$ 的液体重量这一条件求得(图 77)；因此

$$2\pi y(\tan\alpha)h\sigma_1\cos\alpha = \pi y^2(\tan^2\alpha)\left(d - y + \frac{1}{3}y\right)\gamma,$$

从而得

$$\sigma_1 = \frac{y(\tan\alpha)\left(d - \frac{2}{3}y\right)\gamma}{2h\cos\alpha}. \tag{f}$$

当 $y=\frac{3}{4}d$ 时，此应力最大．将此值代入式(f)，得

$$(\sigma_1)_{max}=\frac{3}{16}\frac{d^2\gamma}{h}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}. \tag{g}$$

式(d)和(f)表示当槽壁中的弯应力可忽略不計时問題的完全解.

对于直径为 d 的圓筒壳承受均布压力 p 的情形，以前(参看原书上卷第 45 頁)我們已求得

$$\sigma_1=\frac{pd}{4h};\quad \sigma_2=\frac{pd}{2h}.$$

习　　題

1. 在图 78 的桶中盛有液体，液体的水平面如图所示．試确定桶的圓筒部分和球形部分的最大应力 σ_1 和 σ_2 以及加固环 mn 中的压縮力.

解． 容器中的液体重量为

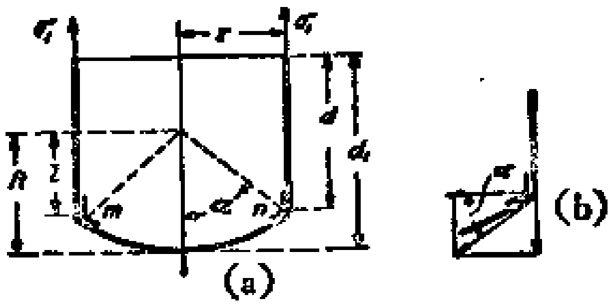


图　78

$$Q=\left[\pi dr^2+\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2l+\frac{l^3}{3}\right)\right]\gamma.$$

对于桶的圓筒部分，

$$\sigma_1=\frac{Q}{2\pi rh}=\text{常数 和 }(\sigma_2)_{max}=\frac{d\gamma r}{h}.$$

对于桶的球形部分，最大应力是在底部，該处液体压力为 γd_1 而 $\sigma_1=\sigma_2=\gamma d_1R/2h$. 在桶的球形部分，环 mn 单位长度內的拉力为 $Q/(2\pi r\sin\alpha)$．此力的径向分量使环受压縮（图 78b），其大小为 $(Q/2\pi r)\cot\alpha$，而环中的压縮力則为 $(Q/2\pi)\cot\alpha$．此仅为根据

圓筒部分和球形部分均为只能抗拉的薄膜这一假設而得的近似値．計算环中的压縮应力时，必須将圓筒壳和球形壳的毗連部分加于环 mn 本身的截面上．

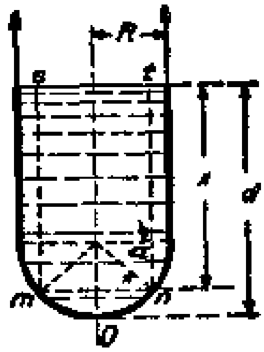


图 79

2. 有一底为半球形的圓柱桶，桶中所盛液体的水平面如图 79 所示，試确定 mn 处各点的应力．

解． 根据式(122)，在球形部分离液体表面的距离为 x 的任何点上，我們得

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{R}=\frac{\gamma x}{h}. \tag{h}$$

由于沿截面 mn 的經綫应力支持了体积为 $smOnt$ 的液体重量，因此第二个方程式为

$$\sigma_1=\frac{\gamma R}{h}\left(\frac{d-R}{2}+\frac{R}{3}\frac{1-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right), \tag{i}$$

而式(h)变成

$$\sigma_2=\frac{\gamma R}{h}\left(\frac{d-R}{2}+\frac{R}{3}\frac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}\right).$$

3. 在图 80 中，为了使环 mn 只承受鉛直压力，試确定桶的外

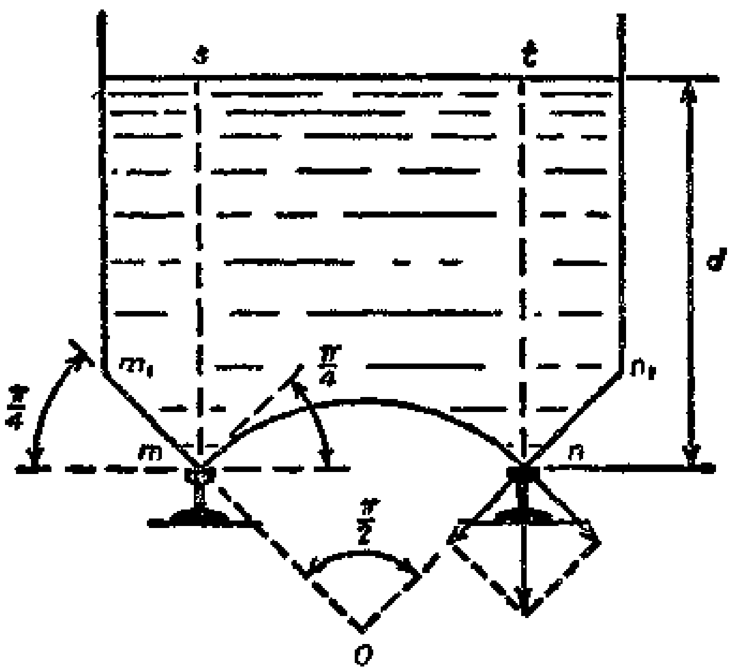


图 80

径、支持环 mn 的直径与液体深度 d 之間的关系. 桶底的中部为一中心角为 $\pi/2$ 的球面. 圆錐部分 mm_1nn_1 也具有同一角度.

提示. 所需的关系可由环上来自傾角各为 45° 的球形底面和圆錐側面的压力无水平分量这一条件求得. 由此得出，在表面 $mstn$ 内的液体体积必須等于在此表面外的体积.

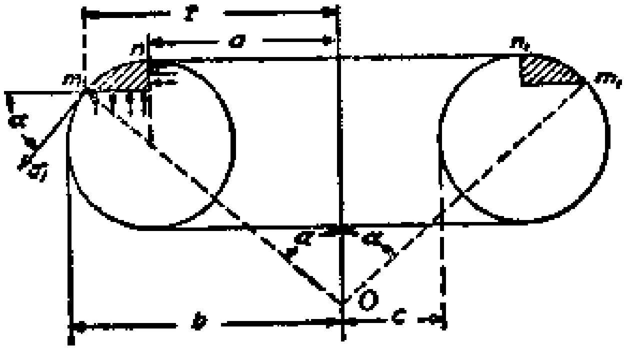


图 81

4. 試确定图 78 所示的桶中的最大应力，如果 $R=10$ 呎，$r=8$ 呎，$d=20$ 呎，$\gamma=62.5$ 磅/呎³和 $h=1/4$ 吋.

5. 試确定承受均布内压 p 的圆环壁中的应力 σ_1 和 σ_2（图 81）.

解. 由对于用半径为 a 的鉛直圆柱面和圆錐面 mOm_1 从容器上切下的 mnm_1n_1 这部分上鉛直力的平衡条件得:

$$\pi(r^2-a^2)p-\sigma_1 h2\pi r\sin\alpha=0,$$

从而得

$$\sigma_1=\frac{p(r^2-a^2)}{2rh\sin\alpha}.$$

应力 σ_2 現在可由式(122)算得.

6. 試确定图 81 所示的容器壁中的最大应力，如果 $a=10$ 呎，$b=12$ 呎，$h=1/4$ 吋和 $p=50$ 磅/吋².

7. 有一具有等厚度 h 的球形顶（图 82）承受其本身的单位面积重量 q. 試求經綫方向的以及垂直于經綫的应力.

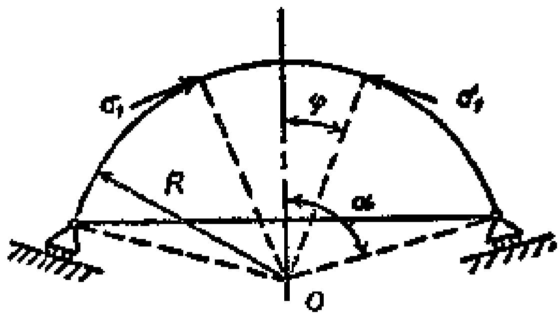


图 82

答.

$$\sigma_1=-\frac{qR}{h(1+\cos\varphi)},$$

$$\sigma_2=\frac{qR}{h}\left(\frac{1}{1+\cos\varphi}-\cos\varphi\right).$$

8. 試解上題，如果移去球形頂的上部(图83)，而在上边施加一单位长度內为 P 的均布載荷.

答.

$$\sigma_1=-\frac{qR(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}{h\sin^2\varphi}-\frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi},$$

$$\sigma_2=\frac{qR}{h}\left(\frac{\cos\varphi_0-\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-\cos\varphi\right)+\frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi}.$$

9. 有一沿水平圓 AA 支承的球形桶（图84）装滿比重为 γ 的液体. 試求 σ_1 和 σ_2.

答. 如 $\varphi<\alpha$，則

$$\sigma_1=\frac{\gamma R^2}{6h}\left(1-\frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right),$$

$$\sigma_2=\frac{\gamma R^2}{6h}\left(5-6\cos\varphi+\frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right).$$

如 $\varphi>\alpha$，則

$$\sigma_1=\frac{\gamma R^2}{6h}\left(5+\frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right),$$

$$\sigma_2=\frac{\gamma R^2}{6h}\left(1-6\cos\varphi-\frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right).$$

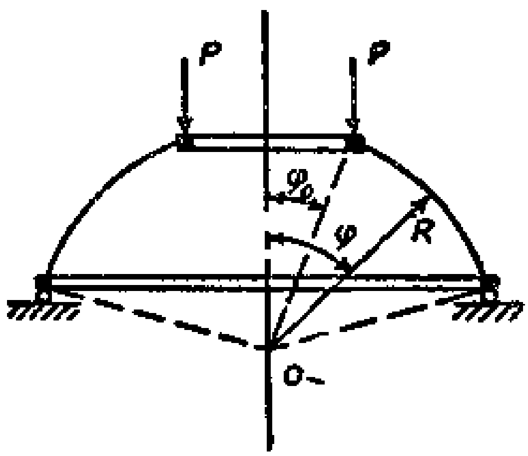


图 83

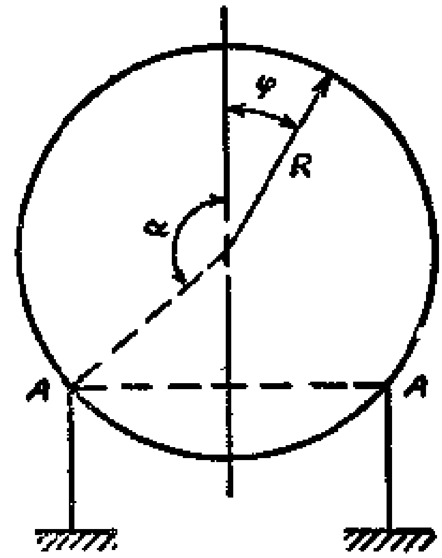


图 84

§ 26. **薄壁容器中的局部弯曲应力.** 在前节中忽略了容器壁的弯曲，而只考虑称作**薄膜应力**的拉应力. 由薄膜应力所引起的位移使壁发生弯曲，因此而生的弯曲应力在实用上可能很重要，特别是在經綫的不連續点上. 如果經綫是由在連接点互不相切的曲綫所組成，为了防止容器壁发生很大的弯曲，就需要有如图 78 所示的加固环.

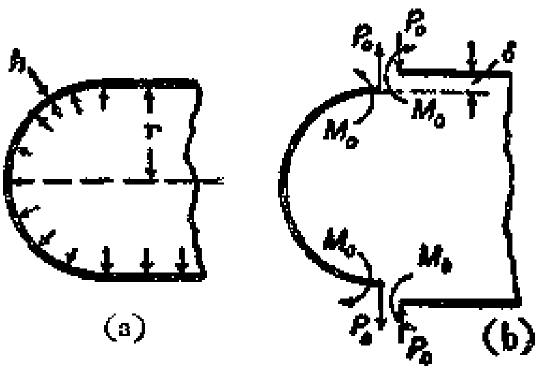


图 85

在由彼此相切的若干曲綫所組成的經綫中，在連接点上应力也可能变得非常高. 在这种点上产生的附加应力称为**不連續应力**. 現在来对两端为半球形的圓筒形容器承受均布內压作用的簡单情形（图 85）說明这些应力的計算方法. 我們首先只研究薄膜应力，而对圓筒部分求得

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h}; \quad \sigma_2 = \frac{pr}{h}, \tag{a}$$

式中 r 为圓筒和半球的半径而 h 为壁厚. 对于球形部分，

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pr}{2h}.$$

圓筒部分和球形部分的相应径向位移各为

$$\frac{r}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = \frac{pr^2}{2hE}(2-\mu) \text{ 和 } \frac{pr^2}{2hE}(1-\mu).$$

如将容器的球形部分和圓筒部分分开（图 85b），則由于薄膜应力所引起的变形而造成的半径差将为

$$\delta = \frac{pr^2}{2hE}. \tag{b}$$

在眞实容器中，头部和筒体在接合处由于容器中面单位周长內的剪力 P_0 和弯矩 M_0（图 85b）而保持在一起. 这些力使容器的邻近部分发生弯曲. 在討論圓筒部分的弯曲时，研究微条的弯曲（图 86）就可以了，因为变形对称于軸綫而此小条将在經綫平面內发生撓曲. 为了簡化起見，設小条具有单位寬度. 如 y 表示小条任意

截面处的径向位移，則在此截面处圓筒的半径縮短了 y，結果在圓周方向出現一大小为 y/r 的压縮应变．相应的压縮应力为 Ey/r．于是当小条向圓筒軸綫撓曲时，产生了侧向压縮力 T（图 86c），其在小条单位长度內的大小为

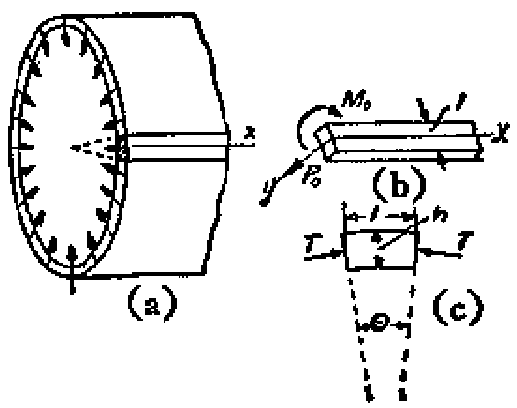


图 86

$$T=\frac{Ey}{r}h. \tag{c}$$

由于角 θ 等于 $1/r$，因此这些力具有一径向合力如下：

$$\frac{Eyh}{r}\theta=\frac{Eyh}{r^2}, \tag{d}$$

它反抗小条的撓曲．（設角 θ 很小．）这些反力分布在小条上并与撓度 y 成正比，因此对于弯曲而言，小条与在 $k=Eh/r^2$ 的弹性基础上的梁的情形相同[1]（§1）．由于与板中的情形相似（参看第68頁），邻近的小条可防止此小条的截面形狀作任何改变，因此对于其弯曲刚度可应用 $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$．于是小条撓度曲綫的微分方程式为［参看式(1)］

$$D\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{Eh}{r^2}y.$$

同前面一样，引用記号

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{Eh}{4Dr^2}}=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}}, \tag{123}$$

小条的撓度曲綫变成［参看式(11)］

$$y=\frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3D}[P_0\cos\beta x-\beta M_0(\cos\beta x-\sin\beta x)]. \tag{e}$$

此为一迅速減幅的振动曲綫，其波长为

1）关于圓筒壳中局部弯曲的这一分析方法似乎是由 H. Scheffler 所提出的；参看 Organ f. Eisenbahnwesen, 1859.

$$l = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{r^2h^2}{3(1-\mu^2)}}, \tag{f}$$

如 h 很小，它比起 r 来就很小。 由此可見，简体与头部接合处的弯曲是具有**局部特性**的，而只有在接头附近的一狭窄区域内才对应力有可观的影响。在头部的边上此狭窄区域可看作接近于圆筒形，因此，前面对容器圆筒部分推导的式(e)也可用来近似計算头部的挠度和应力[1]。

对于圆筒壁和球形头具有相同厚度的最簡单情形，球形和圆筒部分的边上由力 P_0 所产生的挠度和斜率均相等。 如 $M_0=0$ 和 P_0 的大小可以在筒体的边上产生大小为 $\delta/2$ 的挠度，则接合处的連續条件就被滿足。将 $M_0=0$ 和 $x=0$ 代入式(e)，用以計算 P_0 的方程式变成

$$\frac{P_0}{2\beta^3 D} = \frac{\delta}{2},$$

从而得

$$P_0 = \delta\beta^3 D = \frac{pr^2}{2hE}\,\frac{Eh}{4\beta r^2} = \frac{p}{8\beta}. \tag{124}$$

求出了 P_0，小条任意截面处的挠度和弯矩就可由式(e)算得。相应的不連續应力必須与式(a)所示的薄膜应力相加。

如容器的头部和圆筒部分具有不同厚度，则在接合处将同时有一剪力 P_0 和一力矩 M_0。此两值可由下列两条件算得：(1)球形部分和圆筒部分的边緣挠度之和必須等于 δ（图 85b）；(2)两边的轉角必須相等。

上述方法也可用于容器两端不是半球形的情形[2]。 如受压容

1) 此为一足够精确的假設，这已由 E. Meissner 加以証明，*Schweiz. Bauzeitung*, vol. 86, p. 1, 1925.

2) 此法曾用来研究各种形状的蒸汽鍋炉头部的应力分布；参看 E. Höhn 和 A. Huggenberger, Über die Festigkeit der Gewölbten Boden und der Zylinderschale, Zürich, 1927; 及 W. M. Coates, The State of Stress in Full Heads of Pressure Vessels, *Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div.*, 1929. 此法也曾用来研究盛有液体的桶中的局部弯曲；参看 T. Pöschl 和 K. Terzaghi, Berechnung von Behältern, Berlin, 1926; H. Reissner, *Beton u. Eisen*;

器的壁厚并不很小，则壁中的弯曲应力可能变成头等重要，而必需对应力分布作較詳細的研究[1]。

习 题

1. 試确定图 85 所示容器中的不連續应力，如果 $p = 150$ 磅/吋^2，$r = 25$ 吋，$h = \frac{1}{2}$ 吋，$\mu = 0.3$。

解 由式(123)得 $\beta = 0.364$，而由式(124)得

$$P_0 = \frac{150}{8 \times 0.364} = 51.5 \text{ 磅/吋}.$$

微条中的弯矩为

$$M = -D\frac{d^2y}{dx^2},$$

运用式(e)并代入

$$y = \frac{P_0}{2\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x,$$

得

$$M = -\frac{P_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x.$$

此力矩在数值上的最大值发生在 $\beta x = \pi/4$ 处，此处 $M_{max} = 45.4$ 吋磅。小条中相应的最大弯应力为 $6M_{max}/h^2 = 1090$ 磅/吋^2。此应力必須与下列薄膜应力相加：

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h} = 150 \times 25 = 3750 \text{ 磅/吋}^2.$$

小条的弯曲还产生了圓周应力。这些应力由两部分組成：(1) 阻止小条截面发生畸变的应力(参看第 68 頁)，此应力在小条的任何截面处均具有一最大值 $\pm 6\mu M/h^2$；和(2)由于圓周的縮短而产

---

vol. 7, 1908 以及 C. Runge, *Z. Math. u. Phys.*, vol. 51, p. 254, 1904. 平端圓筒壳曾由 E. O. Holmberg 和 K. Axelson 作了討論，*Trans. A. S. M.E.*, vol. 54, p. 13, 1932. 此法也曾应用于厚壁圓筒而得出滿意的結果；参看 C. W. MacGregor 和 L. F. Coffin 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 14, p. A-301, 1947. 关于圓筒壳的深入討論載于作者的 "Theory of Plates and Shells", 1940.

1) 参看鉄摩辛柯，*ibid.*

生的应力，其大小为 $-yE/r$. 将上面 y 和 M 的表达式代入，必須与薄膜应力 σ_2 相加的不連續应力为

$$-\frac{P_0E}{2\beta^3Dr}e^{-\beta x}\cos\beta x+\frac{6\mu P_0}{\beta h^2}e^{-\beta x}\sin\beta x=$$

$$=\frac{6\mu P_0}{\beta h^2}e^{-\beta x}(\sin\beta x-1.83\cos\beta x).$$

此应力的最大值不难用通常的方法求得. 它比起薄膜圓周应力 $pr/h=7500$ 磅/吋^{2}来很小. 因此，这时不連續应力对最大应力的影响不大.

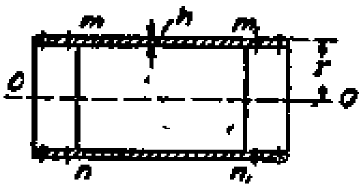


图 87

2. 有一与两实心圓盘相連結的薄壁圓筒以圓周速度 v 繞軸綫 O–O 旋轉(图 87). 如果它沿边緣 mn 和 m_1n_1 固定，試确定圓筒中的局部弯应力.

解. 如将圓筒与圓盘分开，由于离心力而引起的圓筒半径的增量等于 $\gamma v^2r/gE$ [参看原书上卷第 32 頁式(15)]. 实心圓盘半径的增量为[参看式(194)]

$$\frac{1-\mu}{4}\frac{\gamma v^2r}{gE}.$$

此两值之差为

$$\delta=\frac{3+\mu}{4}\frac{\gamma v^2r}{gE}.$$

(設 γ, μ 和 E 对圓筒和圓盘均相同.)应用与上題相同的方法，并研究单位寬度的小条，边 mn 上的剪力 P_0 和弯矩 M_0 的大小就可用式(11)和(12)求得. 如把小条看作非常长，就可应用这些方程式. 此外，与圓筒比較起来，我們可把圓盘看作刚度非常大而忽略它們由于力 P_0 和力偶 M_0 所引起的变形. 于是用以計算 P_0 和 M_0 的方程式为

$$\frac{1}{2\beta^3D}(P_0-\beta M_0)=\delta,$$

$$\frac{1}{2\beta^2D}(P_0-2\beta M_0)=0.$$

从而得

$$P_0 = 4\delta\beta^3 D;\ M_0 = 2\delta\beta^2 D.$$

应用这些值就可由一类似于式(11)的方程式求得圆筒中的挠度和弯应力.

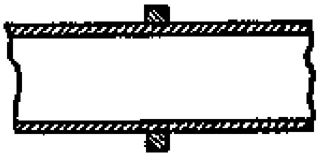


图 88

3. 試确定上題圓筒中的最大弯应力，如果 $r = 25$ 吋，$h = 1/2$ 吋，$v = 500$ 呎/秒和材料为鋼时.

4. 試确定一管子由于一狭环收縮在其上而产生的弯应力(图 88).

解. 研究一具有单位寬度的縱向小条，以 P 表示环与管子間的单位管子周长內的压力. 小条的弯曲与在弹性基础上受单个載荷 P 的长杆的弯曲(§1)相同. 由式(8)得，由于 P 而引起的管子半径的減少量为 $P/8\beta^3 D$. 环半径的增量为 Pr^2/AE，此处 A 为环的截面积.（設环的径向尺寸比起半径 r 来很小）. 如 δ 为环的內半径与管子的外半径之初始差，則用以計算 P 的方程式为

$$\frac{P}{8\beta^3 D} + \frac{Pr^2}{AE} = \delta$$

或运用式(123)并取 $\mu = 0.3$，得

$$0.643\,\frac{P}{E}\left(\frac{r}{h}\right)^{3/2} + \frac{Pr^2}{AE} = \delta. \qquad (g)$$

P 由此式确定，而小条中的最大弯矩則由式(9)求得[1]. 于是小条中的最大弯应力为

$$\sigma = \frac{3}{2}\,\frac{P}{h^2}\sqrt[4]{\frac{r^2h^2}{3(1-\mu^2)}}.$$

同样方法也可应用于具有加固环的圓柱管承受均布內压或均布外压的情形. 如果环間的距离足够大以致任一环对任何其他环所生挠度的影响可忽略不計时，将 $\delta = pr^2/Eh$ 代入式(g)就可求

---

1) 屬于这种計算的一例載于 G. Cook 的論文中，*Engineering*, vol. 116, p. 479, 1923. 并參看 R. Lorenz, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 52, p. 1706, 1908; M. Westphal, *ibid.*, vol. 41, p. 1036, 1897.

得 P. 此表示由于均布压力而引起的管子半径的改变量[1].

5. 如設管子的长度 l 不大,而环在长度的中央时，試解上题．材料为鋼,而尺寸为 $r = 25$ 吋, $h = 1/2$ 吋, $l = 50$ 吋, $A = 4$ 吋^{2}和 $\delta = 0.05$ 吋.

提示. 計算环单位长度内的压力 P 时，可运用对图 13 所示的梁求得的結果．因此,管中由压力 P 所产生的挠度为

$$\frac{P}{8\beta^3 D}\cdot\frac{\cosh\beta l + \cos\beta l + 2}{\sinh\beta l + \sin\beta l}.$$

于是用以計算 P 的方程式为

$$\frac{P}{8\beta^3 D}\cdot\frac{\cosh\beta l + \cos\beta l + 2}{\sinh\beta l + \sin\beta l} + \frac{Pr^2}{AE} = \delta.$$

6. 有一边緣簡支的圓柱管承受均布内压 p. 試求管子中点的縱向弯应力和挠度(图 89)．管子的尺寸与上题相同.

提示. 根据图 20 所示习题的結果，中間截面 c—c 处的挠度和单位周长内的弯矩各为

$$y_c = \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{2\cosh\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2}}{\cosh\beta l + \cos\beta l}\right),$$

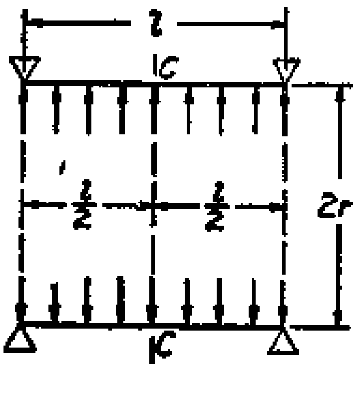


图 89

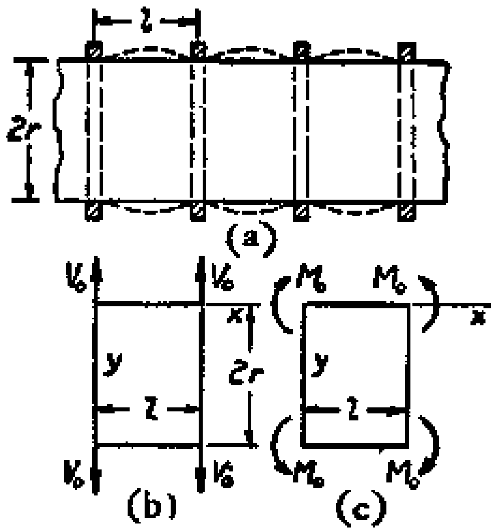


图 90

1) 关于此法之如何用于計算圓截面潛水艇的船壳应力，載于 K. v. Sanden 的論文中，Werft u. Reederei, p. 189, 1920.

$$M = \frac{p}{\beta^2} \frac{\sinh \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\cosh\beta l + \cos\beta l}.$$

7. 如設管边緣剛性固定时，試解上題。

提示. 运用图 21 所示习题的結果。

8. 有一圓鋼管为相距 l 的若干环所加固（图 90a），并承受內压 p. 試求在环的內圓周单位长度內产生的压力 P. 并求管中的最大弯应力。

解. 我們首先研究两环間受管子单位周长內的剪力 V_0（图 90b）和弯矩 M_0（图 90c）作用的这段管子.（設环寬比起环的間距 l 来可忽略不計.）把单位寬度的縱条看作弹性基础上的梁，并运用图 12 和图 18 的习題的答案，我們求得图 90b 中小条左端的撓度和斜率各为

$$(w_1)_{x=0} = -\frac{2V_0\beta r^2}{Eh} \cdot \frac{\cosh\beta l + \cos\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}, \tag{h}$$

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2V_0\beta^2 r^2}{Eh} \cdot \frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \tag{i}$$

对于图 90c 中小条的左端，我們求得

$$(w_2)_{x=0} = -\frac{2M_0\beta^2 r^2}{Eh} \cdot \frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}, \tag{j}$$

$$\left(\frac{dw_2}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4M_0\beta^3 r^2}{Eh} \frac{\cosh\beta l - \cos\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l}. \tag{k}$$

由我們对 P 的定义得出

$$V_0 = -\frac{P}{2}.$$

将它代入式 (i)，并考虑到在管子中（图 90a）小条的切綫必与管子的軸綫平行，得

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{dw_2}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

从而得

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \cdot \frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{\cosh\beta l - \cos\beta l}. \tag{l}$$

計算 P 时，我們首先假設环是絕对刚性的。在这一情形下，管子中由环下的力 P 所产生的挠度必定等于管子在无加固环时会有的径向膨胀量 pr^2/Eh。于是，用以計算 P 的方程式为

$$(w_1)_{x=0}+(w_2)_{x=0}=\frac{pr^2}{Eh},$$

或

$$\frac{P\beta r^2}{Eh}\cdot\frac{\cosh\beta l+\cos\beta l}{\sinh\beta l+\sin\beta l}-\frac{P\beta r^2}{2Eh}\cdot$$
$$\cdot\frac{(\sinh\beta l-\sin\beta l)^2}{(\sinh\beta l+\sin\beta l)(\cosh\beta l-\cos\beta l)}=\frac{pr^2}{Eh}. \qquad \text{(m)}$$

在每一特定情形下，均可由此式很快解出 P。将 P 值代入式 (l)，我們求得所需的弯矩 M_0。

在計及加固环的膨胀时，我們看出，力 P 使环的內半径伸长了 Pr^2/AE。此处 A 为环的截面积。管子的挠度减小了同一数量。因此为了求得力 P，这时我們只要以

$$\frac{pr^2}{Eh}-\frac{Pr^2}{AE}$$

代式(m)右边的 pr^2/Eh 卽可。

9. 試求盛着液体的圓筒形鋼槽底部单位周长內的弯矩 M_0 和剪力 V_0（图 91），如果 $r=30$ 呎，$d=26$ 呎，$h=14$ 吋，$\gamma=0.03613$ 磅/吋^{3}和 $\mu=0.25$。

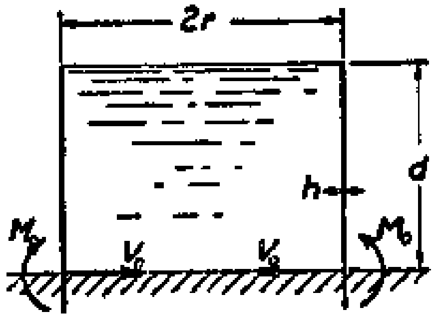


图 91

答. $M_0=1.3960$ 吋磅/吋，$V_0=563.6$ 磅/吋。

10. 如設环装置在管子的左端时，試解題 5。环对扭轉的抗力可忽略不計。

提示. 运用第 23 頁題 6 所得的結果。

§ 27. 圓筒壳中的热应力. 如果有一自由边緣的圓筒壳承受均匀的溫度变化，那就不会产生热应力。但是如果边緣受支承或被固定，就可阻止壳作自由膨胀，而在边上产生了局部弯应力。例

如，設长圓柱管的边为固定，則边上剪力和弯矩的求算与 §26 的题 2 相同，只需将 $\delta=r\alpha t$ 代入該題的方程式即可. $\delta=r\alpha t$ 表示由于热膨胀而引起的壳半径的增量. 如果管子的长度不大而两端須同时考慮时，則弯矩和剪力就可运用 §26 题 8 的結果很快地求得.

我們現在来研究在径向有温度差的情形. 設 t_1 和 t_2 各为圓筒壁內表面和外表面的均匀温度，而温度沿厚度綫性变化. 在这一情形下，在离壳端很远之处将无弯曲，而应力可用对边为固定的板导出的式(87)算得. 这样求得最大弯应力为

$$\sigma_{max}=\frac{\alpha E(t_1-t_2)}{2(1-\mu)} \tag{a}$$

(設 $t_1>t_2$). 于是，将有拉应力作用在壳的外表面上.

在壳的两端附近，壳会有一些弯曲，将弯曲时产生的应力与式(a)的应力迭加，可求得总热应力. 我們以研究长圓柱管自由端的应力作为一例. 計算这种情形的应力时，我們看出，在边上由式(a)所表示的应力引起了均布力矩 M_0(图 92a)，其大小为

$$M_0=\frac{\alpha E(t_1-t_2)h^2}{12(1-\mu)}. \tag{b}$$

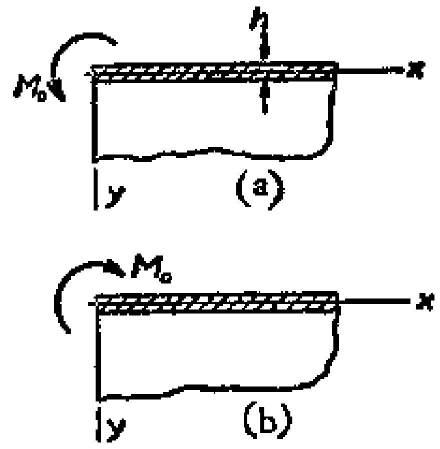


图 92

为了获得自由边，須将大小相等而方向相反的力矩相迭加(图 92b). 于是将图 92b 所示的力矩所产生的应力与式(a)的应力迭加，就求得自由边上的热应力. 研究微条的弯曲，而后运用式(11)，就可很快求得图 92b 中力矩所产生的这些应力，从而得

$$y=-\frac{M_0}{2\beta^2D}e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x), \tag{c}$$

式中 β 由式(123)求得. 在自由边上($x=0$ 处)求得的最大撓度为

$$y_{max}=-\frac{M_0}{2\beta^2D}, \tag{d}$$

而相应的圜周应力为

$$\frac{M_0}{2\beta^2 D}\cdot\frac{E}{r}=\frac{E\alpha(t_1-t_2)}{2\sqrt{3}(1-\mu)}\sqrt{1-\mu^2}. \tag{e}$$

作用在微条一端的弯矩由式(b)求得. 阻止小条截面在弯曲时发生畸变的弯矩为

$$\mu M_0=\mu\frac{\alpha E(t_1-t_2)h^2}{12(1-\mu)}. \tag{f}$$

最大热应力沿周向作用在管子的外表面上,它由下列三部分組成:(1)由式(a)求得的应力,(2)由式(e)求得的应力,和(3)由式(f)求得的力矩所产生的应力. 于是

$$\sigma_{max}=\frac{\alpha E(t_1-t_2)}{2(1-\mu)}\left(1+\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{3}}-\mu\right). \tag{125}$$

当 $\mu=0.3$ 时,此应力較之由式(a)在离两端很远之处算得的应力大 25% 左右. 因此我們可以得出,如果在玻璃等脆性材料中由于有温度差 t_1-t_2 而发生一裂縫时,此裂縫将在边上开始而沿軸向发展. 对于边为固定或受支承的情形,应力也可按同样方法計算[1].

习　　题

1. 試求在边为固定的长鋼管中产生的热应力,如果 $r=25$ 吋,$h=1/2$ 吋,$\mu=0.3$,热膨胀系数 $\alpha=70\times10^{-7}$,和管子均匀温度的增量为 100°F.

解. 对于已知尺寸,我們求得

$$\beta=0.364\ \text{吋}^{-1},\quad D=343\times10^3\ \text{磅吋}.$$

由于温度升高而引起的管子半径的自由伸长量 $\delta=\alpha r(t-t_0)=70\times25\times100\times10^{-7}=175\times10^{-4}$ 吋. 代入上节題 2 的方程式中,我們求得固定边上单位周长內的剪力和弯矩如下:

$$P_0=4\delta\beta^3 D=1160\ \text{磅/吋},$$

1) 属于此类的一些例子曾由 C. H. Kent 作了討論, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 53, p. 167, 1931. 有軸向温度梯度的情形在作者的 "Theory of Plates and Shells" (p. 423, 1940) 一书中有討論.

$$M_0 = 2\delta\beta^2 D = 1590 \text{ 吋磅/吋}.$$

有了这些 P_0 和 M_0 值，就可很快算得固定边上軸向和周向的应力。(設管子在軸向作自由膨胀。)

2. 如設边为簡支时，試解上题。

3. 与題 1 同尺寸的鋼管在內表面和外表面上各具有温度 t_1 和 t_2. 如果 $t_1 - t_2 = 100°F$ 和边为自由时，試求管中的最大应力。

答. $\sigma_{max} = 18750$ 磅/吋^2.

4. 試解上題，如設当管子具有 $(t_1 + t_2)/2$ 的均匀温度时管边为固定。

§ 28. 圓环由于沿其中心綫均布的力偶而引起的扭轉. 有些情形是等截面圓环承受沿其中心綫均布的扭轉力偶的作用[1]. 把环的一半看作一自由体（图 93a），我們由对直径 Ox 的力矩的平衡条件得出，在截面 m 和 n 上必定作用着一弯矩，其大小为

$$M = M_t a, \qquad (a)$$

式中 a 为中心綫的半径而 M_t 为中心綫单位长度內的扭轉力偶。

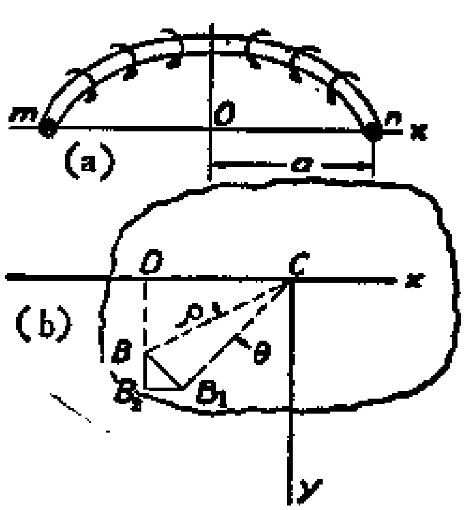


图 93

我們現在来研究环的变形。由对称条件可以得出，在扭轉时每一截面均在其本身的平面內轉过同一角度 θ，在下面的討論中設角 θ 很小[2]. 令 C 为旋轉中心（图 93b）而 B 为截面上离 C 的距离为 ρ 的一点。由于截面的旋轉，点 B 描繪一短弧 $\overline{BB_1} = \rho\theta$. 由于有此位移，在点 B 与截面垂直的环的环状纖維，其半径增大了 $\overline{B_2B_1}$. 如取坐标軸如图所示，我們由三角形 BB_1B_2 与 BDC 的相似得

1) 这类問題的例子有电动机整流器扣环中的应力計算和管子凸緣的应力分析。

2) 当 θ 并不小时，問題的一般討論是由 R. Grammel 所作的，*Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 429, 1923 和 vol. 7, p. 198, 1927. 并参看 C. B. Biezeno 和 R. Grammel 的著作，Technische Dynamik, vol. 1, p. 430, 1953.

$$\overline{B_1B_2} = \overline{BB_1}(\overline{DB}/\overline{BC}) = \rho\theta\frac{y}{\rho} = \theta y. \tag{b}$$

我們首先来研究环的截面尺寸比起中心綫的半径 a 来很小的情形. 于是可取任意环状纤維的半径为 a 而无很大誤差. 由于式(b)所示的位移而引起的纤維 B 的单位伸长量为

$$\varepsilon = \frac{\theta y}{a}. \tag{c}$$

如果在环状纤維之間无横向压力，則由于伸长量 ε 而引起的纤維应力为

$$\sigma = \frac{E\theta y}{a}. \tag{d}$$

現在根据半环的平衡，作用在环截面上的所有法向力之和必須等于零，而这些力对 x 軸的力矩必須等于 M[参看式(a)]. 如果 dA 表示截面的微面积，則这些平衡方程式就变成

$$\int_A \frac{E\theta y}{a} dA = 0; \int_A \frac{E\theta y^2}{a} dA = M, \tag{e}$$

式中积分遍及整个截面积 A，上列第一个方程式表明截面中心必定在 x 軸上；由第二个方程式得

$$\theta = \frac{Ma}{EI_x} = \frac{M_t a^2}{EI_x}, \tag{126}$$

式中 I_x 为环对 x 軸的截面慣性矩. 代入式(d)，得

$$\sigma = \frac{M_t a y}{I_x}, \tag{127}$$

卽环截面上正应力的分布与直杆弯曲时的相同；应力与离中性軸 x 的距离成正比，而最大应力发生在离此軸最远之处.

我們来研究一寬度 b 比起中心綫的半径 a 来并不很小的矩形截面环（图 94）作为第二个例子. 以 c 和 d 分别表示环的內半径和外半径，而以 r 表示环任意纤維的半径，并且同前面一样，設环的变形是由于其截面[1] 轉过一角度 θ 而造成的. 在半径 r 处的纤

1) 在此研究中，忽略了截面发生畸变的可能性. 如果 $d/c<1.5$，相应的誤差就很小. 参看 A. M. Wahl, *loc. cit.*, p. 113.

維的伸長和相应的应力各为

$$\varepsilon = \frac{\theta y}{r};\quad \sigma = \frac{E\theta y}{r}. \tag{f}$$

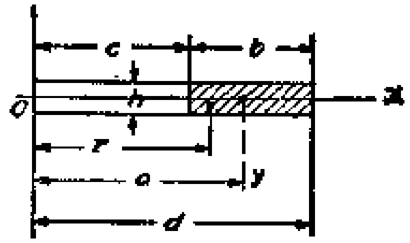


图 94

类似于方程組 (e) 的第二式的平衡方程式变成

$$\int_{-h/2}^{+h/2}\int_{c}^{d}\frac{E\theta y^2 dr dy}{r} = M,$$

积分后，得

$$\frac{E\theta h^3}{12}\ln\frac{d}{c} = M,$$

从而得

$$\theta = \frac{12M}{Eh^3\ln\frac{d}{c}} = \frac{12M_t a}{Eh^3\ln\frac{d}{c}}. \tag{128}$$

将此値代入方程組(f)的第二式，得

$$\sigma = \frac{12My}{h^3 r\ln\frac{d}{c}}.$$

可見，最大应力是在环的內角上，此处 $r = c$ 和 $y = h/2$:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2 c\ln\frac{d}{c}} = \frac{6M_t a}{h^2 c\ln\frac{d}{c}}. \tag{129}$$

如果 b 很小，式(128)就很容易化成式(126)的形式。因此运用 $d = a + (b/2)$ 和 $c = a - (b/2)$，我們求得

$$\ln\frac{d}{c} = \ln\frac{a+\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}} \cong \ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

当比值 b/a 很小时，上面的对数近似等于 b/a。将此代入式(128)可得式(126)。

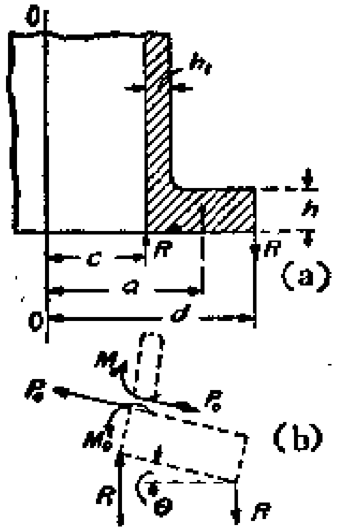


图 95

这些結果可用于計算管子和凸緣的接合处由力 R 所产生的应力[1)]（图 95）．R 为管子的內圓周单位长度內的力；凸緣的外圓周单位长度內的力为 R (c/d)．在这些力的作用下，凸緣的截面轉过了角度 θ，而管壁的弯曲則如图 95b 中虛綫所示．令 M_0 和 P_0 为接合处管子的內圓周单位长度內的弯矩和剪力．弯矩和剪力的大小可由管子和凸緣接合处的連續条件求得．由于在垂直于管子軸綫的平面內凸緣的刚度通常非常大，因此凸緣中由力 P_0 所引起的径向位移可忽略不計，而在管边上的撓度可作为零．管边的轉角等于 θ，即等于凸緣截面的轉角．于是由式(11)和(12)得下列用以計算 M_0 和 P_0 的方程式：

$$\frac{1}{2\beta^3 D}(P_0 - \beta M_0) = 0,$$

$$-\frac{1}{2\beta^2 D}(P_0 - 2\beta M_0) = \theta.$$

由上列第一个方程式得

$$P_0 = \beta M_0. \tag{g}$$

于是

$$M_0 = 2\beta D\theta \text{ 和 } P_0 = 2\beta^2 D\theta. \tag{h}$$

对于厚度为 h_1 和內半径为 c 的管子，我們用式(123)求得 β 为

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{c^2 h_1^2}}. \tag{i}$$

（如果管子厚度很小，內半径与中面半径之差就可忽略不計．）由图

1) 計算这些应力的另一方法是由 E. O. Waters 給出的，*J. Appl. Mech.*, vol. 59, p. 161, 1937. 并参看 J. D. Mattimore, N. O. Smith-Petersen 和 H. C. Bell, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 60, p. 297, 1938. 此方法由 G. Horvay 和 I. M. Clausen 推广至非圓筒形殼；参看 1953 年 12 月在美国机械工程师协会年会上发表的論文 No. 53-A-43.

中所示的力所产生的凸緣中心綫单位长度內的轉矩为

$$M_t = \frac{c}{a}\left[R(d-c) - M_0 - P_0\frac{h}{2}\right]$$

$$= \frac{c}{a}\left[R(d-c) - M_0 - M_0\frac{h}{2}\beta\right]. \qquad (j)$$

将式(j)代入式(128)可得角 θ，于是由方程組(h)的第一式得

$$M_0 = 2\beta D \cdot \frac{12c}{Eh^3 \ln\frac{d}{c}}\left[R(d-c) - M_0 - M_0\frac{h}{2}\beta\right].$$

以 $Eh_1^3/12(1-\mu^2)$ 代 D，我們得

$$M_0 = \frac{R(d-c)}{1 + \frac{\beta h}{2} + \frac{1-\mu^2}{2\beta c}\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 \ln\frac{d}{c}}. \qquad (130)$$

如果我們給定了管子的尺寸、泊桑比和力 R，就可由式(130)和式(g)算得 M_0 和 P_0。然后可按 §26 求得管中的弯应力。

习　　题

1. 試确定图 95 所示的管子中的弯矩 M_0 和剪力 P_0，如果 $d = 6\frac{1}{4}$ 吋，$c = 3\frac{5}{16}$ 吋，$h = 1\frac{7}{16}$ 吋，$h_1 = \frac{13}{16}$ 吋，$\mu = 0.3$。

解. 由式(i)得

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{2.73}}{\sqrt{ch_1}} = 0.784\ 吋^{-1},$$

此外

$$\ln\frac{d}{c} = 0.635; \quad \frac{\beta h}{2} = 0.564.$$

将这些値代入式(130)，得

$$M_0 = 0.459R(d-c); \quad P_0 = \beta M_0 = 0.360R(d-c).$$

管中的最大弯应力由下式求得：

$$\sigma = \frac{6M_0}{h_1^2}.$$

2. 試求图 96 所示錐形环的小撓度表达式，此环代表柏来維尔(Belleville)弹簧的一个元件. R 为环内边单位长度内的載荷.

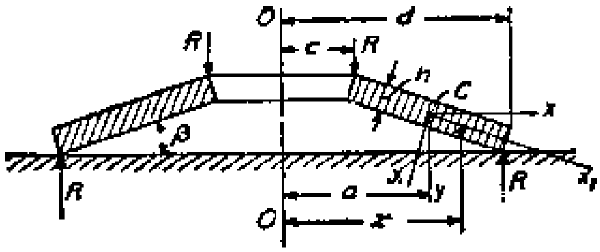


图 96

解. 同前面一样，取旋轉中心 C 为座标軸 x 和 y 的原点. 半径为 r 的任意纖維的单位伸长量和单位应力由式(f)表示. 根据半环的平衡，我們得

$$\int_A \frac{E\theta y}{r}dA = 0;\int_A \frac{E\theta y^2}{r}dA = M = Rc(d-c). \qquad (k)$$

旋轉中心 C 的位置可由上列第一个方程式来确定. 令 a 为点 C 处的半径并設圓錐的角 β 很小，因此我們可取 $\sin\beta=\beta$; $\cos\beta=1$. 然后取軸綫 x_1 和 y_1 平行于矩形截面的側面，并考虑到 $y=y_1+\beta x_1=y_1+\beta(r-a)$，方程組(k)的第一式变成

$$\int_{-h/2}^{+h/2}\int_c^d \frac{E\theta}{r}[y_1+\beta(r-a)]drdy_1 = E\theta\beta h\Big[r-a\ln r\Big]_c^d =$$

$$= E\theta\beta h\left(d-c-a\ln\frac{d}{c}\right)=0,$$

从而得

$$a=\frac{d-c}{\ln\dfrac{d}{c}}. \qquad (l)$$

方程組(k)的第二式变成

$$\int_{-h/2}^{+h/2}\int_c^d \frac{E\theta}{r}[y_1+\beta(r-a)]^2drdy_1 =$$

$$= E\theta\left[\frac{h^3}{12}\ln\frac{d}{c}+\beta^2h\left(\frac{d^2-c^2}{2}-2a(d-c)+a^2\ln\frac{d}{c}\right)\right]$$

$$= Rc(d-c),$$

将式(l)的 a 值代入，我們得圓錐上边的鉛直撓度为

$$\delta=\theta(d-c)=\frac{Rc(d-c)}{E\left[\dfrac{h^3}{12(d-c)}\ln\dfrac{d}{c}+\beta^2h\left(\dfrac{d+c}{2}-\dfrac{d-c}{\ln\dfrac{d}{c}}\right)\right]}. \qquad (m)$$

如果我們知道了环的尺寸、材料的弹性模量和載荷 R，就可由此方程式得出 δ。此推导忽略了由于轉角 θ 而使角 β 改变的影响[1]。

1）当撓度較大时，必須考虑角 β 的变化，在这种情形下，撓度不再与載荷成正比。参看 W. A. Brecht 和 A. M. Wahl 的論文，*Trans. A. S. M. E. Appl. Mech. Div.*, vol. 52, p. 52, 1930. 并参看 J. O. Almen 和 A. Laszlo 的論文，*ibid.*, vol. 58, p. 305, 1936 及 Siegfried Gross 的論文，*Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 79, p. 865, 1935.

第五章　杆、板与壳的屈曲[1]

§29. **稜柱杆的横向屈曲:簡单情形.** 由前面对同时受弯曲和压縮的支柱所作的討論(原书上卷第263頁)知，当压縮力达到一**临界值**时，加一极小的横向載荷就可产生很大的横向撓度．对于两端鉸支并具有两个对称面的稜柱杆[2]，此**临界压縮力**为

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{a}$$

式中 I 为截面的較小的主慣性矩．由实驗知，当細长[3]支柱中的压縮力接近于此值时，开始发生横向撓曲，而撓度随压縮力的增大而急剧增大，以致大小等于临界值的載荷通常足可使結构完全失效．因此此**临界載荷**应視作衡量細长柱和支柱強度的判据．

由式(a)可以看出，此临界載荷与杆**材料**的強度无关，而只决定于結构的尺寸及材料的弹性模量．两个同样的細长支柱，其一为高強度鋼而另一个为普通結构鋼，虽然两种情形的材料強度极为不同，可是它們将在同一压縮力下发生屈曲．由式(a)还可知，增大 I 可提高支柱的承載能力．不改变截面积但使材料的分布尽量远离截面主軸，就可以做到这一点．因此对于受压构件而言，管状截面較实心截面为經济．減小这种截面的壁厚，而增大横向尺寸就可提高其稳定性．然而壁厚有一下限，如低于此下限，壁本身将变成不穩定，虽支柱不致发生整体屈曲，但发生了局部屈曲，而使壁形成波紋．

由此討論知，受压构件的**弹性穩定**或側向屈曲在实用上非常

---

1) 如要获得关于屈曲問題的更多知識，可参看作者的"弹性穩定理論"，科学出版社，1958．

2) 横向屈曲与扭轉同时作用的較普遍情形将在后面(第240頁)討論．

3) 当支柱并不足够細时，則在超过比例极限的压縮应力下发生横向屈曲．这种情形将在后面(第156頁)討論．

重要．在許多現代結构中这一点特别眞实，因为用了强度較高的材料和力求減輕重量，其截面尺寸已經越做越小了．在許多情形下，工程結构的失效可能是由于丧失弹性稳定，而非由于材料某部分的強度不足所致．

在前面的討論中（原书上卷第263頁），支柱临界載荷的大小是考虑了压縮力和弯曲力同时作用而求得的．如設杆为作用在中心的单独載荷所压縮，也可获得同样結果[1]．我們来研究一在底部固定的細长稜柱形竪杆在頂端受軸向載荷的情形（图 97）．如載荷 P 小于其临界値，則杆保持为平直且只受軸向压縮．这种直形的弹性平衡是穩定的，也就是如施加一横向力使杆产生一小撓度，則移去横向力后撓度就消失，而杆又变成平直．逐漸增加 P，我們得到这样一个情形：直形的平衡变成为不穩定，施加一很小的横向力而产生的横向撓度，在移去横向力后并不消失．于是临界載荷可定义为足以使杆保持为微弯形式（图 97b）的軸向載荷．

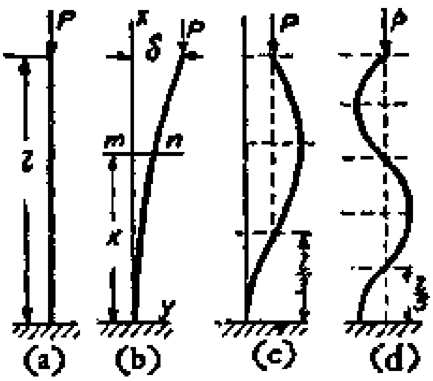


图 97

此載荷可利用撓度曲綫的微分方程式算得．取坐标軸如图 97b 所示，則在任意截面 mn 处的弯矩是 $P(\delta - y)$，而撓度曲綫的微分方程式为[2]

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(\delta - y). \qquad \text{(b)}$$

显然，当上端为自由时，杆的屈曲将发生在**弯曲刚度最小**的平面內．以 EI 表示最小弯曲刚度并令

1) 受压稜柱杆的两端为各种情形时的临界載荷值首先由 L. Euler 所求得．参看“Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes”(Lausanne, 1744) 一书的附录“De curvis elasticis”．并参看“Histoire de l'Académie”, Berlin, vol. 13, 1757．此著作的英譯文載于 *Isis*, No. 58, vol. 20, 1933.

2) 对于图 97b 所示的撓度，d^2y/dx^2 为正；因此我們在式(b)的右边用正号．

$$p^2 = \frac{P}{EI}, \tag{c}$$

则式(b)变成

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = p^2\delta. \tag{d}$$

此方程式的通解为

$$y = \delta + C_1\cos px + C_2\sin px, \tag{e}$$

式中 C_1 和 C_2 为常数,我們必須使其满足固定端的下面两个条件:

$$(y)_{x=0} = 0; \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

如果我們取

$$C_1 = -\delta; \ C_2 = 0,$$

就可满足这些条件. 于是

$$y = \delta(1 - \cos px). \tag{f}$$

上端的条件为

$$(y)_{x=l} = \delta,$$

如果 $\cos pl = 0$ 或如果

$$pl = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \tag{g}$$

式中 n 为整数,就可满足此条件. 令 $n = 0$ 可求得满足式(g)的最小 pl 值,因此可求得 P 的最小值. 于是运用式(c)得

$$pl = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2},$$

从而得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \tag{131}$$

此为图 97a 所示的杆的**临界載荷**, 即能使杆保持为微弯形状的最小載荷.

在式(g)中,对 $n = 1$, $n = 2, \cdots$,得

$$P = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}, \quad P = \frac{25\pi^2 EI}{4l^2}, \cdots$$

相应的撓度曲綫示于图 97c 和 d. 对于图 97c 所示的形状,力必須

为临界值的九倍；对于图 97d 所示的形状，力必須为二十五倍．这些形式的屈曲均为不稳定的，无实用意义，因为当载荷达到式(131)中之值时結构就已失效了．

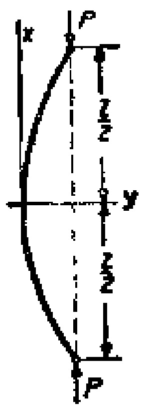


图 98

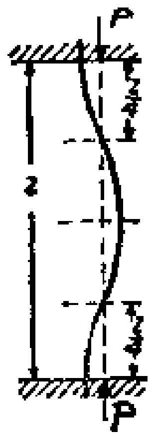


图 99

根据前面情形的解不难求得其他几种情形的临界载荷．例如，对于两端鉸支的杆(图 98)，由对称性可以看出，杆的一半与图 97b 的杆的情形相同．因此对于此情形，在式(131)中以 $l/2$ 代 l 可求得临界载荷，即

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{132}$$

两端鉸支的杆在实用中常常遇到，它可称为稜柱杆屈曲的**基本情形**．

对于两端固定的杆(图 99)，有阻止杆两端在屈曲时旋轉的反力矩．压縮力与端力矩的联合作用相当于压縮力 P 的偏心作用(图 99)．拐点(扭轉点)即 P 的作用綫与挠度曲綫之交点，因为在这些点上弯矩为零．这些点及跨距的中点把杆分成四等份，每一段均与图 97b 所示杆的情形相同．于是两端固定的杆的临界載荷可由式(131)以 $l/4$ 代 l 求得，即

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \tag{133}$$

在前面的討論中假設了杆非常細，因此在屈曲时产生的应力保持在比例极限之內．只有在此条件下，才能应用式(b)．为了确

定上面导出的临界载荷公式的应用范围，我們来研究**基本情形**(图98)。将式(132)除以杆的截面积A并以k表示較小的迴轉半径，得

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 E\left(\frac{k}{l}\right)^2, \tag{134}$$

只要应力σ_{cr}保持在材料的比例极限之内，就可应用此方程式。如果有一給定材料，其比例极限和弹性模量E为已知，則对于任何特定情形，比値l/k(称为**杆的細长比**)的极限值均不难由式(134)求得。图100中的曲綫ACB表示$E = 30\times 10^6$磅/吋^{2}的結构鋼的細长比l/k与σ_{cr}值之間的关系[式(134)]。如設材料的比例极限为30000磅/吋^2，我們得出只有CB这段曲綫才能用来确定σ_{cr}。

与上面同样处理，我們对图97和99所示的情形求得下列方程式：

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E\left(\frac{k}{2l}\right)^2; \tag{135}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E\left(\frac{k}{\frac{1}{2}l}\right)^2. \tag{136}$$

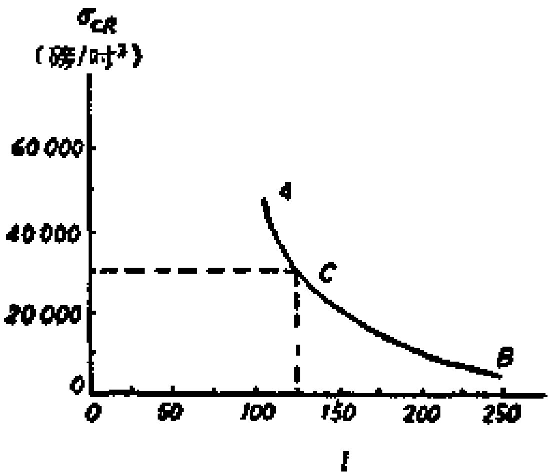


图 100

如果我們用一**折合长度**l_1来代替杆的真实长度，基本情形的方程式[式(134)]就可以应用于这些情形。对于一端固定而另一端自由的稜柱杆，折合长度[式(135)]为真实长度的两倍，因此$l_1 = 2l$。对于两端均为固定的稜柱杆，折合长度[式(136)]为真实长度的一半，或$l_1 = l/2$。因此对一般情形，临界应力的方程可写成下式：

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E\left(\frac{k}{\alpha l}\right)^2 = \pi^2 E\left(\frac{k}{l_1}\right)^2, \tag{137}$$

式中α决定于杆端的条件，它有时称为**长度系数**。

在討論柱的設計时(原书上卷第268頁)曾研究了两端鉸支的柱的基本情形．上面所給出的資料现在可应用于端点为其他状况的柱，只要用折合长度 l_1 代替眞实长度 l 卽可．因此对于任何特定情形，柱的設計就归結为确定适当的长度系數了．

在推导屈曲后的撓度曲綫方程式(f)时，最大撓度 δ 是不确定的，卽在临界載荷下杆可以有任意的小撓度．上面的討論只能应用于小撓度，因为只有在这种情形下我們才能用曲率的近似表达式 d^2y/dx^2 来代替精确表达式

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

对于某些情形[1]已求得了撓度曲綫的精确微分方程式的解，由这些解知，实际上并无如上面所指的撓度的这种不确定性．例如，对于两端鉸支的杆，其最大撓度可用下式表示[2]:

$$\delta=\frac{l\sqrt{8}}{\pi}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}-1}\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}}-1\right)\right], \qquad (138)$$

由此式知，当載荷超过临界值时，撓度增加得非常快．例如，設載荷較 P_{cr} 大1%，我們由式(138)求得撓度为杆长 l 的9%左右．(設应变保持在比例极限以內．)

載荷与撓度之間的关系可用曲綫 OAB 图示之(图101)，图中載荷用縱坐标表示，而撓度用横坐标表示．当載荷小于 P_{cr} 时，撓度为零．超过此极限时，撓度随載荷的增加而急剧地增加．(当开始屈服时，不能再用曲綫 AB，而屈曲仍継續进行，如图101中虛綫 BC 所示．)

在压杆横向屈曲的实驗研究中，撓度与載荷之間的关系与載

---

1) 参看 Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig, 1880. 并参看 Halphen, Traité des fonctions elliptiques, vol. 2, p. 192, 1888.

2) 参看 R. V. Mises, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 4, p. 435, 1924; 并参看 O. Domke, *Bautechnik*, vol. 4, p. 747, 1926 及 R. W. Burges, *Phys. Rev.*, 1917.

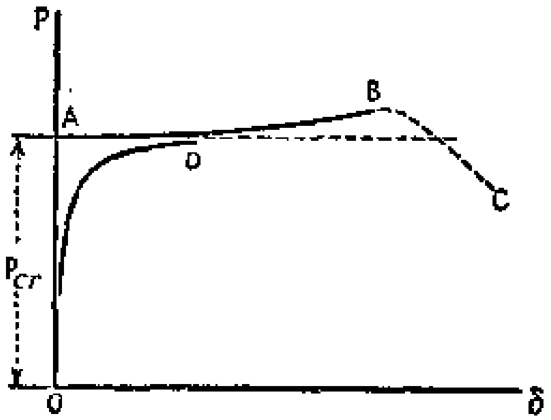


图 101

荷作用在中心的精确度以及杆的平直度和均質程度大有关系. 載荷-撓度曲綫通常与图 101 中的曲綫 OD 相似. 由于有各种偏差, 因此在很小的載荷下就开始撓曲, 但当載荷远远在临界值之下时, 撓曲进行得非常緩慢. 当載荷趋近于临界值时, 撓曲就进行得非常快. 杆愈是做得精确及加載愈是精确, 則曲綫愈是接近于理論曲綫 OAB[1].

习　　題

1. 有一两端鉸支的矩形截面(1 × 2 吋)鋼杆受軸向压縮. 如果 $E = 30 \times 10^6$ 磅/吋²和比例极限为 30000 磅/吋², 試确定能应用式(132)的最小长度. 如果长度为 5 呎, 試确定临界应力的大小.

解. 較小的迴轉半径为 $i = 1/\sqrt{12}$ 吋; 因此最小长度可由式(134)求得:

$$30000 = \pi^2 \times 30 \times 10^6 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{l_{\min}^2},$$

和

$$l_{\min} = 28.7 \text{ 吋}.$$

当 $l = 5$ 呎时, 临界应力由式(134)求得为

$$\sigma_{cr} = 6850 \text{ 磅/吋}^2.$$

2. 試解上題, 如設杆为圓截面, 其直径为 1 吋, 其两端为固定.

答. 最小长度 = 50 吋. 当 $l = 5$ 呎时, $\sigma_{cr} = 20800$ 磅/吋².

3. 試确定一标准的 6I12.5 型鋼的临界压縮載荷, 型鋼的长度

1) 临界載荷的实驗值与計算值非常符合是由 Th. v. Kármán 加以証实的, 参看 Forschungsarb., No. 81, 1910. 并参看 K. Memmler, *Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, p. 357, 1926.

为 6 呎而其两端为鉸支.

答.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9.87 \times 30 \times 10^6 \times 1.8}{72^2} = 103000\ \text{磅}.$$

§ 30. 稜柱杆的横向屈曲:复杂情形. 我們来研究下端固定而上端鉸支的中心受压支杆(图 102),作为杆件横向屈曲的較复杂情形的一例. 压縮力的临界值卽为能使支杆保持为微弯形状的 P_{cr} 值. 可以看出在此情形下,屈曲时将产生一横向反力 Q,而撓度曲綫的微分方程式变成

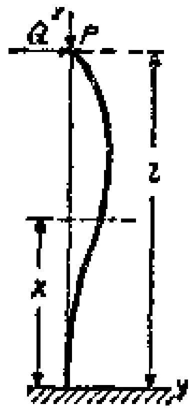


图 102

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Q(l-x). \qquad \text{(a)}$$

运用 §29 中式(c)的記号,此方程式的通解为

$$y = C_1\cos px + C_2\sin px + \frac{Q}{P}(l-x). \qquad \text{(b)}$$

为了确定常数 C_1 和 C_2 以及未知反力 Q,我們运用下列的端点条件:

$$(y)_{x=0} = 0,\ (y)_{x=l} = 0,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

将式(b)的 y 值代入,由这些条件得

$$C_1 + \frac{Q}{P}l = 0,\ C_1\cos pl + C_2\sin pl = 0,\ pC_2 - \frac{Q}{P} = 0. \qquad \text{(c)}$$

由上列第一个和第三个方程式定出常数 C_1 和 C_2,然后将其代入第二个方程式,得下列用以計算临界載荷的超越方程式:

$$\tan pl = pl. \qquad \text{(d)}$$

解此方程式时可用图解法. 在图 103 中画出了表示 $\tan pl$ 作为 pl 的函数的曲綫. 这些曲綫各漸近于垂綫 $pl = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$, 对于这些数值, $\tan pl$ 变成无限大. 式(d)的根現在求得为上面这些曲綫与直綫 $y = pl$ 之交点的横坐标. 这样求得的最小根为

$$pl = 4.493.$$

于是

$$P_{cr}=p^2EI=\frac{20.19EI}{l^2}\approx\frac{\pi^2EI}{(0.7l)^2}. \tag{139}$$

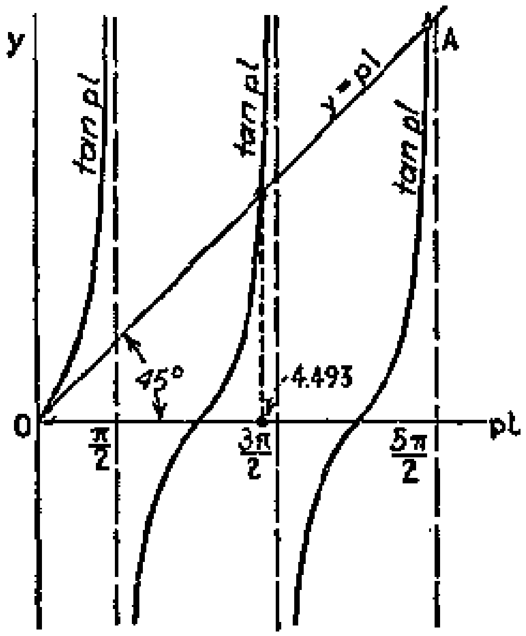


图 103

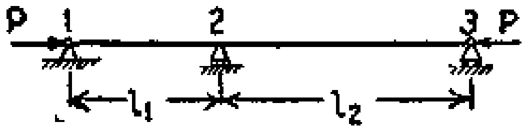


图 104

因此临界載荷与計算长度为 $l_1=0.7l$ 的鉸支端支柱的相同。

我們来研究一被作用在中心的力 P 所压縮的三支点支柱(图 104)作为第二个例子。在計算压縮力的临界値时，我們継續用我們前面的定义，并設 P_{cr} 为能使支柱保持为微弯形状的力。由于屈曲之故，在中間支座[1]上将有一弯矩 M_2，此弯矩可由对連續支柱导出的式(38)算得。考虑到在我們的情形下支柱的两端均为鉸支，得 $M_1=M_3=0$，而式(38)变成

$$\left(\beta_1\frac{l_1}{I_1}+\beta_2\frac{l_2}{I_2}\right)M_2=0. \tag{e}$$

如果

$$\beta_1\frac{l_1}{I_1}+\beta_2\frac{l_2}{I_2}=0, \tag{f}$$

此方程式就可滿足，而支柱就有可能成屈曲形状。这些方程式中所用的符号如下[参看式(36)或(23)]：

$$\beta_1=3\left[\frac{1}{(2u_1)^2}-\frac{1}{2u_1\tan 2u_1}\right],$$

$$\beta_2=3\left[\frac{1}{(2u_2)^2}-\frac{1}{2u_2\tan 2u_2}\right] \tag{g}$$

1) 两个跨距相等而截面沿全长不变的平凡情形为例外。这时在中間支座上$M_2=0$，而每一跨距均与两端鉸支的支柱的情形相同。

和

$$u_1=\frac{l_1}{2}\sqrt{\frac{P}{EI_1}},\quad u_2=\frac{l_2}{2}\sqrt{\frac{P}{EI_2}}. \tag{h}$$

如果支柱的尺寸为已知，比值 $u_1:u_2$ 就可由式(h)求得，而根据式(f)比值 $\beta_1:\beta_2$ 为

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}=-\frac{l_2}{l_1}\frac{I_1}{I_2}. \tag{i}$$

有了函数 β 的数值表，我們就能很快解出此方程式以求得适当的 u_1 和 u_2 值. 于是 P 的临界值可由式(h)求得.

例如，取 $I_1=I_2=I$ 和 $l_2=2l_1$. 于是 $u_2=2u_1$ 和

$$\frac{\beta_1}{\beta_1}=-2. \tag{j}$$

为了解此方程式，我們必須求出自变量为 $2u$ 的 $2u_1$ 值，以使在将其加倍后，函数 β 变号并在自变量 $2u_1$ 下減小到它数值的一半. 运用 β 的数值表[1]，我們立刻发現，如果

$$2u_1=1.93,$$

就可滿足此条件. 于是，由式(h)得

$$P_{cr}=\frac{1.93^2EI}{l_1^2}=\frac{3.72EI}{l_1^2}=\frac{14.9EI}{l_2^2}.$$

可以看出，临界載荷之值介于 π^2EI/l_1^2 和 π^2EI/l_2^2 两值之間，这两个值是对单独的跨距把它們均看作两端鉸支的支柱时算得的. 由于較长跨距的作用，較短跨距的稳定性減小，而較长跨距的稳定性則增大.

习　　題

1. 試解 §29 題 1，如設杆的一端为鉸支，而另一端为固定，如图 102 所示.

2. 試确定使图 105 所示矩形框架的垂直构件受压縮的力 P 之临界值.

---

1) 这样的表列于作者的"弹性稳定理論"(科学出版社，1958)一书中.

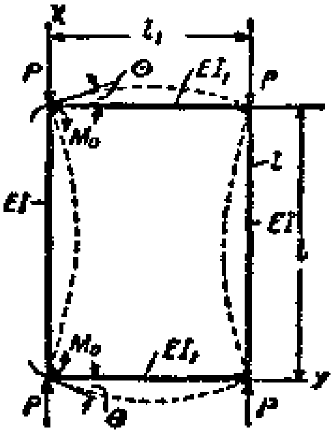


图 105

解. 图 105 所示的对称屈曲引起反作用弯矩 M_0, M_0 阻止垂直构件的两端作自由旋轉。垂直构件的挠度曲綫微分方程式为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py + M_0.$$

此方程式的通解为

$$y = C_1\cos px + C_2\sin px + \frac{M_0}{P}. \quad \text{(k)}$$

积分常数和弯矩 M_0 根据屈曲框架的对称形式（图 105）由下列条件确定：

$$(y)_{x=0} = 0;\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l/2} = 0;$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \theta = \frac{M_0 l_1}{2EI_1}.$$

将式(k)的 y 值代入，得

$$C_1 + \frac{M_0}{P} = 0;\ -C_1 p\sin\frac{pl}{2} + C_2 p\cos\frac{pl}{2} = 0;\quad C_2 p = \frac{M_0 l_1}{2EI_1}.$$

由这些方程式得出下列用以确定 p 和临界载荷的超越方程式：

$$\tan\frac{pl}{2} + \frac{Pl_1}{2pEI_1} = 0,$$

或运用 §29 中式(c)的記号，得

$$\tan\frac{pl}{2} + \frac{I}{I_1}\frac{l_1}{l}\frac{pl}{2} = 0. \quad \text{(l)}$$

当 $(I/I_1)(l_1/l)$ 很大时，即框架的水平构件对垂直构件屈曲的阻力很小时，$\tan(pl/2)$ 为一很大的負数，因此 $pl/2$ 接近于 $\pi/2$。于是临界載荷接近于前面对两端鉸支的杆求得之值 π^2EI/l^2[式(132)]。

当 $(I/I_1)(l_1/l)$ 很小时，即框架的水平构件对垂直构件屈曲的阻力非常大时，$\tan(pl/2)$ 为一很小的負数，因此 $pl/2$ 接近于 π。于是临界載荷接近于前面对两端固定的杆求得之值 $4\pi^2EI/l^2$ [式(133)]。

对于各构件截面相同 ($l = l_1$, $I = I_1$) 的方形框架，用以确定临界载荷的方程式变成

$$\tan\frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} = 0,$$

从而得

$$\frac{pl}{2} = 2.029,$$

$$P_{cr} = \frac{16.47EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.774l)^2}. \qquad \text{(m)}$$

所以这时折合长度等于 $0.774l$。（这时也可用与图 103 类似的曲綫。）

3. 試解上題，如設除了垂直力 P 外，还有使框架的水平构件受压縮的两对水平力 Q。

提示. 由于水平杆件受压縮，因此图 105 所示的旋轉角 θ 为[1]

$$\theta = \frac{M_0 l_1}{2EI_1}\frac{\tan u}{u},$$

式中

$$u^2 = \frac{Ql_1^2}{4EI_1}.$$

以 $I_1 u/\tan u$ 代題 2 式(l)中的 I_1，可得用以計算 P 的临界值的方程式。

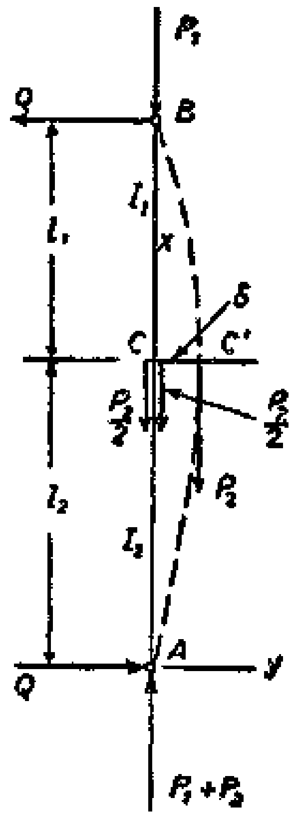


图 106

4. 有一两端鉸支的支柱 AB（图 106）受两个压縮力 P_1 和 P_2。如果 $(P_1 + P_2)/P_1 = m$, $I_2/I_1 = n$, 和 $l_2/l_1 = r$, 試求力 $P_1 + P_2$ 的临界值。

解. 設支柱的屈曲形状如图106中虚綫所示，在屈曲时将引起水平反力 $Q = \delta P_2/l$。撓度曲綫上下两段的微分方程式各为

1) 旋轉角 θ 可由式(48)以 ui 代 u 而求得。

$$EI_1\frac{d^2y_1}{dx^2}=-P_1y_1-\frac{\delta P_2}{l}(l-x),$$

$$EI_2\frac{d^2y_2}{dx^2}=-P_1y_2-\frac{\delta P_2}{l}(l-x)+P_2(\delta-y_2). \tag{n}$$

运用記号

$$\frac{P_1}{EI_1}=p_1^2,\ \frac{P_2}{EI_2}=p_2^2,\ \frac{P_1+P_2}{EI_2}=p_3^2,\ \frac{P_2}{EI_1}=p_4^2, \tag{o}$$

求得式(n)的解如下:

$$y_1=C_1\sin p_1x+C_2\cos p_1x-\frac{\delta}{l}\frac{p_4^2}{p_1^2}(l-x),$$

$$y_2=C_3\sin p_3x+C_4\cos p_3x+\frac{\delta}{l}\frac{p_2^2}{p_3^2}x.$$

积分常数可由屈曲杆件两段的端点条件求得:

$$(y_1)_{x=l}=0,\ (y_1)_{x=l_2}=\delta,\ (y_2)_{x=l_2}=\delta,\ (y_2)_{x=0}=0.$$

由这些条件得

$$C_1=\frac{\delta(p_1^2l+p_4^2l_1)}{p_1^2l(\sin p_1l_2-\tan p_1l\cos p_1l_2)},\ C_2=-C_1\tan p_1l$$

$$C_3=\frac{\delta(p_3^2l-p_2^2l_2)}{p_3^2l\sin p_3l_2},\ C_4=0.$$

代入連續条件

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_2}=\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=l_2},$$

得下列用以計算临界載荷的超越方程:

$$\frac{p_4^2}{p_1^2}-\frac{p_1^2l+p_4^2l_1}{p_1\tan p_1l_1}=\frac{p_2^2}{p_3^2}+\frac{p_3^2l-p_2^2l_2}{p_3\tan p_3l_2}, \tag{p}$$

对于任何特定情形,它均可用試算法解出,也可以用描繪方程式的左右两边,并确定两根曲綫之交点的方法解出. 以 $l_1=l_2, I_1=I_2=I$ 和 $P_1=P_2$ 作为一例,得

$$(P_1+P_2)_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(0.87l)^2}.$$

5. 有一立柱由慣性矩各为 I_1 和 I_2 的两个稜柱段組成,其底部固定而其頂端为自由(图 107),試求此立柱的临界載荷.

解. 如 δ 为柱顶的撓度，則撓度曲綫两段的微分方程式各为

$$EI_1\frac{d^2y_1}{dx^2}=P(\delta-y_1),$$

$$EI_2\frac{d^2y_2}{dx^2}=P(\delta-y_2).$$

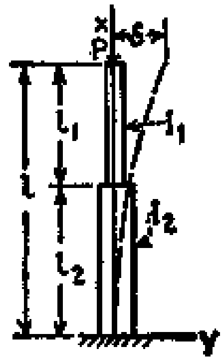


图 107

利用式(o)的記号，則此两方程式的解各为

$$y_1=\delta+C\cos p_1x+D\sin p_1x,$$

$$y_2=\delta(1-\cos p_2x).$$

积分常数可由下列条件求得：

$$(y_1)_{x=l}=\delta,\ (y_1)_{x=l_2}=(y_2)_{x=l_2},$$

由此得

$$\delta+C\cos p_1l+D\sin p_1l=\delta,$$

$$\delta+C\cos p_1l_2+D\sin p_1l_2=\delta(1-\cos p_2l_2),$$

从而得

$$C=-D\tan p_1l,\ D=\frac{\delta\cos p_2l_2\cos p_1l}{\sin p_1l_1}.$$

由于两段撓度曲綫在 $x=l_2$ 处具有同一切綫，因此得下列方程式：

$$\delta p_2\sin p_2l_2=-Cp_1\sin p_1l_2+Dp_1\cos p_2l_2.$$

将上面的 C 和 D 値代入，最后得下列用以計算 P_{cr} 的方程式：

$$\tan p_1l_1\tan p_2l_2=\frac{p_1}{p_2}. \tag{q}$$

在两段柱相同的特殊情形下，得

$$p_1l_1=p_2l_2=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}},$$

而式(q)变成

$$\tan^2\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)=1\ \text{或}\ \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}=\frac{\pi}{4}$$

和

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4l^2}.$$

此即等截面柱的临界載荷.

§ 31. 計算临界压縮載荷的能量法[1]. 在 § 29 中导出的欧拉公式是解出了已知端点条件的受压构件撓度曲綫微分方程式而得到的. 对于其他情形,此方程式很复杂,要得精确解很困难. 于是我們可运用一近似方法,此法以研究系統的能量为根据.

研究一底部固定而頂端受一載荷的柱(图 97a 和 b)作为一簡单的例子. 如果压縮力 P 很小,則压杆的直形平衡是**穩定**的. 但是在 P 达到其临界値时,也就是开始发生横向屈曲时,則平衡是**不穩定**的. 比較下面两种情形下系統的能量就可求得 P 的这一临界値: (1)当杆受簡单**压縮**时和(2)当它受**压縮和弯曲**时. 弯杆中的应变能較直形压杆中的大, 因为弯曲能必須加到压縮能上去. 当横向撓度很小时,它可以看作常数. 載荷 P 的位能也必須加以考慮. 杆的撓曲同时引起載荷 P 作用点的降低, 因此載荷的位能減小. 令 U 为弯曲应变能而 U_1 为載荷位能的減量. 于是, 如果 U_1 小于 U, 則杆的撓曲同时引起系統位能的增大. 这說明,为了引起弯曲,必須施加一附加的横向力. 对于这一情形,直形平衡是**穩定**的. 另一方面,如果 $U_1 > U$, 則杆的撓曲同时引起系統位能的減小,而弯曲将在无任何横向力作用下发生,即此时直形平衡是**不穩定**的. 因此,压縮力的临界値可由下列条件求得:

$$U = U_1. \tag{140}$$

为了根据此式計算临界載荷的大小,我們必須要有 U 和 U_1 的表达式. 由第 130 頁式(f)得,杆受大小等于临界載荷的压縮載荷 $(pl = \pi/2)$ 作用时的撓度曲綫为

$$y = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right). \tag{a}$$

有了这个 y 値,弯曲应变能的表达式就变成

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{\delta^2\pi^4}{64l^3} EI. \tag{b}$$

---

1) 参看作者的論文, *Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1910 和 *Ann. ponts et chaussées*, 1913.

弯曲时載荷作用点降低了(参看第 45 頁)

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{\delta^2\pi^2}{16l}, \tag{c}$$

因此

$$U_1 = P\lambda = \frac{\delta^2\pi^2 P}{16l}. \tag{d}$$

将式(b)和(d)代入基本方程式(140),得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

此与前面所得的式(131)一致.

在此例中,撓度曲綫[式(a)]已預先得知，因此临界載荷的精确解由式(140)求得. 对于撓度曲綫为未知的情形,可假設一**合适曲綫**(即能满足杆两端条件的曲綫)作为撓度曲綫，并与上面所述的完全一样进行,就可求得临界載荷的近似值.

为了表明运用此法时所能达到的精确度,仍研究上面的問題. 例如,对于图 97b 所示的情形,設撓度曲綫与端点受一横向力 Q 的悬臂情形相同. 于是由原书上卷第 150 頁式(97)得 $y=(Qx^2/6EI)\cdot(3l-x)$. 将此表达式代入表示弯曲应变能的式(b)以及表示 U_1 的式(d),得

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{Q^2l^3}{6EI},$$

$$U_1 = P\lambda = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{P}{15}\frac{Q^2l^5}{(EI)^2}.$$

代入式(140),得 $P_{cr}=2.5EI/l^2$. 将此結果与精确公式[式(131)]作一比較,我們看出,用近似法所生的誤差只有 1 % 左右.

如果我們取弯曲应变能的表达式为

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 dx, \tag{e}$$

就可使誤差大大減小而得一更为近似之值. 将

$$M = P(\delta - y) = P\left[\delta - \frac{Qx^2}{6EI}(3l - x)\right] =$$

$$= P\delta\left[1 - \frac{x^2}{2l^3}(3l - x)\right] \tag{f}$$

代入此表达式得

$$U = \frac{P^2\delta^2}{2EI}\frac{17l}{35}.$$

載荷 P 的位能減少量为

$$U_1 = \frac{P}{15}\cdot\frac{Q^2l^5}{(EI)^2} = \frac{3P}{5}\frac{\delta^2}{l}.$$

代入式(140),得

$$\frac{P^2\delta^2}{2EI}\frac{17l}{35} = \frac{3P}{5}\frac{\delta^2}{l},$$

从而得

$$P_{cr} = \frac{42}{17}\cdot\frac{EI}{l^2} = 2.4706\frac{EI}{l^2}.$$

精确値为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 2.4674\frac{EI}{l^2}.$$

因此,近似解的誤差只有 0.13%. 对于应变能，在用式(e)代替式(b)时,我們在計算中引入了假設曲綫的撓度 y 以代替导数d^2y/dx^2. 由于 y 用所假設的曲綫来表示时較 d^2y/dx^2 为精确，因此第二种計算方法所得的 P_{cr} 是更好的近似.

如果所假設的曲綫选择得适当，能量法通常得出一极为滿意的近似値. 有时，我們对曲綫的形状作了非常粗略的假設而仍得到滿意的結果. 例如,我們可假設上例中的撓度曲綫为一用下式表示的拋物綫:

$$y = \frac{\delta x^2}{l^2}.$$

于是

$$U = \int_0^l \frac{M^2dx}{2EI} = \frac{P^2\delta^2}{2EI}\int_0^l\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{P^2\delta^2}{2EI}\frac{8}{15}l,$$

$$U_1 = \frac{P}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{2}{3}\frac{\delta^2}{l}P.$$

将这些値代入式(140),得

$$\frac{P^2\delta^2}{2EI}\frac{8}{15}l = \frac{2}{3}\frac{\delta^2}{l}P$$

和

$$P_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}.$$

因此，虽然所假設的抛物綫不能当作一极为滿意的曲綫，但对临界載荷还是得到了滿意的近似值．它沿全长有一近乎不变的曲率；而对眞实曲綫，曲率系与弯矩成正比，在杆頂为零，在底部則为最大值。

通过一滿足端点条件的假設曲綫来应用能量法时，我們求得的临界載荷之值始終較眞实之值为高．这是由屈曲杆件的眞实挠度曲綫即相应于杆的最小阻力曲綫这一事实而得出的．只有在极偶然的机会下，所假設的曲綫才是最小阻力的眞实曲綫．对于几乎每一种情形，所假設的曲綫均不同于最小阻力的曲綫，因此得出了高的临界載荷值[1]。

习 题

1. 試解图 102 所示的习題，如設挠度曲綫与一端固定而另一端鉸支的梁受均布載荷的情形相同．

2. 如設 $l_1=l_2=l/2$ 时，試应用能量法解 §30 的題 4（第 139 頁）．

解． 設挠度曲綫为一正弦曲綫，即

$$y = \delta \sin\frac{\pi x}{l},$$

曲綫两段的弯矩各为

$$M_1 = P_1 y + \frac{\delta P_2}{l}(l - x),$$

$$M_2 = (P_1 + P_2)y - \frac{\delta P_2 x}{l}.$$

弯曲应变能为

$$U = \int_{l/2}^{l}\frac{M_1^2 dx}{2EI_1} + \int_0^{l/2}\frac{M_2^2 dx}{2EI_2}$$

$$= \frac{\delta^2}{2EI_1}\left(P_1^2\frac{l}{4} + P_2^2\frac{l}{24} + P_1P_2\frac{2l}{\pi^2}\right) +$$

1) 关于能量法的深入討論，可參看作者的“弹性稳定理論”，科学出版社，1958．

$$+\frac{\delta^2}{2EI_2}\left[(P_1+P_2)^2\frac{l}{4}+P_2^2\frac{l}{24}-P_2(P_1+P_2)\frac{2l}{\pi^2}\right].$$

由于載荷 P_1 和 P_2 作用点的降低而引起的位能減少量为

$$U_1=\frac{P_1}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx+\frac{P_2}{2}\int_0^{l/2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=\frac{\delta^2\pi^2}{4l}\left(P_1+\frac{1}{2}P_2\right).$$

代入式(140)并运用前面的記号(第 139 頁),得

$$(P_1+P_2)_{cr}=$$

$$=\frac{(\pi^2EI_1/l^2)(m+1)}{m+\frac{m}{6}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-\frac{8}{\pi^2}(m-1)+n\left[\frac{1}{m}+\frac{m}{6}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\frac{8}{\pi^2}\frac{m-1}{m}\right]}. \tag{141}$$

3. 試应用能量法解 §30 的題 5.

答. 設撓度曲綫

$$y=\delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right),$$

得

$$P_{cr}=\pi^2\frac{EI_2}{4l^2}\cdot\frac{1}{\frac{l_2}{l}+\frac{l_1}{l}\frac{I_2}{I_1}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)\sin\frac{\pi l_2}{l}}. \tag{142}$$

§ 32. 稜柱杆在均布軸向力作用下的屈曲. 假設在均布軸向載荷的作用下发生微小的横向屈曲(图108),我們可由撓度曲綫微分方程式的积分求得載荷的临界值. 对于此情形,方程式不如我們前面所得的簡单,要得其精确解需要运用貝塞尔函数[1]. 可是如用了能量法就可很快求得其近似解.

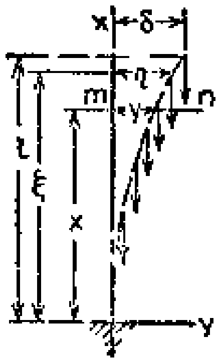


图 108

我們取

$$y=\delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{a}$$

作为撓度曲綫的近似表达式,对于受作用在一端的压縮載荷而发生屈曲的情形,此为眞实曲綫. 在截面 mn 处由該截面以上的載

1) 參看作者的"彈性穩定學論",科学出版社,1958.

荷产生的弯矩为

$$M=\int_x^l q(\eta-y)d\xi.$$

将式(a)的 y 代入，并令

$$\eta=\delta\left(1-\cos\frac{\pi\xi}{2l}\right),$$

对 ξ 积分后得

$$M=\delta q\left[(l-x)\cos\frac{\pi x}{2l}-\frac{2l}{\pi}\left(1-\sin\frac{\pi x}{2l}\right)\right].$$

将此代入弯曲应变能的表达式，得

$$U=\int_0^l\frac{M^2dx}{2EI}=\frac{\delta^2q^2l^3}{2EI}\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{\pi^2}-\frac{32}{\pi^3}\right).\qquad\text{(b)}$$

在計算横向屈曲中分布载荷的位能減少量时，我們看出，由于在截面 mn 处挠度曲綫微段 ds 的傾斜，上面这部份载荷受一向下的位移，其大小等于

$$ds-dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx,$$

而相应的位能減少量为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2q(l-x)dx.$$

于是屈曲时载荷位能的总減少量为

$$U_1=\frac{1}{2}q\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(l-x)dx=\frac{\pi^2\delta^2q}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right).\qquad\text{(c)}$$

将式(b)和(c)代入式(140)，得

$$\frac{\delta^2q^2l^3}{2EI}\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{\pi^2}-\frac{32}{\pi^3}\right)=\frac{\pi^2\delta^2q}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right),$$

从而得

$$(ql)_{cr}=\frac{7.89EI}{l^2}.$$

对于此情形，精确解为

$$(ql)_{cr}=\frac{7.83EI}{l^2}=\frac{\pi^2EI}{(1.122l)^2}.\qquad(143)$$

因此，近似解的誤差小于 1 %。

习　　題

1. 有一两端鉸支的稜柱杆（图 109），承受一強度为 q 的均布軸向載荷和一軸向压縮力 P 的作用。如設撓度曲綫的方程式为

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

試求 P 的临界值。

答.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} - \frac{ql}{2}.$$

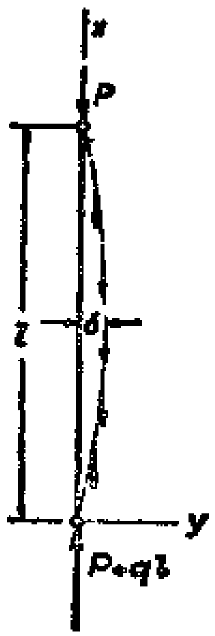


图 109

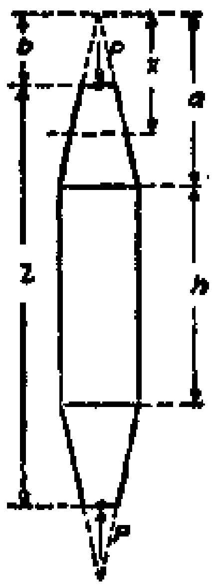


图 110

§ 33. 变截面杆的屈曲. 图 110 表示一对称于中央并具有两个軸向对称面的变截面杆。杆的中段是等截面的，其較小的惯性矩等于 I_0。杆的两头是变截面的，其較小的惯性矩按下列規律变化：

$$I = I_0 \left(\frac{x}{a}\right)^m, \tag{a}$$

式中 x 和 a 为离一固定点的距离（图 110），而 m 为决定于柱的形式的数字。当中段为实心圓柱而两端为实心圓錐时，I 随 x 的四次方而变化，即式(a)中 $m = 4$。当柱在垂直于图 110 平面的方向

內的厚度不变时，对平行于图面的軸綫的慣性矩 I 与 x 成正比，即式(a)中 $m=1$. [当柱由格子連接起来的四个角鋼組成时，(图111)，則截面积保持不变，而 I 可取为正比于 x^2，因此在式(a)中 $m=2$.] 由对 $m=1, 2, 3, 4$ 所作的計算知[1)]，在弹性极限內的临界載荷可用下式表示：

$$P_{cr}=\alpha\frac{EI_0}{l^2},\tag{144}$$

表 9　式(144)中的系数 α

I_1/I_0	b/l		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.1	m	1	6.48	7.58	8.68	9.46	9.82	π^2
		2	5.40	6.67	8.08	9.25	9.79	π^2
		3	5.01	6.32	7.84	9.14	9.77	π^2
		4	4.81	6.11	7.68	9.08	9.77	π^2
0.2	m	1	7.01	7.99	8.91	9.63	9.82	π^2
		2	6.37	7.49	8.61	9.44	9.81	π^2
		3	6.14	7.31	8.49	9.39	9.81	π^2
		4	6.02	7.20	8.42	9.38	9.80	π^2
0.4	m	1	7.87	8.60	9.19	9.70	9.84	π^2
		2	7.61	8.42	9.15	9.63	9.84	π^2
		3	7.52	8.36	9.10	9.63	9.84	π^2
		4	7.48	8.33	9.10	9.62	9.84	π^2
0.6	m	1	8.60	9.12	9.55	9.74	9.85	π^2
		2	8.51	9.03	9.48	9.74	9.85	π^2
		3	8.50	9.02	9.47	9.74	9.85	π^2
		4	8.47	9.01	9.45	9.74	9.85	π^2
0.8	m	1	9.27	9.54	9.69	9.83	9.86	π^2
		2	9.24	9.50	9.69	9.82	9.86	π^2
		3	9.23	9.50	9.69	9.81	9.86	π^2
		4	9.23	9.49	9.69	9.81	9.86	π^2
1			π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

1) 参看 A. N. Dinnik, *Bull. Engrs.* (*Вестник Инженеров*), 1927 (俄文版). 表 9 系取自此論文.

式中 α 为一决定于比值 h/l 和 I_1/I_0 的数字系数，此处 $I_1=I_0(b/a)^m$ 为端截面的惯性矩．設柱的两端为鉸支，表 9 列出了各种比值下 α 的大小． 可以看出，当比值 h/l 或比值 I_1/I_0 趋近于 1 时，系数 α 趋近于 π^2，而式(144)趋近于稜柱杆的式(132)．

研究一个 6.6 呎长的木制矩形截面支柱作为应用此表的一例．支柱的厚度保持不变，其大小等于 3/4 吋．寬度按綫性規律变化，在中央为 4 吋而在两端为 2.4 吋．如果 $E=1.2\times10^6$ 磅/吋²时，来确定 P_{cr}．对于此情形，$h/l=0$，$m=1$ 和 $I_1/I_0=(2.4)/4=0.6$．由表 9 得 $\alpha=8.60$，而由式(144)得临界载荷为

$$P_{cr}=8.60\,\frac{1.2\times10^6\times4\times3^3}{4^3\times12\times78^2}=239\text{ 磅}.$$

我們来研究一稜錐形柱(图 111)作为第二个例子，稜錐形柱的正方截面由四个 $3\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}$ 吋的角鋼組成．柱的外边寬度在两端为 12 吋，而在中央則为 $20\frac{1}{2}$ 吋．柱的长度为 65 呎．对于結构鋼取 $E=30\times10^6$ 磅/吋²，并設格子杆的刚度足够大，以致可以应用对实心杆导出的式(144)，要确定此柱的临界载荷．今截面积为 $A=2.48\times4=9.92$ 吋²；此外 $I_1=2.9\times4+2.48\times4\times(6-1.01)^2=259$ 吋⁴；$I_0=2.9\times4+2.48\times4\times(10.25-1.01)^2=860$ 吋⁴．取 $I_1/I_0=0.3$，近似地 $m=2$，和 $h/l=0$，我們由表 9 用内插法近似地求得 $\alpha=7$．于是由式(144)得

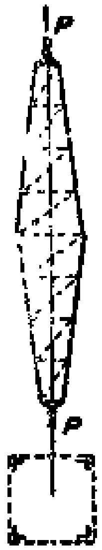


图 111

$$P_{cr}=7\times\frac{30\times10^6\times860}{65^2\times12^2}=297000\text{ 磅}.$$

§ 34. 剪力对临界載荷的影响． 在前面推导临界載荷的方程式时，我們运用了挠度曲綫的微分方程式(参看第 129 頁)，式中忽略了剪力对挠度的影响． 但是当发生屈曲时，杆的截面不再与压縮力垂直，而将有剪力作用在这些截面上．这些力的影响可用 §31 中所发展的能量法来求．运用此法来計算由于屈曲而产生的应变能 U 时，必須将

剪切能与弯曲能相加．以 AB（图 112）表示一两端鉸支的实心支柱，它在压縮力 P 的作用下发生屈曲．在任意截面 mn 处，弯矩和剪力的大小各为

$$M = Py;\quad V = P\frac{dy}{dx}. \tag{a}$$

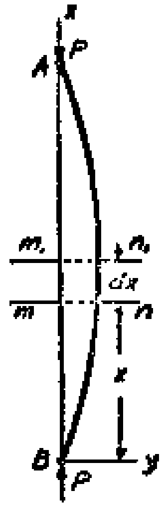


图 112

由前面的研究知（参看原书上卷第 69 节），杆的体元中所儲的位能为

$$dU = \frac{M^2dx}{2EI} + \frac{\alpha V^2dx}{2GA}, \tag{b}$$

式中

A = 截面积，

α = 决定于截面形状的数字系数（参看原书上卷第 171 頁）．由于剪切而引起的截面 mn 对截面 m_1n_1 的位移可取为 $(\alpha V/GA)dx$，式(b)右边第二項表示体元中所儲的剪切位能．运用式(a)和(b)，屈曲时支柱中所儲的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{P^2y^2dx}{2EI} + \int_0^l \frac{\alpha P^2}{2GA}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{c}$$

載荷 P 的位能減少量为

$$U_1 = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{d}$$

設屈曲支柱的撓度曲綫为一正弦曲綫，即

$$y = \delta \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{e}$$

将此值代入式(c)和(d)，得

$$U = \delta^2\frac{P^2l}{4EI} + \delta^2\frac{P^2l}{4GA}\frac{\alpha\pi^2}{l^2},$$
$$U_1 = \delta^2\frac{P\pi^2}{4l}. \tag{f}$$

于是由式(140)得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{l^2}\frac{1}{1+\dfrac{EI}{GA}\dfrac{\alpha\pi^2}{l^2}}. \tag{g}$$

与欧拉公式［式(132)］作一比較可知，由于剪切的作用，临界载荷

按下列比值减小:

$$\frac{1}{1+\frac{EI}{GA}\frac{\alpha\pi^2}{l^2}}. \tag{145}$$

如果我們令

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2}=P_e;\quad \frac{GA}{\alpha}=P_d; \tag{h}$$

则式(g)变成

$$P_{cr}=P_e\frac{1}{1+\frac{P_e}{P_d}}. \tag{146}$$

对于实心杆，P_d 比起 P_e 来非常大，剪力的影响可以忽略不計. 对于格子杆，特别是用間隔板或狹板时(图 114a)，P_d 可能变成与 P_e 同級，这时剪力的影响就不再能忽略不計了. 此問題将在下节中研究.

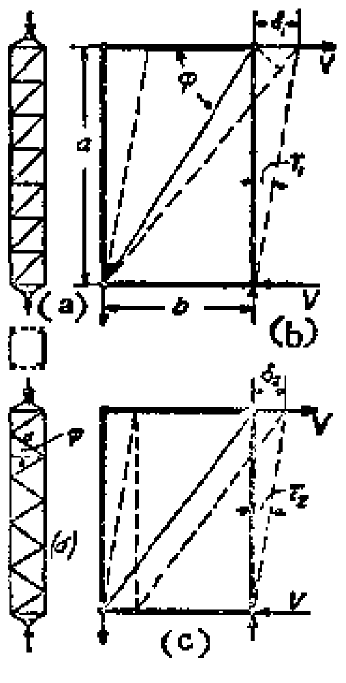


图 113

§ 35. 格子支柱的屈曲[1]. 在鋼結构中，有时要用到格子支柱. 它們的強度总是低于同样截面积和同样細长比 l/k 的实心柱，而与隔离格子杆的零件、間隔板及狹板大有关系. 临界应力的这种减低主要是因为，对于格子柱的情形，剪力对挠度所生的影响比起实心杆的情形要大得多之故. 在計算剪力对临界載荷的影响时，对实心杆导出的式(146)可将其应用于格子支柱. 同前面一样，令 P_e 为由式(132)求得的临界載荷. 对于实心支柱，式(146)中的 P_d 有一簡单的物理意义，即 V/P_d 表示挠度曲綫中由剪力所产生的附加斜率 γ. 对于

1) 参看 F. Engesser, *Zentr. Bauverwalt.*, p. 483, 1891 和 p. 609, 1907; L. Prandtl, *Z. Ver. deut. Ing.*, 1907 以及作者的論文, *Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1908. 这些論文討論了与奎貝克 (Quebec) 桥受压构件的崩潰有关的格子支柱屈曲問題.

格子支柱，如果格数很多时，P_d 也有同样的意义。因此在确定任意特定情形下的 P_d 时，我們必須研究由剪力所产生的横向位移。

首先研究图 113a 所示的格子杆的一格。剪切位移是由每一格內的对角綫和狹板的伸长与收縮所引起的(图 113b)。設連接处为鉸接，由剪力 V 引起的对角綫伸长量为 $Va/(\sin\varphi\cos\varphi EA_d)$，式中

$$\varphi = \text{狹板与对角綫之間的夹角},$$
$$V/\cos\varphi = \text{对角綫中的拉力},$$
$$a/\sin\varphi = \text{对角綫长度},$$
$$A_d = \text{两对角綫的截面积}.$$

相应的横向位移(图 113b)为

$$\delta_1 = \frac{Va}{\sin\varphi\cos^2\varphi EA_d}. \tag{a}$$

狹板的縮短量和相应的横向位移(图 113c)为

$$\delta_2 = \frac{Vb}{EA_b}, \tag{b}$$

式中

$$b = \text{狹板长度},$$
$$A_b = \text{两狹板的截面积}.$$

由式(a)和(b)得，剪力 V 产生的角位移为

$$\gamma = \frac{\delta_1+\delta_2}{a} = \frac{V}{\sin\varphi\cos^2\varphi EA_d} + \frac{Vb}{aEA_b}.$$

于是运用上面所引用的定义 $V/P_d = \gamma$，得

$$\frac{1}{P_d} = \frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi EA_d} + \frac{b}{aEA_b}.$$

代入式(146)，得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{l^2}\frac{1}{1+\frac{\pi^2EI}{l^2}\left(\frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi EA_d}+\frac{b}{aEA_b}\right)}. \tag{147}$$

如果截面积 A_d 及 A_b 比起槽鋼的截面积来非常小时(图 113a)，临界載荷[式(147)]就可能大大地小于由欧拉公式[式(132)]所求得

者.

如果角φ的测量如图113d所示，以及式(147)中关于狭板变形的这一项可忽略时，则式(147)也可用于图113d所示的情形.

对于支柱单独由狭板所組成的情形，如图114a所示，为了求得剪力V所产生的横向位移，我們必須研究用截面mn和m_1n_1切出的这段支柱的变形. 設槽鋼挠度曲綫的拐点是在这些截面处，弯曲的情形将如图114b所示.(作用在槽鋼上的拉力和压縮力在图上未示出.)挠度由两部分組成：由于狭板弯曲而产生的位移δ_1和由于槽鋼弯曲而产生的位移δ_2. 在狭板的两端有力偶$Va/2$，而轉角θ[参看原书上卷第158頁式(103)和(104)]为

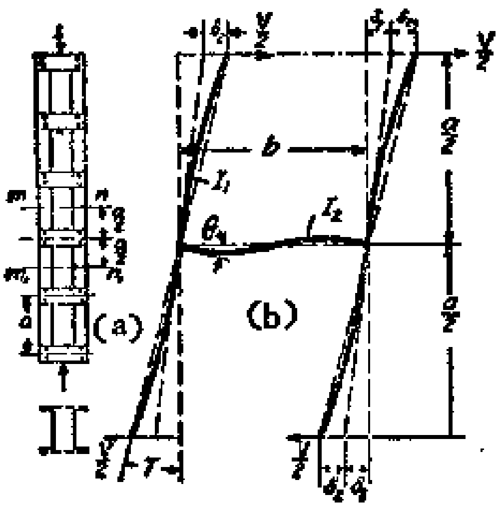


图 114

$$\theta=\frac{Va}{2}\frac{b}{3EI_2}-\frac{Va}{2}\frac{b}{6EI_2}=\frac{Vab}{12EI_2},$$

式中b为狭板长度，而EI_2为其弯曲刚度. 由于狭板弯曲而产生的横向位移δ_1为

$$\delta_1=\theta\frac{a}{2}=\frac{Va^2b}{24EI_2}. \tag{c}$$

位移δ_2可由悬臂公式算得，即

$$\delta_2=\frac{V}{2}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3EI_1}=\frac{Va^3}{48EI_1}. \tag{d}$$

由剪力V所产生的总角位移为

$$\gamma=\frac{\delta_1+\delta_2}{\frac{a}{2}}=\frac{Vab}{12EI_2}+\frac{Va^2}{24EI_1};$$

因为 $V/P_d=\gamma$，于是得

$$\frac{1}{P_d}=\frac{ab}{12EI_2}+\frac{a^2}{24EI_1},$$

而用以确定临界载荷的式(146)变成:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}\frac{1}{1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(\frac{ab}{12EI_2}+\frac{a^2}{24EI_1}\right)},\tag{148}$$

同前面一样，式中 π^2EI/l^2 表示由欧拉公式算得的整个柱的临界载荷. 可以看出,当狭板的弯曲刚度很小时,眞实的临界载荷比欧拉公式所算得的要小得多.

从式(147)和(148)中我們看出,在計算組合柱的临界載荷时,对于图 113 中的格子柱，应以由下式确定的**折合长度**代替柱的眞实长度:

$$l_1=l\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(\frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi EA_d}+\frac{b}{aEA_b}\right)},$$

对于如图 114 所示的狹板柱，則应以由下式确定的**折合长度**代替柱的眞实长度:

$$l_1=l\sqrt{1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(\frac{ab}{12EI_2}+\frac{a^2}{24EI_1}\right)}.$$

当組合柱的折合长度已确定时，可对細长比为 l_1/k 的实心柱求得許用应力.

在設計組合柱时，确定格子杆和狭板的适当尺寸在实用上大为重要. 作为确定这些零件中应力的依据,在設計短柱时,必須假設压縮力是偏心作用的[1]. 如果两端的偏心距均等于 e 但方向相反，則压縮力 P 形成一大小为 $2Pe$ 的力偶，此力偶在支柱的两端产生剪力

$$V=\frac{2Pe}{l}.\tag{149}$$

1) 此問題在 D. H. Young 的論文 (參看 *Proc. Am. Soc. Civil. Engrs.*, Dec. 1934)和他的另一論文(*Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg.*, Zürich, vol. 2, p. 480, 1934)中有較詳細的討論. 幷参看作者的"弹性稳定理論",科学出版社, 1958; 和 Friedrich Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, New York, p. 167, 1952.

在此方程式中，以柱可以承受的最大載荷 P_{cr} 代 P 就可求得 V 的最大值。偏心距 e 通常取为核心半径 r 的分数，例如 $e/r=0.3$。于是設計零件时，应使其中由 V_{max} 所产生的最大应力不超过屈服点应力。

对于刚性連接的桁架的受压格子构件，当桁架承受載荷时，在构件的两端会产生弯矩，如果这两个弯矩 M_1 和 M_2 均根据**副应力**分析而算得，則在压縮力 P 的作用点处，相应的偏心距 $e_1=M_1/P$ 和 $e_2=M_2/P$ 为已知，而在式(149)中必須以它們的代数和代替 $2e$。

§ 36. 直柱的非弹性屈曲. 在前面討論屈曲問題时，始終假設了柱的材料为完全弹性并服从胡克定律。我們現在假設材料虽为完全弹性，但不服从胡克定律，而压縮試驗图則如图 115a 所示。如果由这种材料制成的杆受一压应力(相应于图上的点 C)，然后应力发生微小的变化(正或負)，則应力的改变与应变的改变之間的关系就决定于初应力的大小。此关系由压縮試驗图上点 C 的斜

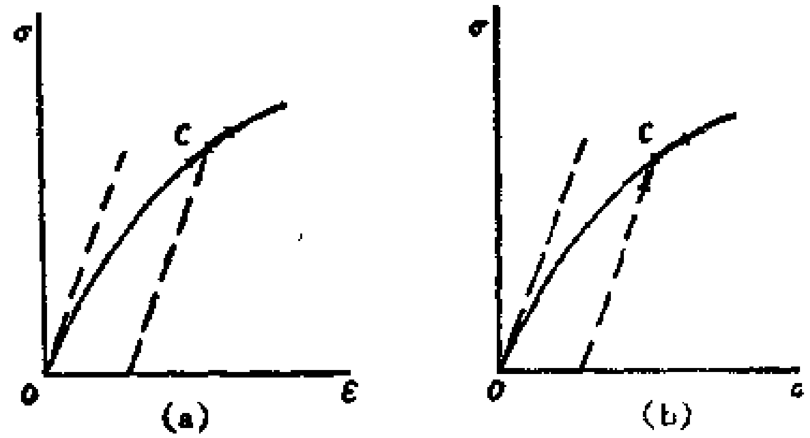


图 115

率表示，如图上的粗綫微段所示。比值 $d\sigma/d\varepsilon$ 的大小可作为材料的变化弹性模量，它可称为**正切模量**，以 E_t 表示之。

我們現在来研究一受軸向压縮的鉸支端棱柱杆(图 116a)，并假設材料的弹性性質如图 115a 中的曲綫所示。在确定此杆的临界載荷时，我們可以同前面一样进行，并假設施加力 P 后使杆产生一无限小的撓度。于是力 P_{cr} 可作为使杆保持此微弯形状所需的

力而算出．由于所假設的撓度为无限小，因此相应的弯应力比起初始压应力来很小，而弯应力与弯应变之間的关系可由相应的正切模量 E_t 值来确定。对于这一情形，撓度曲綫的微分方程式将与

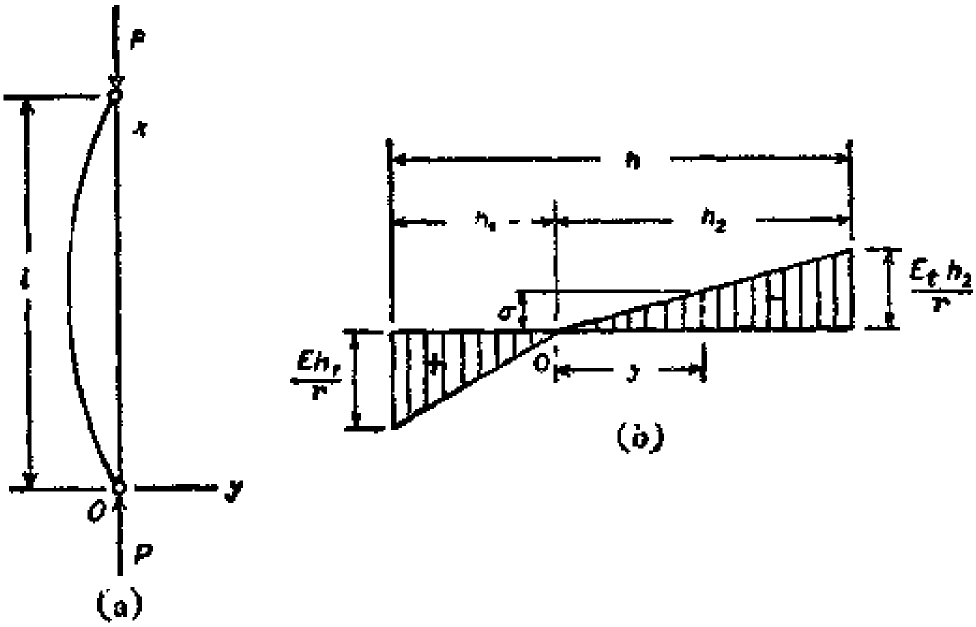


图 116

服从胡克定律材料的形式相同．只是以正切模量 E_t 代替了 E．由該式的积分得

$$P_{cr}=\frac{\pi^2E_tI}{l^2},\tag{150}$$

和

$$\sigma_{cr}=\pi^2E_t\frac{k^2}{l^2}.\tag{151}$$

这些公式与服从胡克定律材料的式(132)和(134)之間的差别只是正切模量 E_t 代替了不变模量 E，E_t 为直接应力 σ 的函数。

如果如图 115a 所示的压縮試驗图为已知，則对于任何 σ 值均可很快确定出 E_t 值．为了建立 σ_{cr} 与細长比 l/k 之間的关系，我們取一組 σ_{cr} 值与相应的 E_t 值，并将它們代入式(151)．于是此方程式确定出了相应的 l/k 值．运用了这些值，l/k 与 σ_{cr} 之間的关系就可用一与图 100 中对服从胡克定律材料求得的曲綫相类似的曲綫来表示。

对于材料不服从胡克定律的情形,計算 σ_{cr} 的这一方法是由安杰塞(F. Engesser)[1]所提出的,他还建議此法用于承受超过比例极限的压縮的金屬支柱. 但是对于此情形,問題較为复杂. 如果有一杆件承受超过弹性极限的压縮而产生一小撓度(图 116a),則凹面上的压縮应变增加,而应变与应力之間的关系可由正切模量 E_t 的大小定出. 同时凸面上的压縮应变减小,而对于这一情形,应力-应变关系可由模量的初值 E 定出. 因此对于具有两种不同模量,卽一为拉伸模量而另一为压縮模量的材料,情形是相同的. 相应的斜率在图 115b 中由两短粗綫微段表示. 設弯曲时杆的截面保持为平面,微小的弯应力可用图 116b 中所示的两个三角形来表示. 这些弯应力与均布的初始压縮应力相迭加. 如果 r 表示所研究的截面处撓度曲綫的曲率半径,則最大拉伸与压縮弯应力各为 Eh_1/r 和 E_th_2/r,而中性軸 O 的位置(图 116b)可由拉伸与压縮弯应力的合应力必須相等并必須产生一力偶以平衡弯矩 M 这一条件求得. 对于高度为 h 而寬度为 b 的矩形截面,这些条件要求

$$Eh_1^2 = E_th_2^2 \tag{a}$$

和

$$\frac{Eh_1}{r}\frac{bh_1}{2}\frac{2h}{3} = M. \tag{b}$$

鉴于 $h_1 + h_2 = h$,由式(a)得

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_t}}{\sqrt{E}+\sqrt{E_t}}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E}+\sqrt{E_t}}. \tag{c}$$

于是由式(b)得

$$\frac{1}{r}\frac{bh^3}{12}\frac{4EE_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2} = M. \tag{d}$$

引用記号

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}, \tag{152}$$

---

1) F. Engesser, *Z. Architekt. u. Ingenieurw.*, p.455, 1889. 并参看 Considère, *Congr. internat. procédés de construction*, Paris, vol. 3, p. 371, 1889.

由式(d)得

$$\frac{E_r I}{r} = M. \tag{153}$$

式(153)与材料服从胡克定律时的弹性曲綫方程式的形式相同。我們只須以式(152)所示的 E_r 代替模量 E 即可，E_r 称为**折合弹性模量**。用近似表达式 d^2y/dx^2 代 $1/r$ 并将式(153)积分，对于两端鉸支的杆(图 116a)，得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{l^2}, \tag{154}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E_r \frac{k^2}{l^2}. \tag{155}$$

将这些方程式与式(150)及(151)作一比較，我們看出，所不同者只是用折合模量 E_r 代替了安杰塞原来的式中所用的正切模量 E_t 而已。由于 $E_t < E$，从式(152)中可以看出 $E_r > E_t$[1]，因此由式(154)求得的 P_{cr} 值較由式(150)求得的为大。此增值是由于考虑了在所假設的弯曲中(图 116a)，杆凸面上的应变表示初始压縮应变的減量而造成的。因此应变硬化对弯曲有影响。图 117 所示的曲綫表示由式(151)和(155)算得的結构鋼矩形杆的 σ_{cr} 与 l/k 之

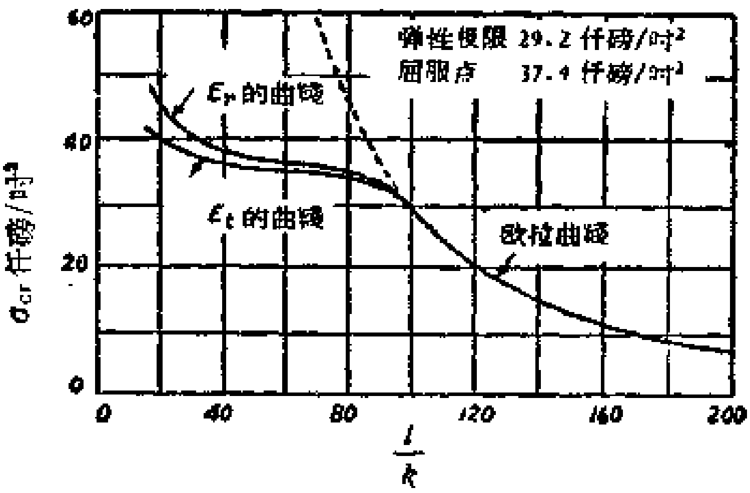


图 117

1) 可以看出，不仅对矩形杆这是眞实的，而且对具有任意对称截面而在对称面内弯曲的杆，这也是眞实的。

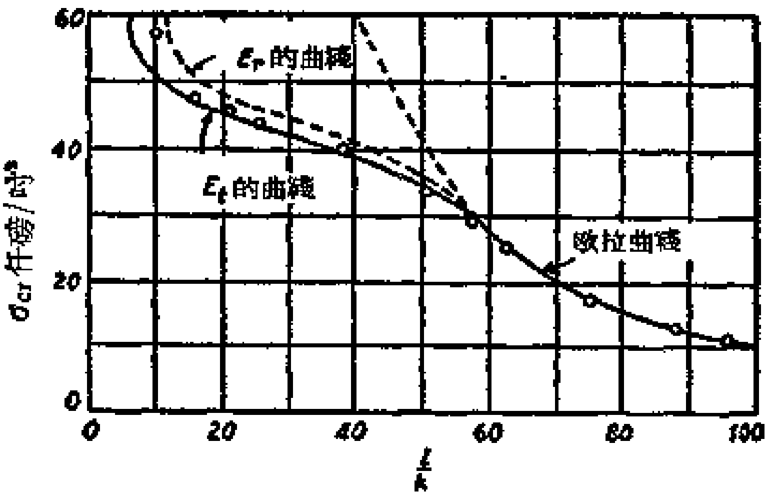


图 118

間的关系[1].

許多年来，工程师們运用了以析合模量 E_r 为根据的式(155)来研究如鋁合金和結构鋼等这些延性材料，并且由一些实驗知，試驗結果与式(151)較为符合. 例如，图 118 表示鋁合金实心圓杆的試驗結果[2]. 可以看出，当細长比的数值較大时，試驗結果与欧拉曲綫完全一致；对于較短的杆，則試驗結果与正切模量曲綫相当符合. 因此計算弹性范围內的 σ_{cr} 时所作的論証在超过弹性极限时就不能令人滿意，因为根据該法得出的 E_r 曲綫与試驗結果不符.

为了解释[3]此常用方法的失效，我們必須記住，在杆发生塑性变形时，撓度的大小不仅决定于作用力之值，而且还决定于这些力的作用次序. 以同时受压縮和弯曲的情形为例，图 119a. 如果变形为完全弹性时，則杆的撓度只决定于 P 和 M 的大小，与它們的作用次序无关. 如果在加載时产生塑性变形，情形就完全不同了. 例如，設首先施加軸向力 P，它們的大小使杆发生塑性变形. 如果現在施加力偶 M，則杆由力偶引起的弯曲将受材料內由 P 引起的

1) 图 117 和 118 均取自 F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1950.

2) 参看 R. L. Templin, R. G. Sturm, E. C. Hartmann 及 M. Holt 的論文, Aluminum Research Laboratories, Aluminum Company of America, Pittsburgh, 1938.

3) 此解释由 F. R. Shanley 所給出，*J. Aeronaut. Sci.*, vol. 14, p. 261, 1947.

冷作的影响. 此冷作现象必須予以計及,而在計算撓度时必須运用折合模量 E_r. 再来研究同时施加漸增载荷 P 与 M 的情形作为另一种加载方法. 例如，当杆件承受偏心作用的压縮力 P 时(如图 119b 所示),就得到这一加载情形. 这时,任何纵向纖維中的应变均不断增大，对于任何的加载阶段，应力与应变之間的关系均可由相应的正切模量 E_t 值定出.

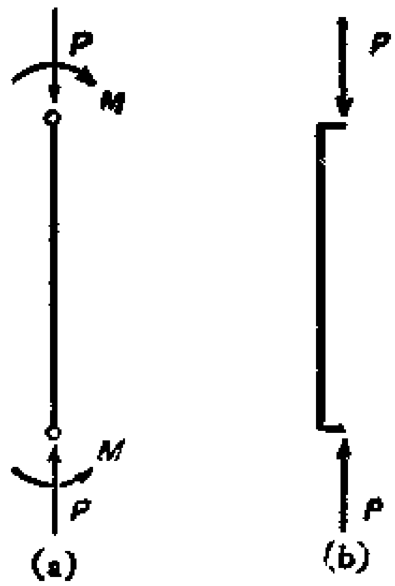


图 119

在柱的横向屈曲的实驗研究中，情形通常与图 119b 中的类似. 由于有不可避免的偏心，因此柱在初受载荷时立即开始弯曲. 可是，由于偏心距极小，因此在载荷开始接近其临界值的这一阶段以前,撓度可忽略不計. 在此最后阶段,撓度开始急剧增大,其大小可由相应于临界载荷的 E_t 值定出. 因此,由此研究得出，由安杰塞原来的式(151)求得的临界应力将比式(155)的精确,正如試驗結果所表明的那样.

前面对屈曲的基本情形（图 98）所进行的討論也可应用于如图 99 和 102 所示的其他屈曲情形. 临界应力可由式（137）以 E_t 代 E 而算得. 可是,在塑性范围內的屈曲問題一般較为复杂,因为端点条件和长度系数通常不是常数,而随 P_{cr} 值变化. 以图 105 所示的情形为例. 对于此情形，在弹性范围内的长度系数只决定于比值[参看 138 頁式(l)]

$$\frac{Il_1}{I_1 l}, \tag{e}$$

它与 P_{cr} 值无关. 但是在塑性范围内,必須用 E_t 代替 E，因而得到的不是比值(e)而是

$$\frac{E_t Il_1}{EI_1 l}, \tag{f}$$

式中 E_t 小于 E，且根据 P_{cr} 的大小而定． 于是框架的水平构件与垂直构件的弯曲刚度之比变得較大，因此在塑性范围内的长度系数变得較完全弹性时为小． 由此得出，如果在設計框架的垂直构件时，对于塑性区域我們运用了在完全弹性状态时算得的折合长度，我們将偏于安全． 对于 §§32、33 和 35 中所討論的情形也可得出同样的結論．

§ 37. 圓环和圓管在外压作用下的屈曲． 圓环的屈曲． 众所周知，圓环或圓管可能由于外压单独作用而引起崩潰． 如果环的弯曲刚度不够，就可能在远較材料的弹性极限为低的应力下发生这种破坏． 在設計承受外蒸汽压力的鍋炉管和設計潛艇的加固环等問題中，必須考慮此現象．

使圓形变成不穩定和引起屈曲的压力称为**临界压力**． 其値可用挠度曲綫的通用方程式[原书上卷第 404 頁式(235)]求得．

設环在外压的作用下(图 120)屈曲成一橢圓形，如虛綫所示． 我們采用的如下記号：

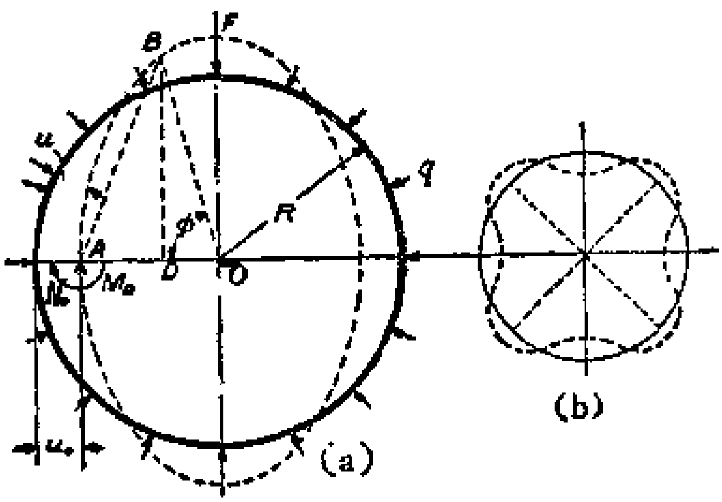


图 120

q = 中心綫单位长度內的外压，

R = 环中心綫的半径，

u = 屈曲时的径向位移，

u_0 = 截面 A 的径向位移，

M_0 = 截面 A 处的弯矩，

$$N_0 = q(R - u_0) = \text{截面}\,A\,\text{处的縱向压縮力。}$$

于是，在屈曲环任意截面 B 处的弯矩为

$$M = M_0 + q\overline{AO}\cdot\overline{AD} - \frac{q}{2}\overline{AB}^2. \tag{a}$$

现在，在三角形 AOB 中

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AO}\cdot\overline{AD}$$

或

$$\frac{1}{2}\overline{AB}^2 - \overline{AO}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{OB}^2 - \overline{AO}^2)$$

$$= \frac{1}{2}[(R-u)^2 - (R-u_0)^2].$$

由于 u 比起 R 来很小，因此 u^2 或 u_0^2 这些项可忽略不計，而

$$\frac{1}{2}\overline{AB}^2 - \overline{AO}\cdot\overline{AD} = R(u_0 - u).$$

将此値代入式(a)，得

$$M = M_0 - qR(u_0 - u).$$

原书上卷第 404 頁式(235)变成

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{R^2}{EI}[M_0 - qR(u_0 - u)]$$

或

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) = \frac{-M_0R^2 + qR^3u_0}{EI}. \tag{b}$$

此方程式的通解为

$$u = C_1\sin p\varphi + C_2\cos p\varphi + \frac{-M_0R^2 + qR^3u_0}{EI + qR^3}, \tag{c}$$

式中 C_1 和 C_2 为由屈曲环的截面 A 和 F 处的条件确定的常数，而

$$p^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI}. \tag{d}$$

由对称性得出

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0;\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi/2} = 0. \tag{e}$$

由第一个条件得 $C_1 = 0$，而由第二个条件得

$$\sin\frac{p\pi}{2} = 0. \tag{f}$$

此方程式的最小根为

$$\frac{p\pi}{2}=\pi$$

或

$$p=2.$$

将此代入式(d),得临界应力之值为[1]

$$q_{cr}=\frac{3EI}{R^3}. \tag{156}$$

式(f)的其他根,例如 $p\pi/2=2\pi$, $p\pi/2=3\pi$ 等,各相应于屈曲环中的較大波数。它們給出了压力 q 的較大值。例如,图120b 表示 $p\pi/2=2\pi$ 时的屈曲形式。在研究两端固定的短圓柱管的稳定性时,这些較高的屈曲形式很有价值。

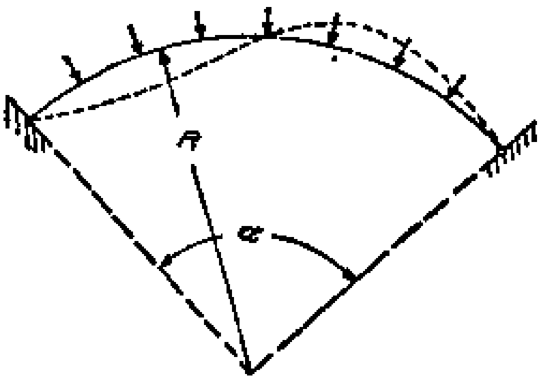


图 121

圓拱的屈曲. 如果有一两端鉸支的圓拱承受均布压力,它就可屈曲成如图121中虛綫所示者。临界压力之值决定于角 α 的大小,它可由下式算出[2]:

$$q_{cr}=\frac{EI}{R^3}\left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2}-1\right). \tag{157}$$

环在垂直于其平面方向的屈曲問題也已获得解决[3]。

圓管的屈曲. 上面所发展的圓环屈曲理論也可适用于长圓管承受均布外压的情形。研究一由相距单位长的两截面从管子上

---

1) 此問題由 M. Bresse 所解出, Cours de mécanique appliquée, Paris, Part I, p. 334, 1866.

2) 参看作者在弹性系統的穩定性方面的論文, *Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1910; 其法譯文, *Ann. ponts et chaussées*, 1913. 并参看 E. Hurlbrink, *Schiffbau*, vol. 9, p. 640, 1907—08; E. Chwalla 和 C. F. Kollbrunner, Stahlbau, 1937 与 1938; 及 A. N. Dinnik, Buckling of Bars, Moscow, 1939 (俄文版).

3) 参看 E. L. Nicolai, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 227, 1923. 并参看作者的論文, *ibid.*, p. 358.

切出的微环．此环的截面惯性矩为

$$I=\frac{1\cdot h^3}{12},$$

式中 h 表示管子壁厚．由于弯曲时环的截面不发生畸变，因此須用

$$\frac{E}{1-\mu^2}$$

代替 E．用以計算临界压力的式(156)变成

$$p_{cr}=\frac{Eh^3}{4(1-\mu^2)R^3}. \tag{158}$$

只要管子中相应的压应力小于材料的比例极限，就可运用上列方程式．超过弹性极限时，真实的临界压力将小于由式(158)求得者．对于有明显屈服点的材料，可运用下列方程式[1]：

$$p_{cr}=\frac{h}{R}\frac{\sigma_{Y.P.}}{1+4\frac{\sigma_{Y.P.}}{E}\frac{R^2}{h^2}}, \tag{159}$$

式中 $\sigma_{Y.P.}$ 表示材料受压縮时的屈服点．随着厚度的減小，临界压力趋近于极限値 $Eh^3/4R^3$，此极限値較式(158)所示者稍小，且在一切情形下其値均小于 $h\sigma_{Y.P.}/R$，即小于相应于屈服点应力的压力[2]．

在超过弹性极限的区域内，我們可以按支柱的情形处理，并在式(158)中用 E_t 代替 E．这样便在塑性范围内建立了 p_{cr} 与 h/R 之間的关系．

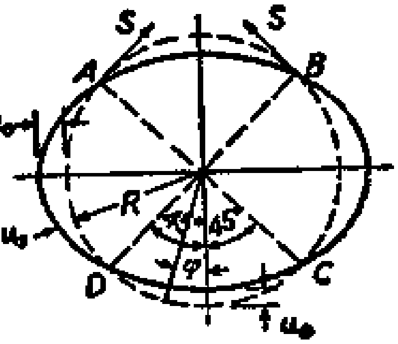


图 122

具有初始椭圓率的管子．管子在均匀外压下的失效与它們的各种

1) 參看 R. V. Southwell, *Phil. Mag.*, vol. 29, p. 67, 1915.

2) 短管由于外压而引起崩潰的实驗由 G. Cook 所說明，*Phil. Mag.*, p. 51, 1914；他对于此課題所列出的参考书目，可参看 *Brit. Assoc. Adv. Sci.* (Birmingham) *Repts.*, 1913.

缺陷大有关系. 最重要的缺陷是初始椭圓率，在任何型式的管子中,其极限值通常已由多次检查测量而熟知. 因此似乎需要有一設計公式以清楚地显示出此椭圓率. 在推导这样一个公式时[1],我們假設如图 122 中虛綫所示的管子形状对完全圓形的初始偏差可由下式表示:

$$u_1 = u_0 \cos 2\varphi, \tag{g}$$

式中 u_0 为最大初始径向偏差，它比起R来可看作很小，而φ为如图所示測量的中心角. 于是,管子的初形状用实綫表示.

如果有一外压p作用在这非圓形管上,管子将变得更扁. 以u_2表示相应于管子变扁时的径向位移，并研究一具有单位寬度的单元环,由原书上卷第 404 頁式(235)得

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D}MR^2, \tag{h}$$

式中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

即D为单元环的弯曲刚度. 关于由压力p所产生的弯矩M，我們看出在单元环的AB和CD部分,曲率有所减小;因此在这些区域內M为正;而在环的其余部分則弯矩为負. 在A, B, C和D各点上弯矩为零. 单元环各部分之間的相互作用可用相切于表示管子理想形状的虛綫的力S来表示. (图中示出了力S对环AB部分的作用.)此圓可看作一被均布外压p所张紧的曲綫. 沿此曲綫的压縮力保持不变,其大小等于 $S = pR$. 因此任意截面处的弯矩可由S与此截面处的总径向偏差 $u_1 + u_2$ 相乘而得. 于是

$$M = pR(u_2 + u_0 \cos 2\varphi), \tag{i}$$

而式(h)变成

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D}pR^3(u_2 + u_0 \cos 2\varphi)$$

或

1) 参看作者的論文, *J. Appl. Mech.*, vol. 1, p. 173, 1933.

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}+u_2\left(1+p\frac{R^3}{D}\right)=-\frac{1}{D}pR^3u_0\cos 2\varphi.$$

此方程式的满足 A,B,C 和 D 各点处連續条件的解为

$$u_2=\frac{u_0p}{p_{cr}-p}\cos 2\varphi, \tag{160}$$

式中 p_{cr} 由式(158)求得. 可以看出,在 A,B,C 和 D 各点处, 位移 u_2 及其二阶导数为零. 因此在这些点上弯矩为零, 正如先前所假設的. 最大弯矩发生在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 处,該处

$$M_{max}=pR\left(u_0+\frac{u_0p}{p_{cr}-p}\right)=\frac{pu_0R}{1-\frac{p}{p_{cr}}}. \tag{161}$$

可以看出,当比值 p/p_{cr} 的数值很小时,由压力 p 引起的管子椭圓率的变化可以忽略不計,而最大弯矩可由压縮力 $S=pR$ 与初始偏差 u_0 相乘而得. 如果比值 p/p_{cr} 并不小时,必須計及管子初始椭圓率的变化,而在計算 M_{max} 时必須运用式(161).

最大压应力現在可由弯矩 M_{max} 所产生的最大压应力与压縮力 pR 所产生的应力相加而得. 因此得

$$|\sigma|_{max}=\frac{pR}{h}+\frac{6pRu_0}{h^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{p}{p_{cr}}}. \tag{j}$$

借助于此方程式,可以发展出一个管子設計方法,它与以所假設的缺陷为根据的柱設計方法相类似.

压力 p 的极限值就是使材料开始屈服之值. 以 $p_{Y.P.}$ 表示此值,并在式(j)中以 $\sigma_{Y.P.}$ 代 σ_{max},得

$$\sigma_{Y.P.}=\frac{p_{Y.P.}R}{h}+\frac{6p_{Y.P.}Ru_0}{h^2}\frac{1}{1-\frac{p_{Y.P.}}{p_{cr}}}, \tag{k}$$

如果已知 $\sigma_{Y.P.}$ 和初始偏差 u_0, 就可由上式算出极限压力 $p_{Y.P.}$ 之值. 运用記号

$$\frac{R}{h}=m \text{ 和 } \frac{u_0}{R}=n, \tag{l}$$

用以計算 $p_{Y.P.}$ 的式(k)变成

$$p_{Y.P.}^2 - \left[\frac{\sigma_{Y.P.}}{m} + (1 + 6mn)p_{cr}\right]p_{Y.P.} + \frac{\sigma_{Y.P.}p_{cr}}{m} = 0. \quad (162)$$

由此方程式可以繪出表示平均压应力 $p_{Y.P.}R/h$ 的曲綫,对于比值 u_0/R 的各种数値和对于 $\sigma_{Y.P.}$ 的各种数値,平均压应力均为 R/h 的函数. 运用这种曲綫連同一合理的安全系数,就可很快地算出适当的管壁厚度. 必須指出,这样确定的压力 $p_{Y.P.}$ 較管子发生完全崩潰时的压力为小;因此如以 $p_{Y.P.}$ 作为极限压力,我們总是偏于安全.

在前面的討論中,假設了管子长度 l 比起其半径来很大,例如 $l/R > 20$. 对于較短的管子,如果其边为固定或受支承,則 p_{cr} 之値大于式(158)所示者,依比値 l/R 而定. 这种管子的屈曲理論較为复杂[1],因为管子在屈曲时沿圓周分成若干个波,波数与比値 l/R 有关[2].

两端封閉而在两端和各面[3]均承受均布压力管子的屈曲問題也已获得解决[4].

§38. 矩形板的屈曲. 在討論鋼結构中常用的由板組成的受压构件(图 123)的弹性穩定性时,受压矩形板的屈曲問題具有实际的重要性. 这种构件的失效可能是由于腹板或側板的屈曲,而非由于整个构件的屈曲所造成的. 例如,对于图 123 所示的情形,

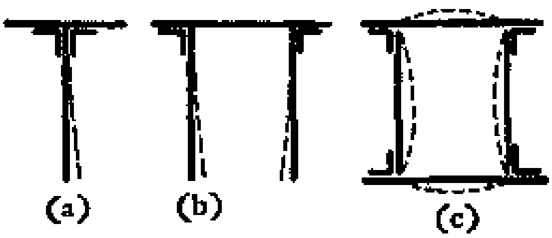


图 123

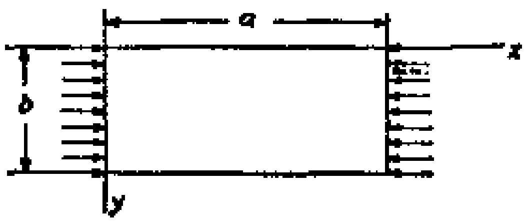


图 124

1) 此問題的討論可参看作者的"弹性穩定理論",科学出版社,1958.

2) 用以計算短管临界压力的一些曲綫是由美国机械工程协会于1933年12月召开的"容器在外压下的強度"研究委員会所提供的.

3) 在研究潛艇的两加固环之間的船壳穩定性时有此情形.

4) 参看 R. v. Mises 的論文, *Festschrift f. Prof. A. Stodola*, Zürich, 1929.

如果板的厚度选择得不能令人满意，板就会发生如虚綫所示的屈曲. 由于受压构件的长度比起截面尺寸来通常很大，因此問題就变成受压长板的屈曲問題(图 124). 板的短边可看作簡支；其他两边的条件则决定于截面形状. 例如，如果柱的截面为正方形(图 123c)，而各側板的厚度均相同，它們就有同时屈曲的趋势. 每面均可看作一所有四边均为簡支的受压矩形板. 对于图123a 和123b 所示的情形，垂直腹板的下边为自由而上边则为弹性固定[1].

如图 124 所示板的縱边为各种不同条件时的屈曲問題的精确解已經得到[2]. 这里我們只列出一些最后結果，以及由这些解得出的临界应力之値.

四边均为簡支的矩形板. 在 x 軸方向承受均匀压縮的簡支板(图124)，在屈曲时可分成許多正方形或接近于正方形的矩形. 压縮应力的临界值由下式給出[3]

$$\sigma_{cr} = \beta\sigma_e, \tag{163}$$

其中

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E h^2}{12 b^2 (1-\mu^2)}, \tag{164}$$

式中 h 为板厚，而 b 为板寬. 系数

$$\beta = \left(\frac{a}{mb} + \frac{mb}{a}\right)^2 \tag{a}$$

1) 关于討論薄壁結构屈曲問題的第一个实验是由 William Fairbairn 所作的，在他的著作中有說明，Britannia and Conway Tubular Bridges, London, 1849. 并参看 E. Hodgkinson 的著作，它作为附录 AA 发表在 Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, London, 1849.

2) 参看作者的“弹性稳定理論”，科学出版社，1958.

3) 此問題的解是由 G. H. Bryan 所得出的，参看 *Proc. London Math. Soc.*, vol. 22, p. 54, 1891. 作者曾研究了矩形板的其他屈曲情形，参看他的論文："On the Stability of Compressed Plates", *Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1907; *Z. Math. u. Phys.*, vol. 58, 1910; *Eisenbau*, vol. 12, 1921; *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, vol. 55, p. 855, 1929. 并参看 H. Reissner, *Zentr. Bauverwalt.*, p. 93, 1909.

表示与比值 a/b 有关的系数，而整数 m 表示板在屈曲时分成的波数．选择整数 m 时，必須使 β 达到最小值[1]．表 10 列出了系数 β 的一些数值．对于較长的板($a/b > 3$)，$\beta = 4$ 为很好的近似．

表 10 計算簡支矩形板临界压应力用的常数

a/b	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
β	8.41	5.14	4.20	4.00	4.13	4.47	4.20
σ_{cr}	22800	14000	11400	10900	11200	12100	11400
a/b	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3	
β	4.04	4.00	4.04	4.13	4.04	4.00	
σ_{cr}	11000	10900	11000	11200	11000	10900	

表 10 中所列出的 σ_{cr} 值是假設了 $E = 30 \times 10^6$ 磅/吋^2，$\mu = 0.3$ 和 $h/b = 0.01$ 而算出的．比值 h/b 为任何其他值时的临界应力可由表列数值与 $10^4\ (h^2/b^2)$ 相乘而得．以研究一屈服点应力为 40000 磅/吋^{2}的长鋼板为例．假定我們要确定临界应力等于屈服点应力时的比值 b/h．設 $\beta = 4$ 并运用表 10，得

$$\sigma_{cr} = 10900 \times 10^4 \times \frac{h^2}{b^2} = 40000 \text{ 磅/吋}^2,$$

从而得

$$\frac{b}{h} = 52.2. \tag{b}$$

当比值 b/h 較大时，在小于材料屈服点的压应力下的屈曲会引起失效．在这种情形下，必須取临界应力而不是材料的屈服点作为确定容用应力的根据．

板的三边簡支而第四边自由． 如果縱边之一例如 $y = b$ (参看图 124) 为自由，就可用前面的方程式[式(163)]来計算压应力的临界值．在表 11 中列出了系数 β 的数值．

两对边簡支，第三边固定而第四边自由． 图 124 中的边

1) 可以看出，β 的最小值等于 4，且当 $a = mb$ 时，即在板发屈曲而分成正方形时达到．

表 11　計算三边簡支而第四边 ($y = b$) 自由的矩形板临界压应力用的常数 β

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
β	4.40	1.440	1.135	0.952	0.835	0.755	0.698	0.610	0.564	0.516	0.506

$x = 0$，$x = a$ 可看作簡支，而边 $y = 0$ 可看作固定。可以运用同一方程式 [式(163)]，而系数 β 的数值則列于表 12。（当比值 a/b 較大时，較好近似之值为 $\beta = 1.33$。）

两对边簡支而另两边固定[1)]。边 $x = 0$ 和 $x = a$ 可看作簡支。在表 13 中列出了式(163)中的系数 β 的相应数值。

表 12　計算两对边簡支，第三边固定而第四边($y = b$)自由的矩形板临界压应力用的常数 β

a/b	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3
β	1.70	1.56	1.47	1.41	1.36	1.34	1.33	1.33	1.34	1.36	1.38	1.45	1.47	1.41	1.36	1.34

表 13　計算两对边簡支而另两边固定的矩形板临界压应力用的常数 β

a/b	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.1
β	9.44	7.69	7.05	7.00	7.29	7.83	7.69	7.05	7.00	7.29	7.05	7.00

四边均为簡支并承受沿各边均布的剪应力作用的矩形板(图125)。可使板发生屈曲的剪应力临界值为

$$\tau_{cr} = \beta\sigma_e. \qquad (165)$$

在表 14 中列出了数字系数 β 的数值。

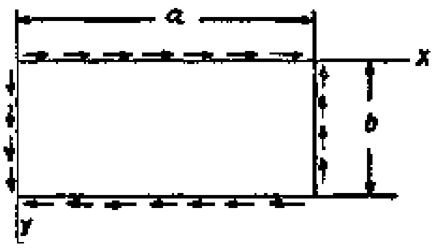


图　125

表 14 可用来选择板梁的腹板厚度。在支点附近，剪力为最重要的因素。因此在两加固板之間的腹板部分，可以看作一只承受

1) 当图 123c 所示受压构件的两对边的刚度非常大，而只有其他两边会屈曲时，我們就有这种情形。

表 14 計算四边均为簡支并承受均匀剪切作用的矩形板临界应力用的常数 β

a/b	1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3	∞
β	9.42	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.3	6.1	5.4

剪应力作用的簡支边矩形板。例如，如果两加固板之間的距离为5呎，$E = 30 \times 10^6$ 磅/吋^{2}和 $\mu = 0.3$，对于厚度为 h 而高度为 b 的大梁，可运用表 15 求得以磅/吋^{2}計的临界应力如下[1)]。

表 15

b \ h	$\frac{3}{8}$ 吋	$\frac{7}{16}$ 吋	$\frac{1}{2}$ 吋	$\frac{9}{16}$ 吋
5 呎	9980	13600	17700	22400
7 呎	7730	10500	13700	17400
10呎	6990	9510	12400	15700

截面如图 123 所示的受压組合构件中所用鋼板的必要厚度可由表 10—15 求得。如果空心截面(图 123c)的各面均可看作簡支的长矩形板，則临界压应力为

$$\sigma_{cr} = 4\sigma_e = \frac{\pi^2 h^2}{3b^2} \frac{E}{1-\mu^2}. \tag{c}$$

例如，取 $h/b = 0.01$，得

$$\sigma_{cr} = 10900 \text{ 磅/吋}^2.$$

此应力远較結构鋼的比例极限为低。如設同一板的縦边为固定，則得

$$\sigma_{cr} = 7\sigma_e = \frac{7}{4}(10900) = 19100 \text{ 磅/吋}^2.$$

对于图 123a 和 123b 的情形，受压鉛直鋼板可看作沿上边固

1) 关于腹板屈曲和設計加固板的补充数据載于作者的論文中，*Proc. Am. Soc. Civil Engrs.* vol. 55, p. 855, 1929; 和 *Engineering*, vol. 138, p. 207, 1934. 并参看 E. Chwalla, *Repts. 2d, Congr. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg.*, Berlin, 1936; *Stahlbau*, 1936.

定[1]而沿下边自由的长板．因此临界应力为

$$\sigma_{cr}=1.33\sigma_e=\frac{1.33\pi^2}{12}\frac{h^2}{b^2}\frac{E}{1-\mu^2}. \tag{d}$$

板的稳定性仍决定于比值 b/h 的大小，設結构鋼的屈服点为30000磅/吋²，由式(d)得，使 σ_{cr} 等于此应力的 b/h 值为

$$\frac{b}{h}=\sqrt{\frac{1.33\pi^2}{12\times 30000}\times\frac{30\times 10^6}{0.91}}\approx 35.$$

因此，如果 $b/h>35$，临界应力就較材料的屈服点为小．在选择實用应力的大小时必須計及这一事实．加強板的自由边可使板的稳定性提高．

对于上面各情形，均假設了临界应力低于比例极限．对于超过比例极限的应力，上面各方程式所得出的临界应力过大[2]．

§ 39. 无横向支承的梁的屈曲． 众所周知，无横向支承时，在腹板平面內受載荷的工字梁在横向是不够稳定的．如将載荷增加到超过某一**临界极限**时，此梁就发生側向屈曲，而再加載荷时就会使之崩潰[3]．能量法可以用来确定此极限值．

以一在縱向鉛直对称面內承受一个中央集中載荷 P 作用的狹长矩形截面梁 AB（图 126）作为一例．如果此力很小，梁就只在鉛直平面內发生撓曲，而弯曲是稳定的．这就是說，如果梁受一横向力而发生側向撓曲，将力移去后，此撓曲就消失，而梁就回复至其原始形状．可是，如果增加 P 时，就达到一极限值，这时在鉛直平

---

1) 此假設得出临界应力的上限．真实的临界应力将稍低一些，因为上边的連接并非絕对剛性．

2) 此問題在作者的"彈性稳定理論"（科学出版社，1958）一书中有討論．

3) 由于側向屈曲而引起的大梁的崩潰，可用法国塔布附近的桥梁的不幸事故来加以說明；参看 *Revue technique*, Nov. 15, 1897．狹长矩形截面梁的横向屈曲曾由 L. Prandtl 作了討論，dissertation, Nürnberg, 1899 及 A. G. M. Michell, *Phil. Mag.*, vol. 48, 1899．工字梁的屈曲曾由作者作了討論；参看 *Bull. Polytech. Inst.* (St. Petersburg), vol. 4 和 5, 1905 及 1906．并参看 *Ann. ponts et chaussées*, 1913 及 *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, vol. 87, p. 1247, 1924．此理論的实际应用曾由 E. Chwalla 加以討論，Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelt-symmetrischen I-Querschitt, Berlin, 1939．并参看 F. Bleich 的著作，*loc. cit.*, p. 182, Chap. 4.

而内的弯曲将变得不稳定．于是梁发生侧向屈曲，而在载荷增加得非常少时，也会引起很大的横向挠曲．P 的这一极限值称为**临界載荷**．

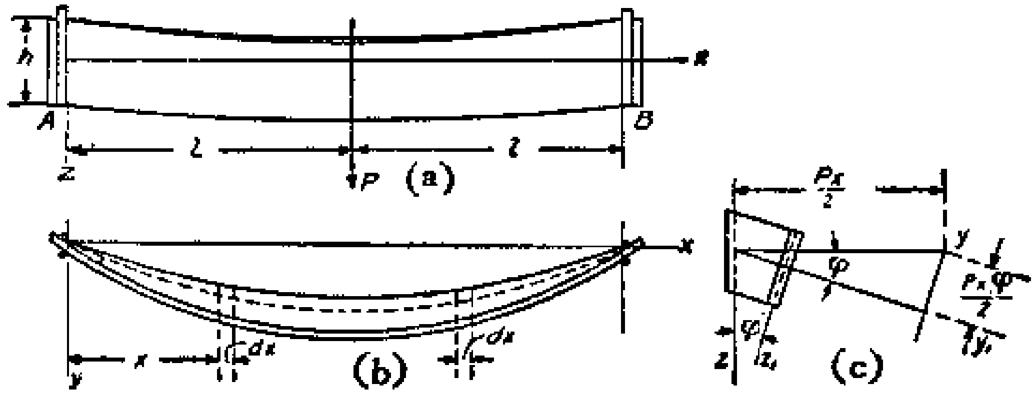


图 126

研究系統的位能可确定临界載荷．梁的任何横向撓曲同时引起应变能的增加．在发生很小的横向屈曲后，不仅在鉛直平面內具有可看作不变的弯曲应变能，而且也有横向弯曲应变能以及扭轉应变能．同时，載荷的位能減小，因为侧向屈曲同时引起其作用点的降低．以 U_1 表示載荷位能的減少量，U 表示由横向弯曲产生的应变能，而 U_2 表示由扭轉产生的应变能．于是临界載荷可由式(140)确定，这里它变成

$$U+U_2=U_1. \tag{a}$$

现在我們必須計算此方程式中所含的各值．在离左支点的距离为 x 的任意截面处(参看图 126)，鉛直平面內的弯矩为 $Px/2$．在計算側向屈曲时，必須計及对 z_1 軸的弯矩（图 126c)．此弯矩等于 $(Px/2)\varphi$，其中 φ 表示沿梁长度变化的小扭轉角．于是，当横向撓度很小时[1]，我們得下列微分方程式：

$$EI_z\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Px}{2}\varphi. \tag{b}$$

相应的弯曲应变能为

1）对于小撓度，可取曲率为 d^2y/dx^2 以代替 d^2y_1/dx^2．

$$U = EI_z\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx = \frac{P^2}{4EI_z}\int_0^l x^2\varphi^2dx. \tag{c}$$

扭轉应变能为(参看原书上卷式 186)

$$U_2 = C\int_0^l\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx, \tag{d}$$

式中矩形截面的扭轉刚度 C 可由原书上卷式(159)求得.

我們現在来研究由于横向撓曲而引起的載荷 P 作用点的降低. 取梁上位置对称的两个体元 dx (图 126b 和 c), 只研究此两体元在 xy_1 平面内的弯曲作用. 由此弯曲所产生的偏轉角等于 $-(d^2y/dx^2)dx$. 当此弯曲发生在与水平面成 φ 角的 xy_1 平面内时(图 126c), 它使載荷 P 降低了 $-x\varphi(d^2y/dx^2)dx$. 因此,由于梁在屈曲时各体元发生的这种弯曲而引起的 P 的总降低量为

$$\delta = -\int_0^l x\varphi\frac{d^2y}{dx^2}dx,$$

或运用式(b),得

$$\delta = \frac{P}{2EI_z}\int_0^l x^2\varphi^2dx.$$

因此

$$U_1 = P\delta = \frac{P^2}{2EI_z}\int_0^l x^2\varphi^2dx. \tag{e}$$

将(c),(d)和(e)三式代入式(a),得

$$P_{cr}^2 = \frac{4EI_zC\int_0^l\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx}{\int_0^l x^2\varphi^2dx}. \tag{f}$$

取扭轉角 φ 为 x 的一个适当选择的函数以满足端点条件,由式(f)求得临界载荷的近似值. 例如,設

$$\varphi = a\sin\frac{\pi x}{2l}. \tag{g}$$

在梁的两端此函数为零(該处扭轉角为零),在梁的中点($x = l$)此函数为最大. 将式(g)代入式(f),得[1]

1) 由較詳細的研究知,此近似解的誤差为 1½% 左右. 因此式(166)在实用上是足够精确的.

$$P_{cr}=\frac{17.2\sqrt{CEI_z}}{(2l)^2}. \tag{166}$$

因此临界載荷决定于梁的扭轉刚度与横向弯曲刚度的乘积.

上面假設了載荷 P 作用在梁中間截面的形心处. 如果作用点比形心高出距离 a，就須将式(166)的右边乘以$[1-1.74(a/2l)\times\times\sqrt{EI_z/C}]$[1].

如果載荷沿梁的中心軸均匀分布(图 126)，其临界值为

$$(2ql)_{cr}=\frac{28.3\sqrt{CEI_z}}{(2l)^2}. \tag{167}$$

对于长度为 l 而在自由端的中心处受載的悬臂，其临界載荷为

$$P_{cr}=\frac{4.01\sqrt{CEI_z}}{l^2}. \tag{168}$$

对于工字梁的情形，除了右边分子上的数字系数不是常数外，临界載荷方程式的形式与上面对狭长矩形截面梁求得的一样；現在数字系数决定于下列表达式的大小[2]:

$$\alpha=\frac{C}{EI_z}\left(\frac{2l}{h}\right)^2. \tag{h}$$

例如，如果有一支承情形如图 126 所示的工字梁承受沿梁中心軸均布的載荷，则总分布載荷的临界值为

$$(2ql)_{cr}=\frac{\beta\sqrt{CEI_z}}{(2l)^2}. \tag{169}$$

在表 16 中列出了比值 α 为各种不同数值时系数 β 的大小. 可以看出，随着 α 的增大，常数 β 趋近于前面对矩形截面梁求得的大小.

在表 16 的第三行中列出了相应的临界弯应力数值，这些数值是假設了

1) 参看作者的論文，*Ann. ponts et chaussées*, 1913. 并参看他的"弹性稳定理論"(科学出版社，1958)一书.

2) 工字梁的扭轉刚度 C 在 §47 中有討論.

表 16　工字梁受均布載荷时的临界应力，$\gamma = 0.0001$ 和 $E = 3\times10^7$ 磅/吋^2(应力以磅/吋^{2}計)

α	0.1	1	2	4	6	8	12
β	143.0	53.0	42.6	36.3	33.8	32.6	31.5
σ_{cr}	8520	9950	11300	13600	15600	17300	20300
σ'_{cr}	5510	6810	8070	10300	12200	13800	16800
σ''_{cr}	13200	14500	15800	18000	20000	21500	24500
α	16	20	32	50	70	90	100
β	30.5	30.1	29.4	29.0	28.8	28.6	28.6
σ_{cr}	23000	25200	31200	38600	45300	51000	53700
σ'_{cr}	19400	21600	27600	35000	41600	47400	50000
σ''_{cr}	27200	29400	35300	42600	49200	55100	57600

$$\gamma = \frac{I_z}{I_y}\left(\frac{h}{2l}\right)^2 = 0.0001 \tag{i}$$

而算出的. 式中 I_z/I_y 为横向与垂直弯曲刚度之比，而 $h/2l$ 为梁的高度与其跨距之比. 对于任何其他比例的梁，临界应力可由第三行的数字与 $10^4\gamma$ 相乘而得. 表 16 中的第四行及第五行各給出載荷作用于梁的上凸緣或下凸緣时的临界应力. 所有計算均假設了材料为完全弹性而进行的[1].

以如下尺寸的結构鋼工字梁为例：

长度 $2l = 20$ 呎，

高度 $h = 24$ 吋，

凸緣寬度 $b = 7$ 吋，

腹板厚度 $\delta_1 = 0.5$ 吋，

凸緣的平均厚度 $\delta = \frac{1}{2}(0.60 + 1.14) = 0.87$ 吋，

截面积 $A = 23.3$ 吋^2，

主刚度 $EI_y = 2087E$ 磅吋^2，

---

1) 关于此課題的較詳細研究，可参看作者的論文，*Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, vol. 87, p. 1247, 1924, 以及他的"弹性稳定理論"(科学出版社，1958) 第 5 章，并参看 E. Chwalla, *loc. cit.*, p. 199.

主刚度 $EI_z = 42.7E$ 磅吋^2.

由式(224)得

$$C = G\left(\frac{2}{3}b\delta^3 + \frac{1}{3}h\delta_1^3\right) = 4.07G.$$

于是,設 $E = 2.6G$, 由式(h)得

$$\alpha = 3.67,$$

而由式(i)得

$$\gamma = \frac{42.7}{2087 \times 100} = 205 \times 10^{-6}.$$

对于 $\alpha = 3.67$,由表 16 用内插法得

$$\sigma_{cr} = 11300 + \frac{1}{2}(13600 - 11300)1.67 = 13200 \text{ 磅/吋}^2.$$

此为 $\gamma = 0.0001$ 时的临界应力. 在所研究的例子中，临界应力将为 $13200 \times \gamma \times 10^4 = 26900$ 磅/吋^2. 必須以相应于此应力的載荷作为梁的极限載荷.

此数字答案説明了,在直接压縮下,当应力小于材料的极限应力时,甚至当应力小于弹性极限时,也会发生側向屈曲. 在确定賚用应力时必須計及这一事实，并須以临界应力代替屈服点作为依据. 在此例子中,取安全系数为 3,賚用应力将等于 26900/3=8970 磅/吋^2.

第六章　对称于軸綫的变形

§ 40. 厚壁圓筒. 如果有一等厚度圓筒承受均布的內压和外压的作用,则产生的变形对称于圓筒軸綫且沿其长度不变. 在图 127 中,我們研究一由垂直于軸綫而相距单位长的两平面从圓筒

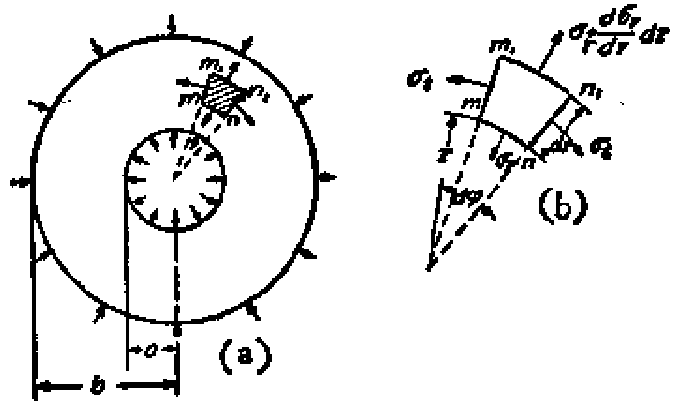


图 127

上切下的圓环. 由对称条件得出,在此圓环体元 mnm_1n_1 的各面上无剪应力(图 127). 体元 mnm_1n_1 系以两軸向平面和两同心圓柱面为界. 以 σ_t 表示垂直作用于体元 mm_1 和 nn_1 面上的圓周应力,而以 σ_r 表示垂直作用于 mn 面上的径向应力. 此应力随半径 r 而变,在距离 dr 內改变了 $(d\sigma_r/dr)dr$. 因此垂直于 m_1n_1 面上的径向应力为

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr .$$

沿角 $d\varphi$ 的平分綫方向将作用在体元上的各力相加,得下列平衡方程式[1]:

$$\sigma_r r d\varphi + \sigma_t dr d\varphi - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}dr\right)(r + dr)d\varphi = 0, \quad \text{(a)}$$

1) 此处忽略体元的重量.

或忽略高阶微量,得

$$\sigma_t-\sigma_r-r\frac{d\sigma_r}{dr}=0. \tag{b}$$

此方程式包含两个未知量,即应力 σ_t 和 σ_r. 为确定这些值所需的第二个方程式可研究圆筒的变形而求得.

圆筒的变形对称于轴綫,它由筒壁内各点的径向位移构成.此位移在周向为一常数但沿半径改变,即它只是半径的函数. 如以 u 表示半径为 r 的圆柱面的径向位移,则半径为 $r+dr$ 的圆柱面的位移为

$$u+\frac{du}{dr}dr.$$

于是如 mnm_1n_1 等体元在径向有一大小为 $(du/dr)dr$ 的总伸长,所以单位伸长为

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}. \tag{c}$$

同一体元在周向的单位伸长等于相应半径的单位伸长或

$$\varepsilon_t=\frac{u}{r}. \tag{d}$$

由原书上卷第 55 頁式(38)得,用应变表示的应力表达式为

$$\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr}+\mu\frac{u}{r}\right),\\ \sigma_t&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r}+\mu\frac{du}{dr}\right).\end{aligned} \tag{170}$$

显然,正应力 σ_r 与 σ_t 有关,因为它們均可表示为 u 的函数.将式(170)代入式(b),得下列用以确定 u 的方程式:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0. \tag{e}$$

此方程式的通解为

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r}, \tag{f}$$

此可用代入法驗証之. 常数 C_1 和 C_2 可由圆筒内外两表面上的条件来确定,在内、外两表面上压力为已知,即正应力 σ_r 为已知. 将

式(f)代入式(170),得

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) - C_2\frac{1-\mu}{r^2}\right], \tag{g}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) + C_2\frac{1-\mu}{r^2}\right]. \tag{h}$$

如以 p_i 和 p_0 各表示內压和外压,則圓筒外表面和內表面上的条件各为

$$(\sigma_r)_{r=b} = -p_0 \text{ 和 } (\sigma_r)_{r=a} = -p_i. \tag{i}$$

由于对于拉伸正应力取为正,因此此两方程式右面的符号均为負.將 σ_r 的表达式[式(g)]代入式(i),得两个用以确定常数 C_1 和 C_2 的方程式,从而得

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E}\frac{a^2p_i - b^2p_0}{b^2-a^2};\quad C_2 = \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2(p_i-p_0)}{b^2-a^2}. \tag{j}$$

將这些常数值代入式(g)和(h),正应力 σ_r 和 σ_t 的通用表达式就变成[1)]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{a^2p_i - b^2p_0}{b^2-a^2} - \frac{(p_i-p_0)a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)},\\ \sigma_t &= \frac{a^2p_i - b^2p_0}{b^2-a^2} + \frac{(p_i-p_0)a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{171}$$

着重指出,这两个应力之和保持为常数,因此各体元在圓筒軸綫方向的变形相同,因而圓筒的截面在变形后仍保持为平面. 这就証实了我們把此問題当作二維問題来考虑是正确的.

我們現在来研究 $p_0 = 0$,卽圓筒只受內压的特殊情形. 于是式(171)变成

$$\sigma_r = \frac{a^2p_i}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right), \tag{172}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2p_i}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right). \tag{173}$$

---

1) 此解首先載于拉梅(Lamé)和克拉柏龙(Clapeyron)的論文中,"Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes", *Mém. divers savans*, vol. 4, 1833.

由这些方程式知，σ_r 始終为压应力，而 σ_t 始終为拉应力。后者在圓筒的內表面上最大，該处

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{p_i(a^2+b^2)}{b^2-a^2}. \tag{174}$$

由此方程式知，$(\sigma_t)_{max}$ 在数值上始終大于內压，且随 b 的增大而趋近于內压之值。σ_t 的最小值是在圓筒的外表面上。比值

$$\frac{(\sigma_t)_{max}}{(\sigma_t)_{min}} = \frac{a^2+b^2}{2a^2}$$

随圓筒壁厚的增大而增大。当厚度較小时，σ_t 的最大值与最小值之差不大。例如，取 $b=1.1a$，$(\sigma_t)_{max}$ 只比 $(\sigma_t)_{min}$ 大 $10\frac{1}{2}\%$。因此如果我們假設拉应力 σ_t 在壁厚上均匀分布，并运用方程式

$$\sigma_t = \frac{p_i a}{b-a},$$

則誤差就很小，上式与第 106 頁所列出的薄壁圓筒的方程式一致。剪应力在圓筒的內表面上最大，該处

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{p_i(a^2+b^2)}{b^2-a^2} + \frac{p_i(b^2-a^2)}{b^2-a^2}\right] = \frac{p_i b^2}{b^2-a^2}. \tag{k}$$

如果只有外压作用在圓筒上时，我們得 $p_i=0$，而由式(171)得

$$\sigma_r = -\frac{p_0 b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), \tag{175}$$

$$\sigma_t = -\frac{p_0 b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right). \tag{176}$$

这时，σ_r 和 σ_t 均为压应力，而 σ_t 在数值上始終大于 σ_r。最大压应力是在圓筒的內表面上，該处

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{2p_0 b^2}{b^2-a^2} \tag{177}$$

有趣的是，随着圓筒半径比 b/a 的增大，此最大压应力趋近于作用在圓筒上的外压的两倍，即 $-2p_0$。

我們現在来研究圓筒的变形。将式(j)的任意常数代入式(f)，得

$$u = \frac{1-\mu}{E}\frac{a^2p_i - b^2p_0}{b^2-a^2}r + \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2(p_i-p_0)}{(b^2-a^2)r}. \tag{178}$$

此即筒壁內任意点的径向位移. 对于圓筒只承受內压($p_0=0$)的特殊情形,由式(178)得內表面的径向位移为

$$(u)_{r=a} = \frac{ap_i}{E}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}+\mu\right). \tag{179}$$

当圓筒只承受外压($p_i=0$)时,外表面的径向位移为

$$(u)_{r=b} = -\frac{bp_0}{E}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}-\mu\right). \tag{180}$$

負号表示位移指向圓筒的軸綫.

§41. 由冷縮配合而产生的应力. 如果需要在輪轂和軸之間或在相互套装的两环之間产生接触压力，則慣常使外面零件的內径小于里面零件的外径，并預先将外面零件加热后再装配結构. 冷却后就在两零件間产生了接触压力，此压力称为**冷縮配合压力**. 此压力和由之产生的应力的大小不难用前节的方程式算出.

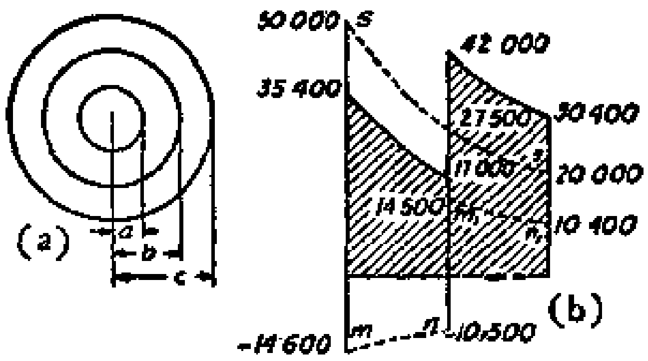


图 128

例如，設內圓筒的外半径在未受力时比外圓筒的內半径(图 128)大 δ. 于是装配后在两圓筒之間产生了压力 p. p 的大小可由外圓筒內半径的增量与內圓筒外半径的減量之和必定等于 δ 这一条件求得. 因此,由式(179)和(180)得

$$\frac{bp}{E}\left(\frac{b^2+c^2}{c^2-b^2}+\mu\right)+\frac{bp}{E}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}-\mu\right)=\delta,$$

从而得

$$p = \frac{E\delta}{b}\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{2b^2(c^2-a^2)}. \tag{181}$$

于是由式(172)和(173)得出了外圓筒中的应力，而由式(175)和(176)得出了內圓筒中的应力. 在設計时，所考慮的应力通常为

外圓筒內表面上的应力．这些应力为

$$\sigma_t = \frac{p(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2},\quad \sigma_r = -p.$$

在此表面上的最大剪应力为[参看第 182 頁式(k)]

$$\tau_{\max} = \frac{pc^2}{c^2 - b^2},$$

或将式(181)的 p 代入得

$$\tau_{\max} = \frac{E\delta c^2(b^2 - a^2)}{2b^3(c^2 - a^2)}. \tag{182}$$

对于实心軸和輪轂的特殊情形，我們得 $a = 0$，从面得

$$p = \frac{E\delta}{2bc^2}(c^2 - b^2) \tag{183}$$

$$\tau_{\max} = \frac{E\delta}{2b}, \tag{184}$$

卽最大剪应力与单位伸长等于 δ/b 的簡单系杆的情形相同．

上面的討論假設了两个圓筒具有同样的长度．对于輪轂和軸的情形(图 129)，軸的凸出部分抗拒压縮，結果在輪轂两側面附近引起压力增大，如阴綫面积所示[1]．

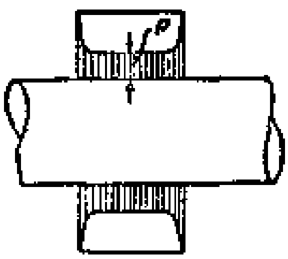


图 129

如果有一如图 128 所示的組合圓筒承受內压，則由此压力所产生的应力就与壁厚为 $c - a$ 的整体壁圓筒的相同．这些应力与冷縮配合应力相迭加．冷縮配合在圓筒的內表面上产生一切向压应力，从而使該处由內压力产生的最大切向拉应力減低，因此比起整体壁管子的情形（参

1) 冷縮配合应力的实驗研究載于 A. Huggenberger 的論文中，*Technische Blätter*, Schweiz. Lokomotiv. und Maschinenfabrik, Winterthur, 1926. 关于冷縮配合应力的深入討論載于 W. Janicki 的論文中，*Schweiz. Bauzeitung*, vol. 88, p. 93, 1926 和 vol. 90, p. 127, 1927. 并参看 J. W. Baugher, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 52, 1930 和 O. J. Horger 和 C. W. Nelson, *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. 183, 1937 和 vol. 5, p. 32, 1938. 关于冷縮配合的实用資料，可参看 O. J. Horger 所編的 A. S. M. E. Handbook, New York, p. 178, 1953. 关于此問題的精确解，可参看作者和 J. N. Goodier 的"Theory of Elasticity", p. 383, 1951.

看第 185 頁題 2)来,可获得一較有利的应力分布. 于是由几根管子組成的圓筒可用于內压非常高的場合,例如在炮筒中.

与上面所討論的組合圓筒的情形相类似的預应力分布，也可在一整体壁管子中施加一足够高的內压，使管子的內部产生永久变形而获得. 在移去此內压后,由于永久变形之故,在管子中仍留有一些应力,因此,內部处于压縮状态而外部处于拉伸状态[1].

习　　題

1. 有一內半径为 4 吋而外半径为 8 吋的圓筒承受內压 $p_i = 30000$ 磅/吋²,試确定此圓筒的內外表面上和壁厚中間处的切向应力.

答. 由式(173)得: $(\sigma_t)_{r=4''} = 50000$ 磅/吋²; $(\sigma_t)_{r=6''} = 27500$ 磅/吋²; $(\sigma_t)_{r=8''} = 20000$ 磅/吋².

2. 試确定一承受內压 $p_i = 30000$ 磅/吋²的鋼质組合圓筒(图 128) 中的应力，如果 $a = 4$ 吋，$b = 6$ 吋，$c = 8$ 吋和收縮量 $\delta = 0.005$ 吋.

解. 首先确定圓筒中由于冷縮而产生的預应力. 由式(181)得

$$p = \frac{30 \times 10^6 \times 0.005(6^2 - 4^2)(8^2 - 6^2)}{6 \times 2 \times 6^2(8^2 - 4^2)} = 4050 \text{ 磅/吋}^2.$$

由式(176)得,內圓筒中由此压力所产生的切向应力为

$$(\sigma_t)_{r=4} = -\frac{2pb^2}{b^2 - a^2} = -\frac{2 \times 4050 \times 6^2}{6^2 - 4^2} = -14600 \text{ 磅/吋}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=6''} = -\frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = 10500 \text{ 磅/吋}^2.$$

由式(173)得外圓筒的应力为

$$(\sigma_t)_{r=6''} = \frac{p(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2} = \frac{4050(6^2 + 8^2)}{8^2 - 6^2} = 14500 \text{ 磅/吋}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=8''} = \frac{2pb^2}{c^2 - b^2} = \frac{4050 \times 2 \times 6^2}{8^2 - 6^2} = 10400 \text{ 磅/吋}^2.$$

---

1) 关于此問題的深入討論載于 §70 中.

在图 128b 中用虛綫 mn 和 m_1n_1 表示了筒壁厚度上預应力 σ_t 的分布。由內压所产生的应力与前題中相同，在图中用虛綫 ss 表示。由两种应力分布的迭加得出如阴綫面积所示的应力分布。可以看出，由于装配应力的存在，当圓筒承受內压时，最大应力自 50000 減到 42000 磅/吋^2。

3. 参照图 128，試求 $r=6$ 吋和 $r=10$ 吋处的冷縮配合应力 σ_t，如果 $a=4$ 吋，$b=8$ 吋，$c=12$ 吋。运用收縮系数 $\delta/b=0.001$，并取 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2。

答。
$$(\sigma_t)_{r=6''} = -13500 \text{ 磅/吋}^2$$
$$(\sigma_t)_{r=10''} = 13750 \text{ 磅/吋}^2.$$

4. 对于图 129 中的軸和輪轂，如果軸的半径为 6 吋而輪轂的外半径为 12 吋，試求均布压力 p。輪轂和軸两者直径的初始差为 0.012 吋。取 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2。

§ 42. 等厚度轉盘. 当圓盘繞垂直于本身的对称軸旋轉时，由慣性力产生的应力在高速时可能变得很大。这些应力的分布对称于旋轉軸，且可用 §40 中所述的方法計算。設应力在圓盘厚度上不变并取此厚度为 1。

将作用在体元上的慣性力与 §40 中所研究的力相加，可导出如图 127 中 mnm_1n_1 体元的平衡方程式。慣性力为

$$\frac{\gamma\omega^2r^2}{g}\,drd\theta, \tag{a}$$

其中 γ 为单位体积的重量，而 ω 为圓盘的角速度。其余的符号与 §40 中的相同。于是平衡方程式成

$$\sigma_t-\sigma_r-r\frac{d\sigma_r}{dr}-\frac{\gamma\omega^2r^2}{g}=0. \tag{b}$$

代入用位移 u 表示的应力 σ_t 和 σ_r［式(170)］，得下列方程式：

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}+(1-\mu^2)\frac{\gamma\omega^2r}{gE}=0. \tag{185}$$

将特解与相应齐次方程式的解［参看第 180 頁式(e)和(f)］相加，就可求得此方程式的通解。特解为

$$u = -(1-\mu^2)\frac{\gamma\omega^2}{gE}\frac{r^3}{8}.$$

于是运用記号

$$N = (1-\mu^2)\frac{\gamma\omega^2}{gE}, \tag{c}$$

則式(185)的通解为

$$u = -N\frac{r^3}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \tag{d}$$

同前面一样，确定式中的常数 C_1 和 C_2 时，須使其满足盘边处的条件。

对于边上无作用力的**中心有孔的圆盘**（图 127），盘边处的条件为

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0;\ (\sigma_r)_{r=b} = 0. \tag{e}$$

将式(d)代入方程組(170)的第一式，可得 σ_r 的通式，即

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[-\frac{3+\mu}{8}Nr^2 + (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2\frac{1}{r^2}\right]. \tag{f}$$

当 $r = a$ 和 $r = b$ 时，此表达式必定为零，如式(e)所示。取此情形，得下列用以計算 C_1 和 C_2 的方程式：

$$\begin{aligned} -\frac{3+\mu}{8}Na^2 + (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2\frac{1}{a^2} = 0, \\ -\frac{3+\mu}{8}Nb^2 + (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2\frac{1}{b^2} = 0, \end{aligned} \tag{g}$$

从而得

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8(1+\mu)}(a^2+b^2)N;\ C_2 = \frac{3+\mu}{8(1-\mu)}a^2b^2N. \tag{h}$$

将这些值代入式(d)可得 u 的通式。然后将求得的 u 表达式代入式(170)，得

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8(1-\mu^2)}EN\left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2b^2}{r^2}\right), \tag{186}$$

$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8(1-\mu^2)}EN\left(a^2 + b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2 + \frac{a^2b^2}{r^2}\right). \tag{187}$$

如果現在将式(c)所示的 N 值代入，并令

$$\frac{a}{b}=\alpha,\ \frac{r}{b}=x,\ b\omega=v,\tag{i}$$

則式(186)和(187)就变成

$$\sigma_r=\frac{\gamma v^2}{g}\frac{3+\mu}{8}\left(1+\alpha^2-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right),\tag{188}$$

$$\sigma_t=\frac{\gamma v^2}{g}\frac{3+\mu}{8}\left(1+\alpha^2-\frac{1+3\mu}{3+\mu}x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right).\tag{189}$$

可以看出,在边上,即 $x=1$ 或 $x=\alpha$ 处,径向应力 σ_r 为零;当 x 为其他值时,则 σ_r 为正. 最大值发生在

$$x=\sqrt{\alpha}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

或

$$r=\sqrt{ab}\tag{j}$$

处. 运用式(j)的 r,由式(188)得出

$$(\sigma_r)_{\max}=\frac{\gamma v^2}{g}\frac{3+\mu}{8}(1-\alpha)^2.\tag{190}$$

在圓盘的內边上,切向应力 σ_t 为最大. 将 $x=\alpha$ 代入式(189),則得

$$(\sigma_t)_{\max}=\frac{\gamma v^2}{g}\frac{3+\mu}{4}\left(1+\frac{1-\mu}{3+\mu}\alpha^2\right).\tag{191}$$

可以看出,$(\sigma_t)_{\max}$ 总是大于 $(\sigma_r)_{\max}$.

在图 130 中,以式(188)和(189)中括弧內各項之值作为縱坐标,而以 x 之值作为横坐标繪了图. 实綫代表 $\alpha=\frac{1}{4}$ 的情形,即內半径为外半径的1/4. 虛綫則代表 α 为其他值时式(189)中括弧內項之值. 由式(191)知,內边上的应力 $(\sigma_t)_{\max}$ 按抛物綫律随 α 而变化. 如图 130 中的曲綫 mn 所示.

有趣的是,当內半径非常小时,即 α 趋近于零时,在孔附近的应力 σ_t 有非常剧烈的变化. 这由曲綫 mpq 表示,对于此情形,

$$(\sigma_t)_{\max}=\frac{\gamma v^2}{g}\frac{3+\mu}{4}.\tag{192}$$

对于另一个极端情形，当内半径趋近于圆盘的外半径，即 α 趋近于 1 时，式(191)变成

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{\gamma v^2}{g}.$$

此与原书上卷第32頁对薄轉环求得的式(15)一致．可以看出，对于圆盘中心有孔的情形，最大应力并不随孔的半径改变很大；极薄的环之值只比有一小孔的极厚的环之值大 20% 左右．

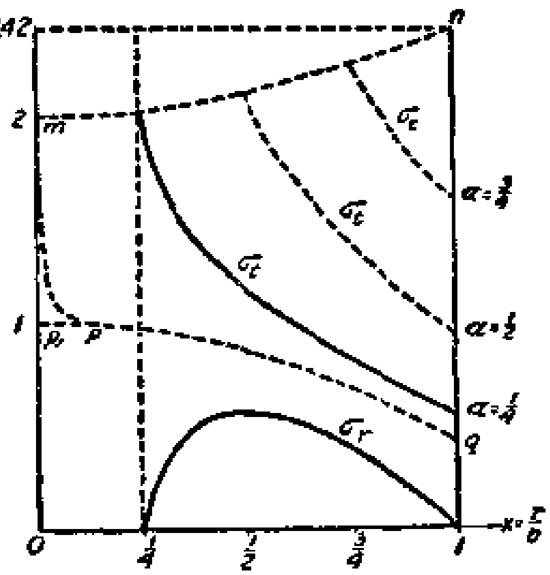


图 130

对于**实心圆盘**的情形，当 $r = 0$ 时边条件为 $u = 0$；因此必须取通解[式(d)]中的常数 C_2 等于零．常数 C_1 可由圆盘外边上 $\sigma_r = 0$ 这一条件求得．运用方程組(g)的第二式，得

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8(1+\mu)} N b^2. \tag{k}$$

现在将常数 C_1 和 C_2 之值引入位移 u 的通式[式(d)]中，然后将求得的表达式代入式(170)．这样得

$$\sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8}(1-x^2), \tag{193}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8}\left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} x^2\right), \tag{194}$$

式中 $x = r/b$．径向和切向应力均始終为正，并随 x 的减小而增大．换言之，愈接近中心，应力愈大．在中心($x = 0$)处，应力为

$$(\sigma_t)_{max} = (\sigma_r)_{max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8}. \tag{195}$$

将此与式(192)作一比較可以看出，由于有应力集中，中心小孔边上的应力为实心圆盘中心处的两倍．应力 σ_t 沿实心圆盘半径的变化如图 130 中的虚綫 p_1pq 所示．

上面对轉盘导出的方程式有时被用于如电动机轉子等較长的圓筒中[1]。在大型設备中，圓周速度可能非常大。由上面的討論知，由慣性力产生的应力与圓周速度的平方成正比，所以对于这种情形具有头等的重要性。因此，对于已知強度的材料，在給定的轉子角速度下，轉子的直径有一确定的最大极限。

在討論这种轉子的容用应力时，我們着重指出，极大的鍛件可能在材料的中心处有缺陷。此处也就是慣性力所产生的应力达到最大之处。为了消除这种疑慮，慣常沿轉子的軸綫搪一中心孔。虽然最大应力由于孔的存在而提高了一倍，但是这一缺点因有可能探查鍛件內部材料的是否健全而得到补償。此外，还慣常在預先試驗时使轉子在一定的超速[2]下运轉，致使孔周的应力可超过屈服点。在轉子停止后，由于孔处材料的永久变形，应力不完全消失。金屬的已发生屈服的里面部分为尚未发生屈服的外面部分所压縮，相反地，外面部分受拉伸[3]。这些情形与受內压而产生了过应力的厚壁圓筒中的(参看第 184 頁)类似。孔处由过应力产生的殘余应力与由慣性力产生的应力方向相反；因此过应力对轉子中最終的应力分布产生一有利的影响[4]。

还应当着重指出，上面求得的应力方程［参看式(188)和(189)］，除了 ν 和决定材料性質的常数外，只包含如 α 和 x 等的比值。因此，对于已知材料和已知的圓周速度，在几何相似的轉子中，位置相似的各点上应力相等。这一事实簡化了几何相似的圓盘中应力的計算，它也适用于根据模型試驗来确定大型圓盘的強度。

在前面的討論中假設了盘边无外力作用。如果有拉力或压縮

---

1) 厚盘中的应力分布在作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity" (1951 年版)第 352 頁中有討論。

2) 在电动机中，通常比使用速率大 20%。

3) 此問題曾由 C. Honegger 作了討論，*Brown Bowery C. Mitt.*, Nov. 1919.

4) 轉盘中由于金屬屈服而产生的殘余应力曾由 A. Nadai 和 L. H. Donnell 加以研究；参看 *Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div.*, 1928. 并参看 H. Hencky, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 4, p. 331, 1924 和 F. Laszlo, *ibid.*, vol. 5, p. 281, 1925.

力沿盘边均匀分布时，则由此产生的应力可用厚壁圆筒的理論(§40)求得．这些应力[参看式(171)]可写成下列形式：

$$\sigma_r = k - \frac{n}{r^2},$$
$$\sigma_t = k + \frac{n}{r^2}, \tag{1}$$

式中 k 和 n 为决定于圆盘尺寸及作用在边上的外力大小的常数．将式(1)的应力与式(188)和(189)的应力迭加，則总应力就可写成下列形式：

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \beta_1\omega^2r^2,$$
$$\sigma_t = A - \frac{B}{r^2} - \beta\omega^2r^2, \tag{196}$$

式中

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{g}\frac{3+\mu}{8}; \quad \beta = \frac{\gamma}{g}\frac{1+3\mu}{8}, \tag{197}$$

而 A 和 B 为积分常数，对于任何特定情形，均可用(171)，(188)和(189)三式算得．运用記号

$$s = \sigma_r + \beta_1\omega^2r^2,$$
$$t = \sigma_t + \beta\omega^2r^2 \tag{198}$$

和

$$w = \frac{1}{r^2}, \tag{199}$$

式(196)变成

$$s = A + Bw; \quad t = A - Bw. \tag{200}$$

如果圆盘任意点的 s 和 t 为已知，則对于任何其他点，它們的大小就不难用下列图解法[1]求得．以 s_1 和 t_1 表示在 $w=w_1$ 之点 s 和 t 的大小(参看图 131)．于是在 $w=w_2$ 的任何其他点处 s 和 t 的大小 s_2 和 t_2 可由通过 w_2 的鉛直綫与直綫

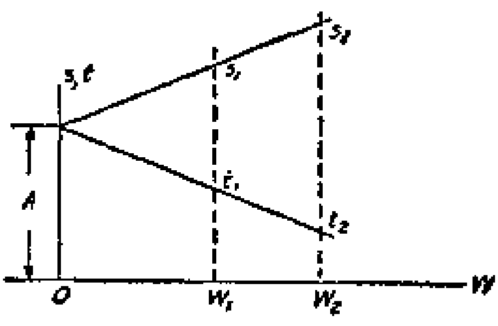


图 131

1) 此法由 R. Grammel 所发展，*Dinglers Polytech. J.*, vol. 338, p. 217, 1923.

s_1s_2 及 t_1t_2 之交点求得，直綫 s_1s_2 与 t_1t_2 之交点是在纵坐标軸上($w=0$ 处)，它們与此軸所成的傾角相等。这些直綫以图形表示了方程式(200)。它們在 $w=0$ 的軸上具有公共的纵坐标 A，并具有大小相等而符号相反的斜率($\pm B$)。在計算变厚度轉盘中的应力时，如我們将在下节中看到的，此图解法非常有用。

习　　题

1。試确定一外半径为 26 吋，內孔半径为 4 吋的轉子中由离心力产生的应力。轉子的外部切成放繞組用的 10 吋深的一些槽(图 132)。轉子由鋼制成，其轉速为 1800 轉/分。槽中繞組的重量与切去材料的重量相同。

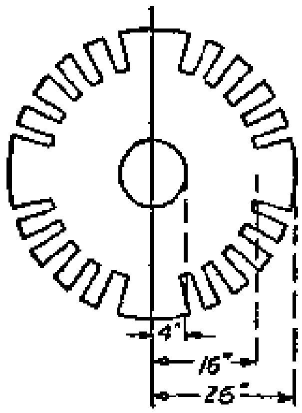


图　132

解. 由于径向槽的存在，外半径与 16 吋半径之間的轉子部分不能承受圓周拉应力。由此轉环产生的离心力，作为一径向拉应力沿 16 吋半径的圓柱面传递。此应力的大小为

$$p_0=\frac{1}{2\pi\times16}\int_{r=16}^{r=26}\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r\,dV=\frac{1}{2\pi\times16}\frac{\gamma\omega^2}{g}2\pi\int_{16}^{26}r^2dr$$

$$=\frac{\gamma\omega^2}{g}\frac{1685}{6}.$$

代入 $\gamma=0.284$ 磅/吋^{3}和 $g=32.2\times12$ 吋秒$^{-2}$，得

$$p_0=7334\ 磅/吋^2.$$

內边上由拉应力 p_0 产生的最大切应力由式(177)求得为：

$$\sigma_t'=7334\times\frac{2\times16^2}{16^2-4^2}=15700\ 磅/吋^2.$$

对轉盘[式(191)]算得的，同一边上由 16 吋与 4 吋半径之間的轉子質量产生的最大切应力为 $\sigma_t''=5580$ 磅/吋^2。于是內边上的总最大圓周应力为 $(\sigma_t)_{max}=\sigma_t'+\sigma_t''=15700+5580\approx21300$ 磅/吋^2。

2. 有一鋼环冷縮套装在鑄鉄圓盘上(图 128). 試确定在 3600 转/分下由慣性力引起的冷縮装配压力的改变量,如果 $a = 1$ 吋, $b = 5$ 吋, $c = 10$ 吋,鋼的楊氏模量 $E_s = 30 \times 10^6$ 磅/吋^2, 鑄鉄的楊氏模量 $E_{c.i.} = 16 \times 10^6$ 磅/吋^2, $\gamma_s = 0.284$ 磅/吋^3, $\gamma_{c.i.} = 0.260$ 磅/吋^3.

解. 令 p_0 为环与盘之間的压力增量. 对于外环, 式(f)中的任意常数可由下列方程式确定:

$$\begin{aligned}
&\frac{E_s}{1-\mu^2}\left[-\frac{3+\mu}{8}Nc^2+(1+\mu)C_1-(1-\mu)C_2\frac{1}{c^2}\right]=0,\\
&\frac{E_s}{1-\mu^2}\left[-\frac{3+\mu}{8}Nb^2+(1+\mu)C_1-(1-\mu)C_2\frac{1}{b^2}\right]=-p_0.
\end{aligned}\qquad \text{(m)}$$

当我們将式(f)应用于內盘时,对于內盘, 任意常数用 C_1' 和 C_2' 表示,而 N' 为由式(c)所定义的常数,得下列用以确定 C_1' 和 C_2' 的方程式:

$$\begin{aligned}
&\frac{E_{c.i.}}{1-\mu^2}\left[-\frac{3+\mu}{8}N'b^2+(1+\mu)C_1'-(1-\mu)C_2'\frac{1}{b^2}\right]=-p_0,\\
&\frac{E_{c.i.}}{1-\mu^2}\left[-\frac{3+\mu}{8}N'a^2+(1+\mu)C_1'-(1-\mu)C_2'\frac{1}{a^2}\right]=0.
\end{aligned}\qquad \text{(n)}$$

四个常数 C_1、C_2, C_1' 和 C_2' 可由式 (m) 和 (n) 求得为 p_0 的函数. p_0 的大小現在可由接触面上盘与环两者的径向位移相等这一条件求得. 运用式(d)后,于是用以确定 p_0 的方程式为

$$-N\frac{b^3}{8}+C_1b+\frac{C_2}{b}=-N'\frac{b^3}{8}+C_1'b+\frac{C_2'}{b}. \qquad \text{(o)}$$

数字計算留給讀者.

3. 試求 §41 題 4 所計算的压力 p 的改变量, 如果軸和輪轂的轉速为 1800 轉/分, $\gamma = 0.284$ 磅/吋^{3}和 $E = 30 \times 10^6$ 磅/吋^2.

§ 43. 变厚度轉盘. 对于变厚度圓盘, 确定应力的問題更为复杂[1]. 我們現在来討論解此問題的一个近似方法,此法係以一組

---

1) 适用于此情形的通用方程式以及各种不同求解方法的研究,可在 A. Stodola 的著作中見到, Dampf-und Gasturbinen, 6th Ed., pp. 312–40, 1924. 錐形輪廓的轉盘曾由 H. M. Martin 作了研究, *Engineering*, vol. 115, p. 1, 1923;

等厚度圓盘代替实际輪廓作为根据（图 133）[1]。 各个圓盘中的应力均可用 §42 中所列出的方程式計算。于是，我們必須研究这些圓盘的分界处，即如 2，3，4 等的截面处（图 133）的条件，在这些地方厚度发生急剧的变化。如果 y 和 $y+\Delta y$ 表示所研究的截面左右两边的圓盘厚度，則径向应力 σ_r 的相应变化 $\Delta\sigma_r$ 可由下式求得：

$$\sigma_r y=(\sigma_r+\Delta\sigma_r)(y+\Delta y),$$

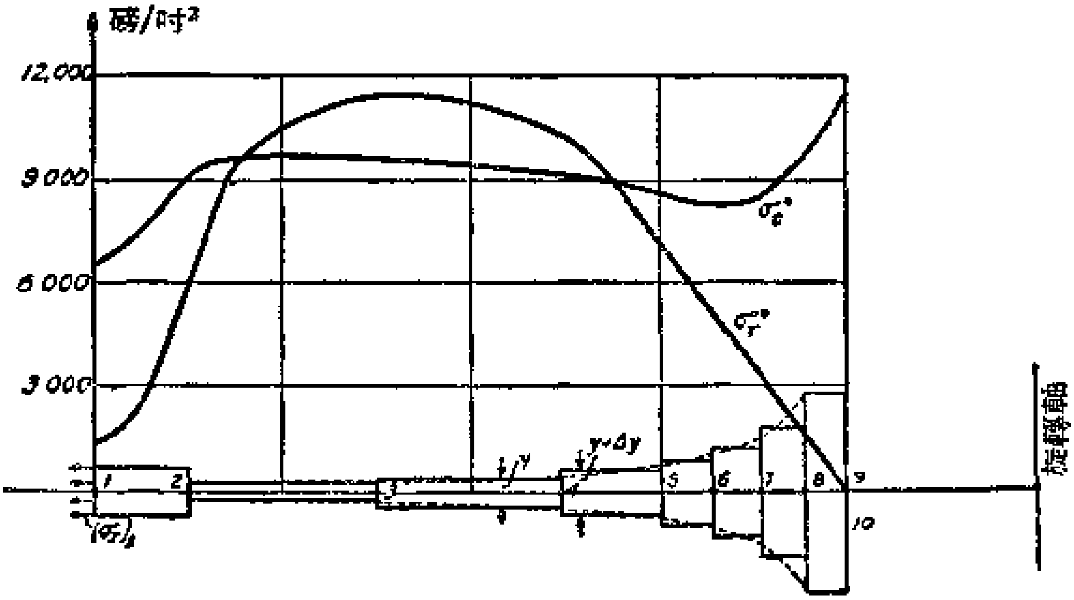


图 133

如同以前那样，式中假設了应力在圓盘厚度上均匀分布。 解此方程式，得

B. Hodkinson, *Engineering*, vol. 116, p. 274, 1923; 和 A. Fischer, *Z. österr. Ing. u. Architekt-Ver.*, vol. 74, p. 26, 1922. 并参看 I. Malkin 的著作，Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, Berlin, 1935, 以及 C.B. Biezeno 和 R. Grammel 的著作，Technische Dynamik, vol. 2, p. 5, 1953.

1) 此法是由 M. Donath 所发展的，Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe, Berlin, 1912. 它由 H. Hearle 用英文来說明，*Engineering*, vol. 106, p. 131, 1918. 此法的进一步发展是 R. Grammel 所作的，*loc. cit.*, p. 221, 图 133 的数字例子系取自此論文。 并参看 M. G. Driessen 的論文，*Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div.*, 1928; R. Grammel, *Ing. Arch.*, vol. 7, p. 136, 1936; R. G. Olsson, *ibid.*, vol. 8, p. 270 和 p. 373, 1937; A. Held, *ibid.*, vol. 10, p. 339, 1939. 解此問題的近似方法是由 G. F. Lake 所給出的，*J. Appl. Mech.*, vol. 12, p. A-65, 1945.

表 17 轉盘中的应力計算

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
截面	r 吋	r^2 吋^2	10^3w 吋$^{-2}$	$\beta_1\omega^2r^2$ 磅/吋^2	$\beta\omega^2r^2$ 磅/吋^2	y 吋	$-\frac{\Delta y}{y+\Delta y}$	σ_r 磅/吋^2	Δs 磅/吋^2	Δt 磅/吋^2	σ_t 磅/吋^2	σ_r^0 磅/吋^2	σ_t^0 磅/吋^2
1	19.7	388	2.58	11,620	6,680			1,420 0			6,360 710	1,420	6.800
2	17.7	314	3.18	9,410	5,420	.985	+1.50	3,630 −80	5,450 −130	1,640 −40	7,620 795	6,250	8,900
3	13.8	190	5.26	5,700	3,290	.394	−.333	14,000 −510	−4,670 +170	−1,390 +60	10,020 1,070	11,400	10,000
4	9.85	97.0	10.31	2,910	1,680	.591	−.400	13,500 −1,020	−5,400 +410	−1,620 +130	8,900 1,820	10,300	9,300
5	7.87	62.0	16.1	1,860	1,070	.985	−.286	9,680 −1,340	−2,740 +380	−825 +110	7,300 2,640	7,600	8,600
6	6.89	47.4	21.1	1,420	820	1.38	−.263	7,550 −1,550	−1,990 +410	−597 +130	6,530 3,300	5,700	8,400
7	5.91	34.9	28.6	1,050	603	1.87	−.321	5,970 −1,990	−1,920 +640	−570 +200	6,110 4,270	3,980	8,600
8	4.92	24.2	41.3	726	418	2.76	−.300	4,280 −2,590	−1,250 +780	−370 +230	5,960 5,720	2,260	9,500
9	3.94	15.5	64.5	465	268	3.94		2,530 −4,000			6,350 8,100	0	11,500

$$\Delta\sigma_r = -\frac{\Delta y}{y+\Delta y}\sigma_r. \tag{a}$$

該截面上切向应力的变化 $\Delta\sigma_t$ 可由截面左右两面的单位周向伸長量相同这一条件求得. 因此

$$\sigma_t - \mu\sigma_r = (\sigma_t + \Delta\sigma_t) - \mu(\sigma_r + \Delta\sigma_r),$$

从而得

$$\Delta\sigma_t = \mu\Delta\sigma_r.$$

于是由式(198)得

$$\begin{aligned}\Delta s = \Delta\sigma_r &= -\frac{\Delta y}{y+\Delta y}\sigma_r,\\ \Delta t = \Delta\sigma_t &= \mu\Delta s.\end{aligned} \tag{201}$$

(197),(198),(199)和(201)諸式連同图 131 中所示的图解法足以用来計算变厚度圓盘.

以图 133 中所示的圓盘作为一例,圓盘的轉速为 3000 轉/分. 圓盘的尺寸列于表 17 中. 此外,設作用在外边上的离心力, 例如由渦輪叶片引起的力,在外边上产生一径向应力,其大小等于

$$(\sigma_r)_1 = 1420 \text{ 磅/吋}^2.$$

材料的性質为 $\mu = 0.3$ 和 $\gamma = 0.283$ 磅/吋^3. 于是由式(197)得

$$\beta_1\omega^2 = 30.0 \text{ 磅/吋}^4;\quad \beta\omega^2 = 17.3 \text{ 磅/吋}^4.$$

表 17 中的开头八列是根据上面的数据和图 133 算出的.

我們首先計算圓盘外边上的应力,該处 $(\sigma_r)_1$ 为已知. 外边上切向应力 $(\sigma_t)_1$ 的大小通常为未知数, 开始时必須假設一任意值. 最簡单的假設为取 $(\sigma_t)_1$ 时使 s 和 t [参看式(198)]相等, 对于此情形

$$(\sigma_t)_1 = (\sigma_r)_1 + \beta_1\omega^2 r_1^2 - \beta\omega^2 r_1^2,$$

或运用表中第 5 列和第 6 列的数字,得

$$(\sigma_t)_1 = 1420 + 11620 - 6680 = 6360 \text{ 磅/吋}^2.$$

現在,由式(198)得

$$s_1 = (\sigma_r)_1 + \beta_1\omega^2 r_1^2 = 1420 + 11620 = 13040 \text{ 磅/吋}^2,$$

$$t_1 = (\sigma_t)_1 + \beta\omega^2 r_1^2 = 6360 + 6680 = 13040 \text{ 磅/吋}^2.$$

既然 $s_1 = t_1$, 因此在图 131 所述的作图法中 s 和 t 两直綫重合.

在图 134 中 s 和 t 取为縱坐标而 $w=1/r^2$ 取为横坐标，这些綫用平行于 w 軸的直綫 a–a 表示。相应于圓盘径向距离 1–2（图 134）的此綫长度可由表中第 4 列的数字确定。对于截面 2（图 133），由此得

$$s_2=t_2=13040\text{ 磅/吋}^2;$$

然后运用式(198)得

$$(\sigma_r)_2=s_2-\beta_1\omega^2r_2^2=13040-9410=3630\text{ 磅/吋}^2,$$

$$(\sigma_t)_2=t_2-\beta\omega^2r_2^2=13040-5420=7620\text{ 磅/吋}^2.$$

在截面 2 处，圓盘的厚度发生突变。为了計及这一点，我們运用式(201)連同表中第 8 列的数字。于是

$$(\Delta s)_2=(\Delta\sigma_r)_2=\left(-\frac{\Delta y}{y+\Delta y}\sigma_r\right)=1.50\times 3630$$

$$=5450\text{ 磅/吋}^2,$$

$$(\Delta t)_2=(\Delta\sigma_t)_2=\mu(\Delta s)_2=0.3\times 5450=1640\text{ 磅/吋}^2.$$

将这些值与图 134 中点 a 的縱坐标相加以求得点 b 和 c；然后按图 131 中所述的方法作直綫 bb 和 cc。这样，对于截面 3 求得了

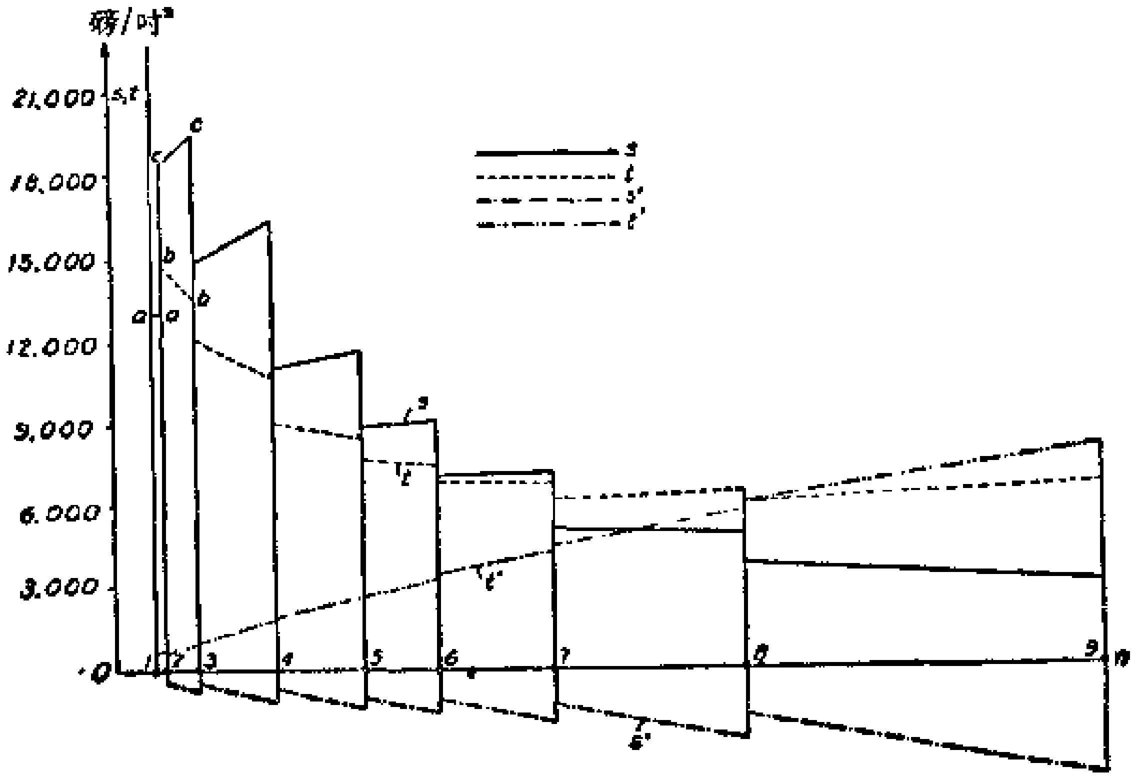


图 134

s_3 和 t_3. 重复上述的步驟,对截面 3 求得所需的全部数据，依此类推. 我們可用此法算得上表的第 9 列至第 12 列的上行各値.

由于圓盘圓周上的应力 $(\sigma_t)_1$ 是任意取定的,因此內边上的条件通常不能满足，而用上法求得的应力 $(\sigma_r)_9$ 将非实际存在的应力. 为了满足內边上的条件,需要作补充計算. 我們設 $(\sigma_r)_1 = 0$ 和 $\omega = 0$，然后取 $(\sigma_t)_1$ 的任意値. 在計算本問題时,取$(\sigma_t)_1$ 等于 710 磅/吋^2. 于是我們同前面一样求得相应的应力分布. 对于此情形,由式(198)得 $s = \sigma_r$ 和 $t = \sigma_t$. 計算結果列于第 9 列至第 12 列的下行,相应的作图如图 134 中的綫 t' 和 s' 所示. 将上面两种应力分布作如下的組合,可求得满足圓盘內边上眞实条件的解:令 $(\sigma_r)_9$ 和 $(\sigma_r)'_9$ 各为第一次和第二次計算时求得的圓盘內边上的径向应力,而令 $(\sigma_r)^0_9$ 表示內边上的眞实应力. 于是对于眞实条件的解,可由第二次分布的应力乘以

$$n = \frac{(\sigma_r)^0_9 - (\sigma_r)_9}{(\sigma_r)'_9},$$

再与第一次应力分布迭加而求得. 在厚度突变的截面上，平均应力可算出如下:

$$(\sigma_r)^0 = \left(\sigma_r + \frac{\Delta s}{2}\right) + n\left(\sigma'_r + \frac{\Delta s'}{2}\right),$$

$$(\sigma_t)^0 = \left(\sigma_t + \frac{\Delta t}{2}\right) + n\left(\sigma'_t + \frac{\Delta t'}{2}\right).$$

对于內边上的径向应力为零的情形,这些計算的結果列于表 17 的最后两列,并用图 133 中的两曲綫表示.

§ 44. 空心长圓筒中的热应力. 当圓筒壁受热不均匀时，其各部分不均匀地膨胀,而相互間的干涉产生了热应力. 在下面的討論中,取温度分布对称于圓筒軸綫,并沿此軸綫不变. 于是圓筒的变形对称于軸綫,而我們可用 §40 中所推証的方法. 用垂直于軸綫而相距单位长的两截面从圓筒上切下一圓环. 在受热而变形时，可以認为取得离圓筒两端足够远的这种截面仍保持为平面[1],

1) 在圓筒两端,軸向应力为零,而应力分布較为复杂.

因此，軸向的单位伸长量为常数．令 z 軸为圆筒的軸綫，w 为在 z 軸方向的位移，而其余的符号则与 §40 和图 127 中的相同．于是在三个垂直方向的单位伸长量各为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{dw}{dz} = \text{常数}, \\ \varepsilon_r &= \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

这些伸长量可以表示为应力 $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_t$ 和热膨胀的函数．以 α 表示綫膨胀系数，而以 t 表示温度高于均匀初温之增量．温度增量 t 只随径向距离 r 而变．由原书上卷第 66 頁式(43)得，伸长量为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) + \alpha t, \\ \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_t) + \alpha t, \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_r) + \alpha t. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

用符号 Δ 表示单位体积的增量，得

$$\Delta = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_r + \sigma_t) + 3\alpha t. \tag{c}$$

由式(b)和(c)得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\Delta\right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}\Delta\right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_t + \frac{\mu}{1-2\mu}\Delta\right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

体元 mnm_1n_1（图 127）的平衡方程式为［参看第 180 頁式(b)］：

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{e}$$

将式(d)和(a)代入式(e)，得

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dt}{dr}. \tag{202}$$

此方程式确定了在任何特定的温度分布下的位移 u. 它可以写成下列形式：

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right]=\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dt}{dr}.$$

对 r 积分，得

$$\frac{d}{dr}(ru)=\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha tr+2C_1r.$$

由第二次积分得出解为

$$u=\frac{1}{r}\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_a^r\alpha trdr+C_1r+C_2\frac{1}{r}, \tag{f}$$

式中 C_1 和 C_2 为积分常数，确定时须使其满足圆筒内外两表面上的条件. 如果这些表面不受外力作用，则 C_1 和 C_2 可由下列条件确定：

$$(\sigma_r)_{r=a}=0;\ (\sigma_r)_{r=b}=0. \tag{g}$$

将 $\varepsilon_r=du/dr$ 和 $\varepsilon_t=u/r$ 代入方程组(d)的第二式，然后取式(f)中的 u，可得 σ_r 的通式，即

$$\sigma_r=\frac{E}{1+\mu}\left(-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{r^2}\int_a^r\alpha trdr+\right.$$
$$\left.+\frac{C_1}{1-2\mu}-\frac{C_2}{r^2}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_z\right). \tag{h}$$

于是由式(g)得

$$\begin{aligned}C_2&=\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{a^2}{b^2-a^2}\int_a^b\alpha trdr,\\ C_1&=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu}\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b\alpha trdr-\mu\varepsilon_z.\end{aligned} \tag{i}$$

将这些值代入式(h)，σ_r 的通式就变成

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_a^r\alpha trdr+\frac{r^2-a^2}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b\alpha trdr\right]. \tag{203}$$

σ_t 的通式可由平衡方程式(e)求得，即

$$\sigma_t = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$= \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{1}{r^2}\int_a^r \alpha t r dr + \frac{r^2+a^2}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b \alpha t r dr - \alpha t\right]. \quad (204)$$

如果壁厚上温度的分布为已知，我們就能积出式(203)和(204)中的积分，而求得任何特定情形下的 σ_r 和 σ_t。

当圓筒壁的內表面温度为 t_i，而外表面的温度为零时[1]，平衡温度分布可用下列函数表示：

$$t = \frac{t_i}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{r}. \quad (205)$$

用了 t 的这一表达式，式(203)和(204)就变成

$$\sigma_r = \frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}}\left[-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\right], \quad (206)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}}\left[1-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\right]. \quad (207)$$

σ_t 的最大值发生在圓筒的內表面或外表面上. 将 $r=a$ 和 $r=b$ 代入上式，得

$$(\sigma_t)_{r=a} = \frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}}\left(1-\frac{2b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right), \quad (208)$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = \frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}}\left(1-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right). \quad (209)$$

对于 $a/b=0.3$ 和 t_i 为負值的特殊情形，壁厚上热应力的分布如图 135 所示.

如果壁厚比起圓筒的外半径来很小时，我們可令

1) 圓筒表面的任何其他温度状态，可由此状态与不产生任何应力的均匀加热或冷却相迭加而得.

$$\frac{b}{a}=1+m,\ \ln\frac{b}{a}=m-\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{3}-\cdots$$

并把m看作一很小的值来简化式(208)和(209). 于是

$$(\sigma_t)_{r=a}=-\frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)}\left(1+\frac{m}{3}\right), \tag{j}$$

$$(\sigma_t)_{r=b}=\frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)}\left(1-\frac{m}{3}\right). \tag{k}$$

对于筒壁极薄的情形,这些方程式括弧内的第二項可忽略不計,因此这些方程式就与对受热不均匀的板导出的方程式[参看式(87)]一樣.

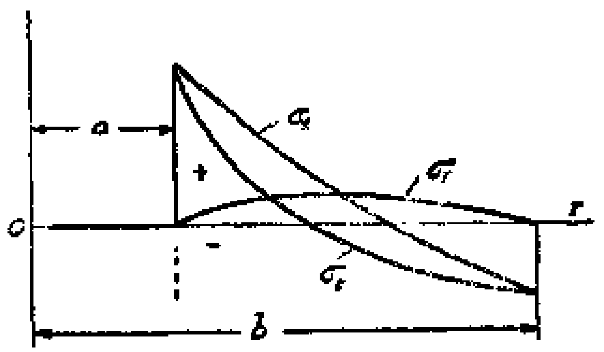


图 135

在上面的討論中只研究了σ_r和σ_t,并指出了这些值与圓筒軸綫方向的伸长量ε_z无关. 应力σ_z可由方程組(d)的第一式算得. 将$\varepsilon_r=du/dr$, $\varepsilon_t=u/r$代入,并对u运用式(f)而对任意常数运用式(i),我們就能求得σ_z的通式. 此表达式包含了圓筒軸綫方向的不变伸长量ε_z. 如果我們假設了圓筒能作自由膨胀,就可由垂直于z軸的圓筒截面上法向力之和等于零这一条件算出ε_z的大小. 此时得σ_z的最后表达式如下:

$$\sigma_z=\frac{E\alpha t_i}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}}\left(1-2\ln\frac{b}{r}-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right). \tag{210}$$

可以看出,在圓筒的内、外两表面上,应力σ_z等于σ_t[1].

对于中心无孔,而厚度比起半徑b来可認为很小的等厚度圓盘,其徑向和切向应力可用下式表示:

---

1) 关于圓筒中热应力的較詳細討論曾由 C. H. Lees 所作出, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 101, 1922. 快速計算(206), (207)和(210)諸式中的应力所用的图表曾由 L. H. Barker 所給出, *Engineering*, vol. 124, p. 443, 1927. 隨后的数字例子系取自此論文.

$$\sigma_r = \alpha E\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b trdr - \frac{1}{r^2}\int_0^r trdr\right), \tag{211}$$

$$\sigma_t = \alpha E\left(-t + \frac{1}{b^2}\int_0^b trdr + \frac{1}{r^2}\int_0^r trdr\right). \tag{212}$$

对于任何特定情形，当温度 t 已知为 r 的函数时，可很快积出这些表达式中的积分而求得热应力。

热应力在实用中很为重要，特别是在汽輪机轉子、重載軸或大型涡輪机圓盘等的巨大圓筒中。 对于所有这些場合，均須逐漸加热或冷却，以减小径向的温度梯度[1]。 在柴油机中，热应力也很重要[2]。 对于拉伸強度較低的材料，如石块、砖和混凝土等，当 t_i 为正值时，裂縫可能在圓筒的外表面上先发生。

习　　題

1. 試确定特性如下的圓筒中的热应力：$2a = \frac{3}{8}$吋，$2b = 1\frac{1}{4}$吋，$E\alpha/(1-\mu) = 615$，如果內表面温度 $t_i = -1$℃，而外表面温度为零时。

解. 由式(208)和(209)得

$$(\sigma_t)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = 420 \text{ 磅/吋}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = -194 \text{ 磅/吋}^2.$$

根据式(206)，应力 σ_r 的最大值发生在 $r = 0.3$ 吋处，其大小等于 87 磅/吋^2. 壁厚上的应力分布如图 135 所示。

---

1) 关于温度沿軸綫变化的圓筒中热应力的討論，曾由 A. Stodola 所作，*loc. cit.*, p. 223，附录. 并参看 G. Eichelberg; *Forschungsarb.*, No. 220, 1923 和 No. 263. 关于圓盘中热应力的討論，可参看 H. Quednau, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 72, p. 522, 1928. 同一問題在作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity" (1951 年版)第 408 頁中有討論.

2) 参看 R. Zulzer, "Temperature Variation and Heat Stresses in Diesel Engines", *Engineering*, vol. 121, p. 447, 1926; A. Nägel. "Transfer of Heat in Reciprocating Engines", *ibid.*, vol. 127, p. 282, 1929; W. Nusselt, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 70, p. 468, 1926; J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. A-33, 1937.

第七章 扭 轉

§ 45. 非圓截面的軸. 圓軸的扭轉問題已在上卷中（原书第281頁)作了研究. 矩形截面軸的最大应力和扭轉角的公式也已列出. 还有几种其他截面形状的扭軸，其应力分布和扭轉角的問題也获得了解决. 在下文中将列出可能具有实用价值的一些最后結果.

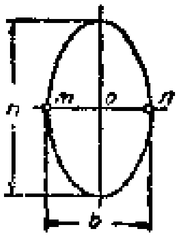


图 136

橢圓截面[1]. 最大剪应力发生在短軸 mn 的两端(图 136),其大小为

$$\tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi b^2 h}. \tag{213}$$

单位长度內的扭轉角为

$$\theta = \frac{4\pi^2 M_t I_p}{A^4 G}, \tag{214}$$

式中 $I_p = (\pi/64)(bh^3 + b^3h)$ 为截面的极慣性矩(参看原书上卷第 420 頁附录 A),而 $A = \frac{\pi bh}{4}$ 为截面积.

等边三角形. 最大剪应力发生在各边的中点(图 137 中的点 m),可由下式算得:

$$\tau_{max} = \frac{20M_t}{b^3}. \tag{215}$$

单位长度內的扭轉角为

$$\theta = \frac{M_t}{0.6GI_p} = \frac{46.2M_t}{b^4G}. \tag{216}$$

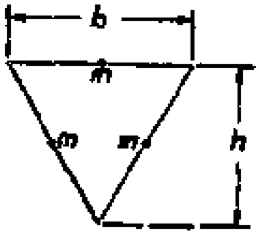


图 137

正六角形[2]. 对于此情形

---

1) 对于橢圓截面和等边三角形截面的扭轉問題的解系取自 St.-Venant, *Mém. des savans étrangers*, vol. 14, 1855. 此处所列公式的推导可在作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity" (1951 年版)一书中第 258 頁見到.

2) 关于正六角形、正八角形和梯形的解，可参看 C. Weber, Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit, Berlin, 1921。

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{0.217Ad},\tag{217}$$

$$\theta=\frac{M_t}{0.133Ad^3G},\tag{218}$$

式中 d 为內切圓直径，而 A 为截面积。

正八角形. 对于此情形

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{0.223Ad},\tag{219}$$

$$\theta=\frac{M_t}{0.130Ad^3G},\tag{220}$$

式中 A 和 d 的意义与前面情形相同。

梯形. 对于等腰梯形的情形，最大应力和扭轉角的近似值可用一等效矩形来代替此梯形而求得。等效矩形如图 138 中虛綫所示。自梯形的重心 C 对两側边作垂綫 BC 及 CD，然后通过点 B 和 D 作鉛直綫。如果将原书上卷第 289 頁列出的式(158)和(159)应用于这样求得的矩形截面，就可得出图 138 中梯形的 τ_{max} 和 θ 的近似值。

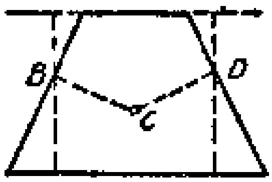


图 138

对于任何实心(非管形)軸，以同样面积 A 和同样极慣性矩 I_p 的等效橢圓来代替原截面，可得扭轉角的近似值。于是 θ 的近似值可由公式(214)求得。

§ 46. 薄膜比拟[1]. 薄膜比拟建立了受均布載荷薄膜的撓曲面与扭杆中的应力分布之間一定的关系。設想有一外形与扭轉构件截面形状相同的均質薄膜，薄膜承受均匀的横向压力，并在各边承受均匀的拉伸。可以看出，此薄膜撓曲面[2]的微分方程式与确定

1) 此比拟法是由 L. Prandtl 所发展出来的；参看 *Phys. Z.*, vol. 4, p. 758, 1903; *Jahresber. deut. math. Ver.*, vol. 13, p. 31, 1904. 关于进一步的发展，可参看 A. A. Griffith 和 G. I. Taylor 的論文，*Proc. Inst. Mech. Engrg.*, p. 755, 1917 及 *Advisory Comm. Aeronaut.* (England), *Tech. Repts.*, vol. 3, pp. 920, 938 及 950, 1917—1918. 并参看作者和 Goodier 的"Theory of Elasticity", p. 289, 1951.

2) 設撓度很小。

扭杆截面上应力分布的方程式形式相同. 如果 S 为薄膜边綫单位长度內的拉力，p 为单位面积上的横向压力，而 θ 为杆单位长度內的扭轉角，并且如果

$$\frac{p}{S}=2G\theta, \tag{a}$$

則两个微分方程式就完全相同. 如果此条件得以滿足，則薄膜表面与扭轉中的剪应力分布之間的关系如下：(1)挠曲薄膜上任意点处**等高綫的切綫**表示扭杆截面上相应点的剪应力方向. (2)薄膜上任意点处的**最大斜率**等于扭杆上相应点的剪应力大小. (3)挠曲薄膜的表面与其外形綫的平面間所包的**容积的两倍**等于扭杆的轉矩.

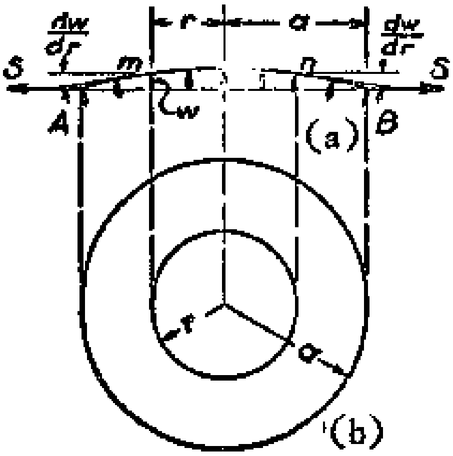


图 139

对于圓軸的情形，不难証明上述各点. 以图 139 表示因受力 S 而均匀伸张，并受向上作用的均布压力 p 的相应圓膜. 研究薄膜上半径为 r 的同心部分 mn (图 139)，我們看出，作用于該部分的总压力为 $\pi r^2 p$. 此压力为拉力 S 所平衡，拉力 S 在半径为 r 的圓上均匀分布，而其方向則与挠曲薄膜相切. 以 w 表示薄膜的挠度，得

$$\pi r^2 p=-2\pi r S\frac{dw}{dr}$$

和

$$-\frac{dw}{dr}=\frac{pr}{2S}. \tag{b}$$

将公式 (a) 所示的 $\frac{p}{S}$ 值代入此式，得

$$-\frac{dw}{dr}=G\theta r. \tag{c}$$

在此式的右边，我們得扭轉圓軸中扭应力的表达式[参看原书上卷第 282 頁式(b)]. 因此，挠曲薄膜的斜率表示了扭应力的大小. 薄膜上每一点的最大斜率均处于經綫方向；因此，軸上每一点

的扭应力其方向均垂直于半径. 此結論复与初等扭轉理論的結果符合.

为了确定产生式(c)所示应力的轉矩，我們来計算撓曲薄膜(图139a)与边綫 AB 的平面間所包的容积. 由式(c)的积分得出薄膜的撓曲面为

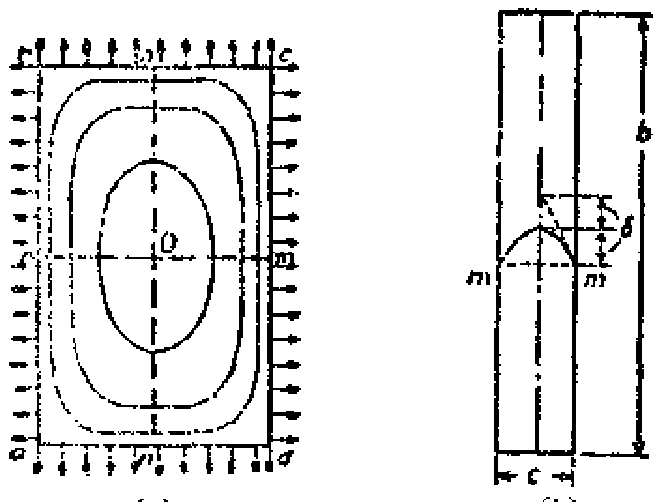
$$w=\frac{G\theta}{2}(a^2-r^2),$$

而所需的容积为

$$V=\int_0^a 2\pi rw\,dr=G\theta\frac{\pi a^4}{4}=\frac{1}{2}G\theta I_p.$$

将此表达式与轉矩的普通公式[参看原书上卷第284頁式(150)]作一比較，我們在薄膜比拟中得出，容积的两倍表示轉矩的大小. 因此，上面关于薄膜比拟的三点說明，在圓軸的情形下不难得到証明。

在其他情形下，对于軸的已知截面，撓曲薄膜的表面形状很容易想象；因此对于扭轉中的应力分布，容易作出定性的結論. 例如，对于矩形截面，撓曲薄膜的表面可用图140a所示的等高綫来表示. 应力与等高綫間的距离成反比；因此各綫愈靠近、应力愈大. 最大应力发生在点 m-m 处，該处薄膜的斜率最大. 在四角 a, b, c, d 处，即薄膜表面与周綫 $abcd$ 的平面重合之处，此表面的斜率为零；因此这些点上的剪应力为零.



(a) (b)

图 140

再研究狭长矩形截面的情形(图 140b)． 受均布载荷的薄膜上，离矩形短边較远之处的挠曲面可看作为圆柱形。按此假設，表面上每一小条 mm 的性状均似一受均布載荷的綫，其最大挠度可由下式表示：

$$\delta=\frac{pc^2}{8S},$$

或运用公式(a)，得

$$\delta=\frac{c^2}{4}G\theta.$$

最大应力等于点 $m-m$ 处的斜率．对于拋物綫，此斜率为 $4\delta/c$；因此

$$\tau_{\max}=\frac{4\delta}{c}=cG\theta. \tag{d}$$

相应的轉矩为薄膜所包的容积的两倍．忽略矩形的短边对薄膜挠度的影响，且容积作为长度为 b 的拋物柱来計算，得

$$M_t=2\cdot\frac{2}{3}\delta bc=\frac{1}{3}bc^3G\theta, \tag{e}$$

从而得

$$\theta=\frac{M_t}{\frac{1}{3}bc^3G}. \tag{221}$$

代入式(d)，得

$$\tau_{\max}=\frac{M_t}{\frac{1}{3}bc^2}. \tag{222}$$

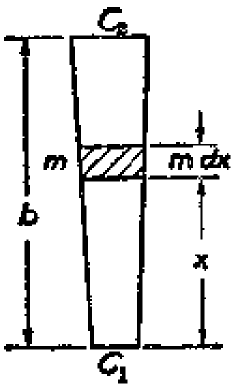


图 141

如設矩形非常狭长，这些公式就与上卷(原书第 289 頁和第 290 頁）所列的公式(158)及(159)一致．

如果不是狭长的矩形，而是一狭长的梯形(如图 141 所示)，則假設了挠出薄膜上离狭边足够远的表面为圆錐形，就可得一近似解． 相应于截面上面元 mm 的两倍容积可按上面式(e)求得，其大小等于

$$\frac{1}{3}G\theta c^3dx, \tag{f}$$

式中 c 为截面的变宽度，它由下式表示：

$$c = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{b} x. \tag{g}$$

将式(g)代入式(f)，并将结果积分，得轉矩如下：

$$M_t = \int_0^b \frac{1}{3} G\theta c^3 dx = \frac{bG\theta}{12}(c_1 + c_2)(c_1^2 + c_2^2).$$

于是扭轉角为

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{12} b(c_1 + c_2)(c_1^2 + c_2^2)G}. \tag{223}$$

当 $c_1 = c_2 = c$ 时，此公式与对狭长矩形求得的公式(221)一样。

对于較复杂的情形，即薄膜的撓曲面形状不能很容易地用分析法求得时，此表面可通过实驗来研究，即用皂膜作为均匀伸张的薄膜，并用光学方法測量其表面的斜率。图 142 所示的仪器[1]曾用来作此实驗。有两个孔的一块鋁片——一孔为圓形，而另一孔为所需的形状——为鑄鉄匣 A 的两半部所夹持。匣的下部形状如一浅盘，为調节水平的螺釘所支持。将空气打入匣的下部，可使蓋在孔上的皂膜向上撓曲。

利用穿过玻璃板上一小孔的螺釘 B，可繪出皂膜表面上的等高綫。玻璃足够大，以致在螺釘 B 位于任何可能位置时均能蓋住鉄盒。螺釘的下端有一坚硬鋼針 C，其与玻璃板的距离可用螺釘来調节。移动玻璃板可使此針趋近于皂膜，一俟皂膜形象发生畸变即表示已发生接触。記录系記在附于板 E 的一张紙上，板 E 可繞一与鋼質記录針 D 同样高度的水平軸轉动。为了記下螺釘的任何位置，只需将紙向下轉到記录針上面而在紙上录下一小点即可。使鋼針与皂膜在多处发生接触后，可用录在紙上的小点画出等高綫。調节螺釘 B，重复地作記录，需要多少等高綫就能求得多少。当这些等高綫已画出后，就可用求和法求得容积和相应的轉矩。

測量相邻两等高綫間的距离可得薄膜的斜率和杆中相应的应力。如将一束光綫投射到皂膜表面上，并測量反射光綫的角度，則

1) 参看 A. A. Griffith 和 G. I. Taylor, *loc. cit.*, p. 237.

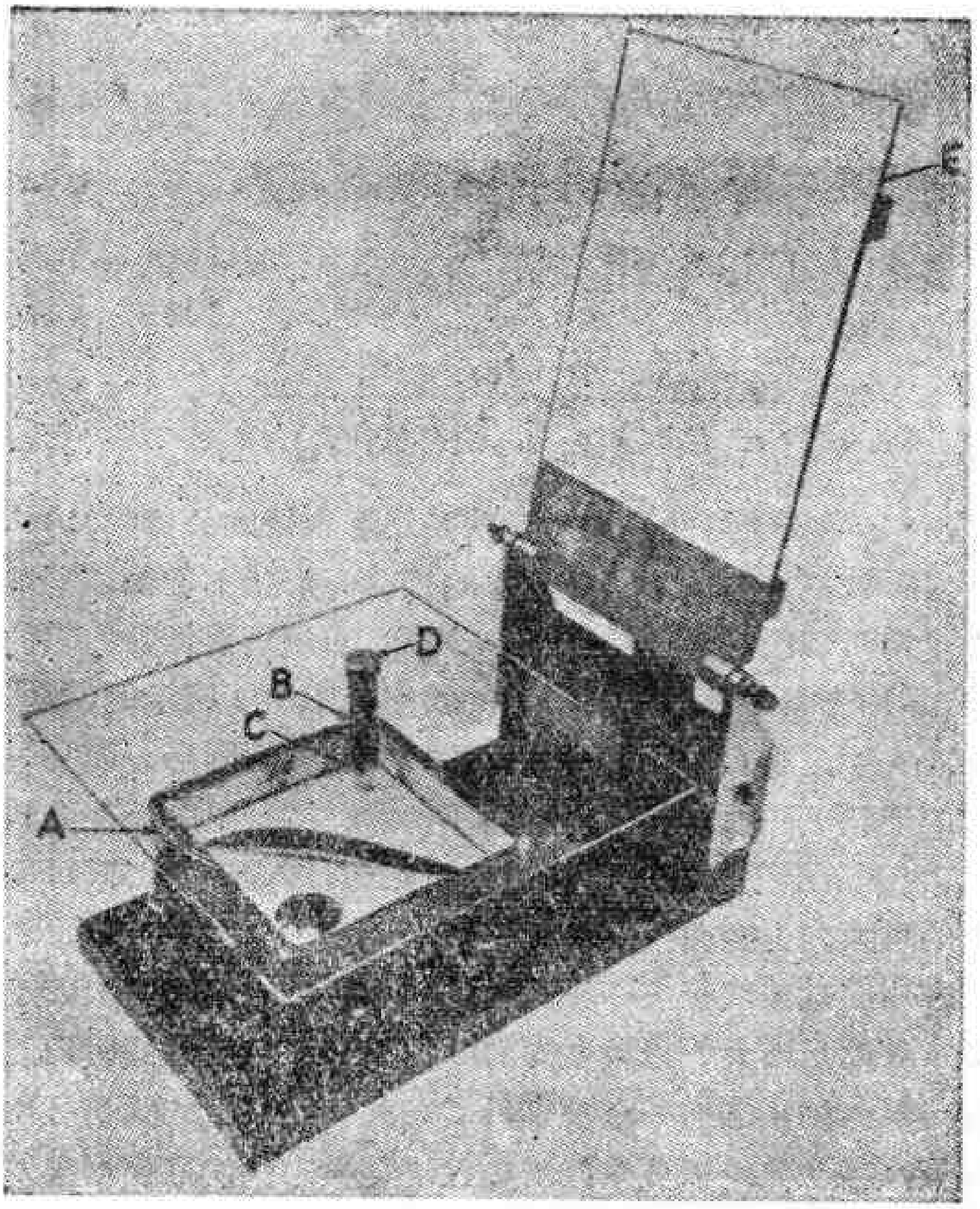


图 142

量得的斜率可較为精确. 为了建立量得的斜率与应力間的关系，可将盖住两孔的两膜在同样气压下作一比較. 由于两膜的比值 p/S 相同，相应两軸的 $G\theta$ 値也相同[参看式(a)]. 因此，当已知截面的軸与已知直径的圓軸，其单位长度內的扭轉角 θ 和剪切模量 G 均相同时，如量出两皂膜的斜率，我們就可比較此两軸中的应力. 相应的轉矩比 n 可由皂膜与板平面間的容积之比来确定. 此比值表示两軸的扭轉刚度之比. 关于圓軸上任意点的应力，在任何已知的轉矩 M_t 下，均可很快地算出. 将圓軸上选定点的应力 τ_0

乘以所研究的两点上由实验确定的最大斜率之比，可得非圆轴上任意点由轉矩 nM_t 所产生的应力 τ.

图 143 表示对曾用作飞机翼桁的工形截面部分求得的等高綫. 根据等高綫在內圓角上和上表面中部的密集，得知这些地方的剪应力很大. 凸緣的突出部分則受力极小. 腹板中部的最大应力实际上沿腹板側面不变，其大小等于同样扭轉角的狭长矩形中的应力.

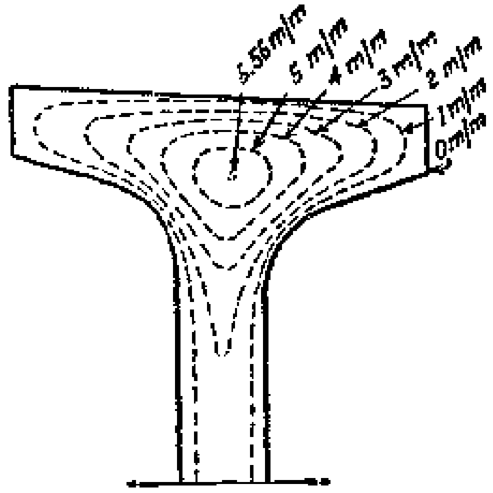


图 143

§ 47. **輾制型材截面的扭轉.** 对狭长矩形截面导出的式(221)和(222)，在其他情形下即截面寬度很小时，也可用来求近似解. 例如，对于图 144a 和 144b 所示的等厚度截面，以中心綫的展开长度代替 b，可由式(221)求得扭轉角. 对于图 144a 所示的截面，此长度为 $b=\varphi r$；而对于图 144b 所示的情形，則 $b=2a-c$. 对于这两种截面的前者，最大应力可由式(222)求得. 对于图 144b 所示的角截面，最大应力是在凹角处. 将式(222)所示的应力乘以大于 1 的应力集中系数可得此最大应力. 应力集中系数的大小将在后面討論(参看 §58).

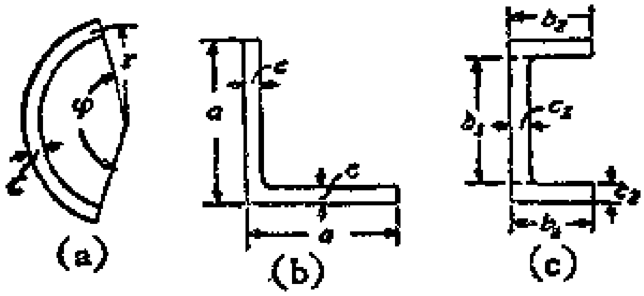


图 144

上面的結論系根据前节所討論的薄膜比拟得出. 讀者可由此討論預計到，如果图 144a 所示截面的厚度 c 与半径 r 相比很小，則决定薄膜挠曲情形的图 140b 中的拋物綫仍能足够精确地应用[1].

1) 此处的挠曲面不再为圓柱形，但如果 c 与 r 相比很小，則薄膜的切向曲率与径向曲率相比很小而可忽略不計.

这时，薄膜的最大斜率及图 144a 中截面的相应最大应力将与狭长矩形的接近相同.

对于槽形截面(图 144c)，将截面分为三个如图所示的矩形，再以 $b_1c_1^3+2b_2c_2^3$ 代入式(221)以代替 bc^3，就可求得扭轉角. 因此我們得

$$\theta=\frac{3M_t}{(b_1c_1^3+2b_2c_2^3)G}. \tag{224}$$

在計算发生在凸緣 b_2 面上中点的应力时，由式(221)和(222)看出，只需将 θ 乘以 c_2G 卽可；于是

$$\tau=\frac{3M_t\cdot c_2}{b_1c_1^3+2b_2c_2^3}. \tag{225}$$

对于具有等厚度凸緣的工字梁[1)](图 145a)的扭轉，也可运用同样的近似方程式.

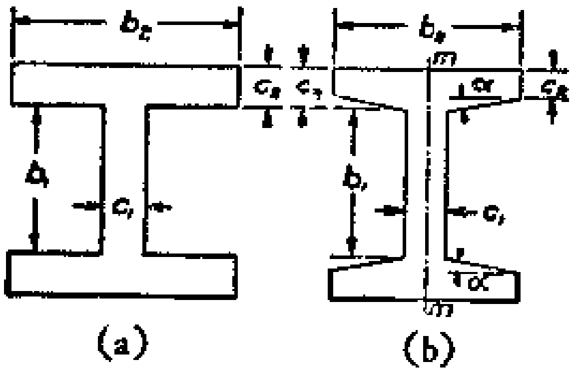


图 145

对于具有傾斜凸緣的工字梁(图 145b)，我們以 c_2 表示凸緣在边上的厚度而以 c_3 表示凸緣在腹板处的厚度，因此

$$c_3=c_2+\frac{1}{2}b_2\tan\alpha.$$

对于凸緣运用式(223)，我們得知，将 $\frac{1}{4}(c_2+c_3)(c_2^2+c_3^2)$ 代入式(224)以代替 c_2^3 可得扭轉角 θ.

最大应力一般发生在圓角处，它具有局部特性. 它的大小将在 §58 中討論. 在凸緣外表面的中点 m 处(图 145b)，也可能发生很大的应力. 同前面一样，将扭轉角 θ 乘以 c_3G 可求得此应力，此处 c_3 为凸緣的最大厚度.

应当指出，在推导式(224)时，曾应用了无限狭长矩形的公式，而图 140 所示矩形的狭边对皂膜所包容积的作用是完全忽略不計

1) 最大应力发生在凹角处，这将在后面討論(参看 §58).

的．由于狭边的存在，显然容积将略有减小．同时，在槽形截面的角上(图 144c)，即两矩形相連处，皂膜的挠度似較单独矩形的为大．此增加的挠度引起容积的增大．在推导式(224)时所忽略的这两个因素起了相反的作用，而在某种程度上抵消了各自的作用，因此对于薄壁截面，式(224)是足够精确的[1]．

对于凸緣厚度并不小，且沿着凸緣寬度改变的工字梁和槽鋼的扭轉情形，曾推証了扭轉刚度的較精确公式，此公式与实驗結果非常符合[2]．

习 题

1．試求承受相同轉矩作用，并具有相同几何尺寸的无縫和有縫圓形薄管(图 146)的扭轉角之比．

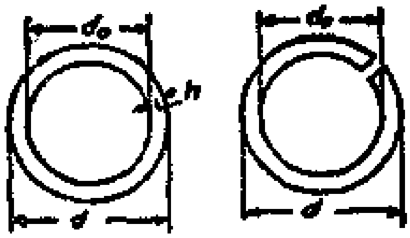


图 146

解．运用原书上卷第 284 頁式(151)以及本章式(221)，得无縫管和有縫管的扭轉角各为

$$\theta = \frac{32M_t}{\pi d^4\left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right)G};$$

$$\theta_1 = \frac{3M_t}{\pi\left(\frac{d + d_0}{2}\right)\left(\frac{d - d_0}{2}\right)^3 G}.$$

扭轉角之比为

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{2}{3}\frac{(d - d_0)^2}{d^2 + d_0^2}.$$

对于极薄的管，$(d^2 + d_0^2) \approx 2d^2$，因而比值变成

1) 作者曾对薄壁工字梁作了扭轉实驗，*Bull. Polytech. Inst.* (St. Petersburg), vol. 5, 1906. 这些試驗表明与式(224)相当符合． A. Föppl 曾对輥制梁作了非常广泛的一系列扭轉試驗，*Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch.*, p. 295, 1921 和 *Bauingenieur*, vol. 3, p. 42, 1922. 根据这些实驗，对式(224)提供了一些修正系数．

2) 此公式系根据 Inge Lyse 和 B. G. Johnston 所作的实驗导出的，Lehigh University Publ., vol. 9, 1935.

$$\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{4}{3}\left(\frac{h}{d}\right)^2.$$

2. 試确定槽鋼(图144c)每吋长的扭轉角,如果 $M_t=20000$ 吋磅, $b_1=10$ 吋, $b_2=3.5$ 吋, $c_1=0.4$ 吋, $c_2=0.6$ 吋, $G=12\times10^6$ 磅/吋^2.

解.

$$\theta=\frac{3\times20000}{(10\times0.4^3+7\times0.6^3)12\times10^6}=0.00233 \text{ 弧度/吋}.$$

3. 試确定題 1 中所討論的管子的最大剪应力之比，如果两管所受的轉矩相等.

4. 如果凸緣的斜度如第 212 頁所述时，試确定該頁上所研究的工字梁的扭轉刚度 C.

§ 48. 薄壁管件的扭轉. 在討論薄壁管件的扭轉时，应用薄膜比拟法还是有益的[1]. 对于此情形,截面的外边和內边位于不同的水平面內,內外边用薄膜連接起来,如图 147 中的 mn 处. 如果管子的厚度很小,薄膜的曲率就可忽略不計,卽綫 mn 可看作直綫. 于是薄膜表面的斜率沿壁厚不变,其大小等于 f/h, 此处 f 为两边界綫的高度差,而 h 为管厚,此厚度可沿截面的周界变化. 由薄膜比拟知，这时剪应力沿壁厚均匀分布,其大小可用斜率表示,卽

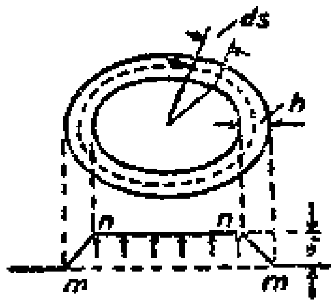


图 147

$$\tau=\frac{f}{h}.\qquad\text{(a)}$$

因此,沿周界的应力与壁厚成反比. mm和nn 两表面間所包的容积可用图中虛綫所示的环形截面中心綫算得. 如果 A 为此綫所包的面积,則容积 $mm\,nn$ 为 Af, 由薄膜比拟得

$$M_t=2Af.\qquad\text{(b)}$$

1) 管件的扭轉曾由 R. Bredt 作了討論, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 40, p. 815, 1896. 并参看 T. Prescott, *Phil. Mag.*, vol. 60, 1920.

于是由式(a)和(b)得

$$\tau = \frac{M_t}{2Ah}. \tag{226}$$

如果管壁厚度很小且不突然改变，又无凹角存在时，此方程式就可用来計算受扭管件中的应力.

管件单位长度內的扭轉角 θ 可由研究扭轉应变能而算得. 管件单位长度內的应变能为

$$U = \int_0^s \frac{\tau^2 h ds}{2G},$$

式中 s 为图 147 中虛綫所示的环形截面中心綫长度. 將式(226)中的 τ 代入此式，并使应变能与轉矩所作的功相等，得

$$\frac{M_t^2}{8A^2G}\int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2}M_t\theta, \tag{c}$$

从而得

$$\theta = \frac{M_t}{4A^2G}\int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2AG}\int_0^s \tau ds. \tag{227}$$

对于等厚度管，τ 为常数而式(227)变成

$$\theta = \frac{\tau s}{2AG}. \tag{228}$$

当截面尺寸为已知时，可由此式很快算出扭轉角，而剪应力 τ 可用公式(226)确定.

由研究受扭管件的应变能而导出的式(227)也能由薄膜比拟法求得. 研究图 147 中平面 nn 的平衡，我們得出，作用在此平面上的压力 pA[1]为作用在薄膜中的拉力 S 所平衡. 作用在边綫微段 ds 上的拉力 Sds 有一小斜率，其大小等于 τ；因此，此力的鉛直分量为 τSds，而平面 n-n 的平衡条件为

$$pA = \int_0^s \tau S ds. \tag{d}$$

考慮到薄膜中的拉力 S 为常数，而 $p/S = 2G\theta$ [参看第 206 頁式

1) 对于薄壁构件，可以考慮中心綫(虛綫所示)所包的面积 A，而不用平面 n-n 的面积.

(a)]，由式(d)得

$$\frac{p}{S}=\frac{1}{A}\int_0^s \tau ds=2G\theta.$$

对 θ 解此式，便得扭轉角的公式(227)。

有时必须計算有中間壁的管件(如图148a)中的扭应力．在此情形下，截面的边綫由三个封閉曲綫形成．在应用薄膜比拟法时，这些曲綫将位于三个不同的水平面 nn，pp 及 mm 內，如图 148b 所示．連接此三曲綫的皂膜形成一狹窄的表面，其截面如 mn，np 和 pm 等綫所示．再設壁厚——h_1，h_2 和 h_3——均很小，并忽略薄膜在垂直于边綫方向的曲率，我們可

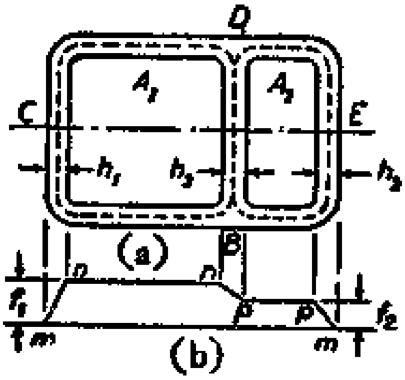


图 148

把 mn，np 和 pm 等綫看作直綫．在此情形下，表示管件壁中应力的薄膜斜率为

$$\tau_1=\frac{f_1}{h_1},\quad \tau_2=\frac{f_2}{h_2},\tag{e}$$

$$\tau_3=\frac{f_1-f_2}{h_3}=\frac{h_1\tau_1-h_2\tau_2}{h_3}.\tag{f}$$

将图 148b 中空間 $mnnppm$ 的容积加倍可得产生这些应力的轉矩大小．如果我們以 A_1 和 A_2 表示图 148a 中虛綫所包的面积，則此轉矩为

$$M_t=2(A_1f_1+A_2f_2),\tag{g}$$

或运用式(e)得

$$M_t=2A_1h_1\tau_1+2A_2h_2\tau_2.\tag{h}$$

将式(227)应用于图 148a 中虛綫所示的两封閉曲綫，可求得解此題的其余方程式．設管壁的 BCD 部分有等厚度 h_1，而 DEB 和 DB 部分各有等厚度 h_2 和 h_3，則式(227)变成

$$\tau_1s_1+\tau_3s_3=2G\theta A_1,\tag{i}$$

$$\tau_2s_2-\tau_3s_3=2G\theta A_2.\tag{j}$$

式中 s_1, s_2 和 s_3 各为沿虚綫 BCD, DEB 和 DB 量得的中心綫长度. 在将式(227)的积分应用于封閉曲綫 $BCDB$ 和 $DEBD$ 时,我們将在两相反方向通过长度为 s_3 的 DB 部分. 因此式(i)与(j)左边第二項的符号相反. 式(i)和(j)右边的扭轉角 θ 显然与整个管件的扭轉角相同. (f), (h), (i) 和(j)这四个方程式包含四个未知数 τ_1, τ_2, τ_3 和 θ, 这些未知数很容易算出. 消去 θ, 得下列的剪应力公式:

$$\tau_1 = M_t \cdot \frac{h_3 s_2 A_1 + h_2 s_3 (A_1 + A_2)}{2[h_1 h_3 s_2 A_1^2 + h_2 h_3 s_1 A_2^2 + h_1 h_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]}, \tag{k}$$

$$\tau_2 = M_t \cdot \frac{h_3 s_1 A_2 + h_1 s_3 (A_1 + A_2)}{2[h_1 h_3 s_2 A_1^2 + h_2 h_3 s_1 A_2^2 + h_1 h_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]}, \tag{l}$$

$$\tau_3 = M_t \cdot \frac{h_1 s_2 A_1 - h_2 s_1 A_2}{2[h_1 h_2 s_2 A_1^2 + h_2 h_3 s_1 A_2^2 + h_1 h_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]}. \tag{m}$$

如果图 148a 所示截面的壁 DB 为截面的对称面,则得

$$s_1 = s_2, \quad h_1 = h_2 \text{ 和 } A_1 = A_2,$$

而由式(m)得出 $\tau_3 = 0$. 因此在此情形下,轉矩全部为管的外壁所承受而中間腹板并未受力[1].

为了求得管件的扭轉角 θ, 我們須将算得的应力值代入式 (i) 或(j). 因此,如果壁厚与截面的总尺寸相比很小时,如图 148 所示的管件的扭轉問題就很易足够精确地解出.

在上例中研究了只有两个腔的管件. 在实际应用中我們常遇到有很多个腔的管件,对于这种情形,上面所述的代数解就变得繁复起來. 运用逐次近似法求每一特定情形的数值解, 可較快地获得答案[2]. 为了說明此数值解法, 我們来研究有三个腔的管件(图 149). 遵照前面所用的符号, 我們以 f_1, f_2 和 f_3 表示相应于三个腔的薄膜

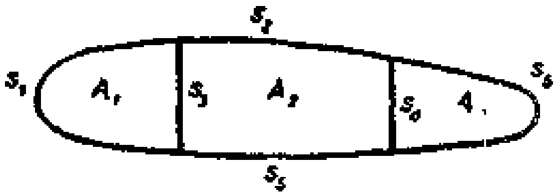


图 149

1) 相应于薄膜斜率沿腹板厚度的变化量的微小应力在此推导中忽略不計.

2) 参看 F. M. Baron 的論文, *J. Appl. Mech.*, vol 9, p. A-72, 1942.

高度，以 $s_1, \cdots, s_6$ 表示各段管壁的中心綫长度，而以 $h_1, \cdots, h_6$ 表示相应的壁厚. 于是用前面的方法，得下列代替式(i)和(j)的方程式：

$$\left.\begin{aligned} f_1\frac{s_1}{h_1}+(f_1-f_2)\frac{s_3}{h_3}&=2G\theta A_1,\\ -(f_1-f_2)\frac{s_3}{h_3}+f_2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_5}{h_5}\right)+(f_2-f_3)\frac{s_4}{h_4}&=2G\theta A_2,\\ -(f_2-f_3)\frac{s_4}{h_4}+f_3\frac{s_6}{h_6}&=2G\theta A_3. \end{aligned}\right\} \tag{n}$$

在式(n)中出现的不是剪应力 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots$，而是 $f_1=\tau_1 h_1$, $f_2=\tau_2 h_2$, $f_1-f_2=\tau_3 h_3, \cdots$，它們称为**剪流**. 引用記号 $\frac{s_i}{h_i}=r_i$，我們可将这些方程式重写成下列的簡化形式：

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum_1 r_i\right)f_1-r_3f_2&=2G\theta A_1,\\ -r_3f_1+\left(\sum_2 r_i\right)f_2-r_4f_3&=2G\theta A_2,\\ -r_4f_2+\left(\sum_3 r_i\right)f_3&=2G\theta A_3. \end{aligned}\right\} \tag{o}$$

式中 $\sum_1 r_i$, $\sum_2 r_i$, $\sum_3 r_i$ 各为第一腔、第二腔和第三腔的 r_i 值之和. 将这些方程式除以对角項的系数，并引用記号

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2G\theta A_1}{\sum_1 r_i}=f_1', \quad \frac{2G\theta A_2}{\sum_2 r_i}=f_2', \quad \frac{2G\theta A_3}{\sum_3 r_i}=f_3',\\ &\frac{r_3}{\sum_1 r_i}=d_{12}, \quad \frac{r_3}{\sum_2 r_i}=d_{21}, \quad \frac{r_4}{\sum_2 r_i}=d_{23}, \quad \frac{r_4}{\sum_3 r_i}=d_{32}, \end{aligned}\right\} \tag{p}$$

最后，我們将这些方程式写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} f_1-d_{12}f_2&=f_1',\\ -d_{21}f_1+f_2-d_{23}f_3&=f_2',\\ -d_{32}f_2+f_3&=f_3'. \end{aligned}\right\} \tag{q}$$

我們将类似于式(g)的轉矩計算式即

$$M_t = 2(A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3) \quad (r)$$

加在这些方程上。

为了求得式(q)的数值解，我們首先假設单位长度内的扭轉角 θ 之数值。于是 f_1', f_2' 和 f_3' 之值可以确定，而式(q)可以解出。将得出的 f_1, f_2 和 f_3 之值代入式 (r) 以求相应的 M_t 值。求任何其他所需的轉矩 M_t 之値时，我們只須按正比改变 θ, f_1, f_2 和 f_3 之値即可。

应用逐次近似法来解式(q)时，我們看出，所有的系数 d_{ij} 均小于 1。因此，我們只把式(q)中的对角項留作一次近似值，从而 f_1', f_2' 和 f_3' 为 f_1, f_2 和 f_3 的一次近似值。将这些一次近似值代入式(q)的非对角項，得一次修正値为

$$\Delta' f_1 = d_{12}f_2', \quad \Delta' f_2 = d_{21}f_1' + d_{23}f_3', \quad \Delta' f_3 = d_{32}f_2'. \quad (s)$$

将式(s)代入式(q)的非对角項，得二次修正值为

$$\Delta'' f_1 = d_{12}\Delta' f_2, \quad \Delta'' f_2 = d_{21}\Delta' f_1 + d_{23}\Delta' f_3, \quad \Delta'' f_3 = d_{32}\Delta' f_2.$$

同样，可得三次修正値，依此类推。計算必須重复进行，直到再次的修正値达到非常小为止。然后将所有的修正値与一次近似值 f_1', f_2' 和 f_3' 相加，得 f_1, f_2 和 f_3 的近似值。于是式(r)給出了相应的

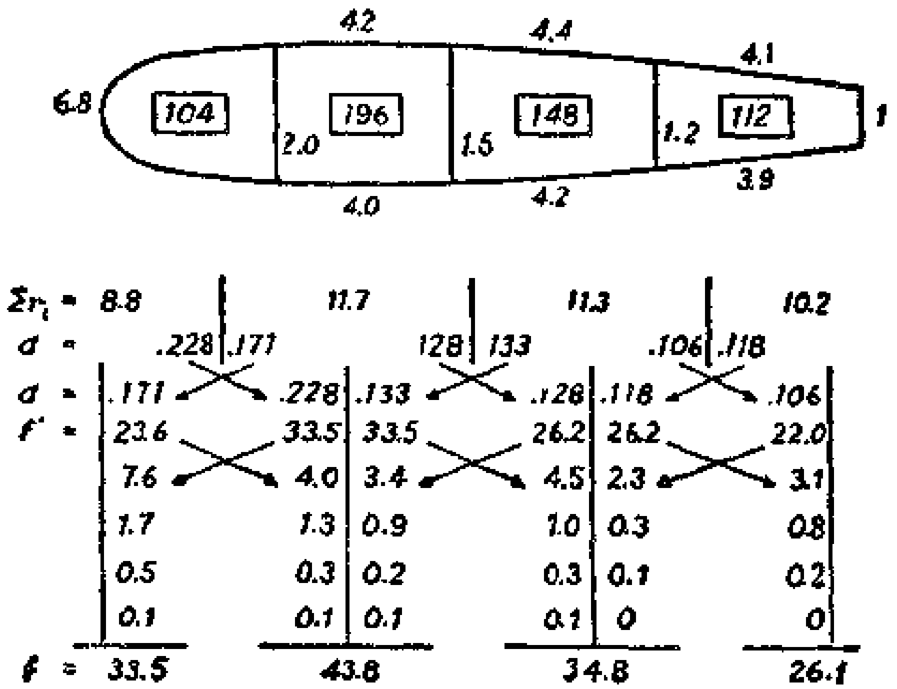


图 150

M_t 値，而剪应力之值可由类似于式(e)和(f)的方程式确定。

为了說明此計算，图 150 示出一四腔翼剖面的数字例子[1]。各腔的面积用方框內的数字表示，而 r 的数值则示于各段壁的旁边。图下表中的第一行表示各腔的 Σr_i 値。第二行表示中間腔壁的系数 d_{ij}。在开始計算前，必須将这些系数移至第三行如箭头所示处。下一行写出了剪流的一次近似値 f'，f' 値是假設了 $G\theta=1$ 而算得的。将各个 f' 値乘以上面的系数 d，并将此答数移至邻腔如箭头所示处，就可算得一次修正値。內腔的总修正値包括两个数字，这两个数字各写在竖綫的一边。計算二次修正値时，用心算法将这些数字相加，并乘以适当的系数 d。重复此計算，直到修正値可略去不計时为止。将全部修正値与一次近似値 f' 相加后，得出的剪流最后値列于图 150 中的最后一行。将这些値代入式(r)，可得相应于 $G\theta=1$ 的轉矩。

§49. 有些截面无翘曲的开口截面薄壁构件的扭轉. 我們前面在討論工字梁和槽鋼的扭轉时(第 211 頁)，假設了轉矩作用在杆的两端，而所有截面均能完全自由地翘曲。可是在有些情形下，杆的一个或多个截面可使其保持为平面，这样，問題就在于，阻止了翘曲将如何影响扭轉角和应力分布。对于如椭圓或矩形等实心截面的杆，如果截面尺寸比起杆长来很小时，则阻止了翘曲只对扭轉角有极小的影响[2]。对于工字梁、槽鋼及其它开口截面的薄壁构件，在扭轉时阻止了翘曲会同时引起凸緣的弯曲，并对扭轉角有很大的影响。

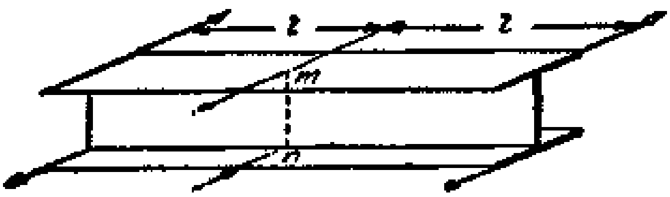


图 151

1) 此例取自 Stanley U. Benscoter 的論文，*J. Aeronaut. Sci.*, vol. 13, p. 438, 1946.

2) 关于此問題的討論，可参看作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity", p. 302, 1951.

阻止翘曲的簡单情形是一两端簡支[1]，而中部为一力偶所扭轉的工字梁(图 151)．根据对称性，扭轉时截面 mn 必定保持为平面，而此截面对端截面的旋轉同时引起凸緣的弯曲． 在任何截面处，端轉矩部分地为扭轉时产生的剪应力而部分地为凸緣弯曲时产生的剪应力所平衡[2]． 图 152a 表示图 151 所示的梁的一半． 由于对称之故，中間截面 mn 保持为平面、因此我們可把它看作固定，而轉矩作用在梁的另一端．令 φ 为梁任意截面的扭轉角． 于是为扭轉时产生的剪应力所平衡的这部分轉矩 M_t' 可由下式确定：

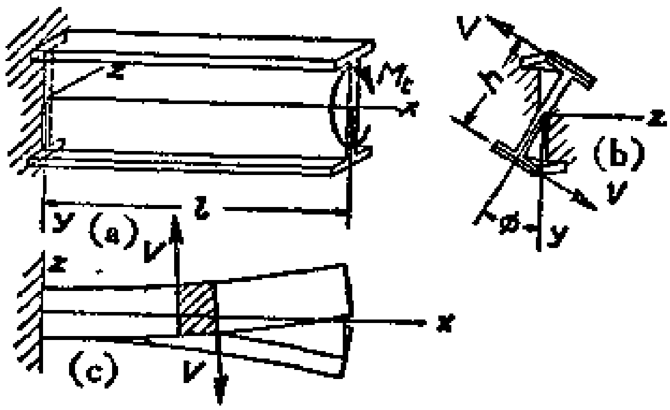


图 152

$$M_t' = C\frac{d\varphi}{dx}, \tag{a}$$

式中 C 为杆的**扭轉刚度**(参看原书上卷第 290 頁)．

为了确定为弯曲时在凸緣中产生的剪力所平衡的这部分轉矩 M_t''，我們必須研究凸緣的弯曲(参看图 152c)． 以 h 表示凸緣形心間的距离(图 152b)，上凸緣任意截面处的撓度为

$$z = \frac{h\varphi}{2}, \tag{b}$$

微分之，得

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{h}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}. \tag{c}$$

如果我們以 D 表示一个凸緣在 xz 平面内的弯曲刚度，并考虑到 z

1) 簡支使梁的两端不能繞一縱軸旋轉，但能自由地翘曲．

2) 参看作者的論文，*Bull. Polytech. Inst.* (St. Petersburg), 1905–1906, 和 *Z. Math. u. Phys.*, vol. 58, p. 361, 1910. 并參看 K. Huber 的学位論文，Munich, 1922 和 C. Weber, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 6, p. 85, 1926. 关于各种形状的薄壁构件問題的深入討論是由 A. Ostenfeld 所作的，*Lab. Baustatik Techn. Hochschule*, (Copenhagen) *Mitt.*, No. 6, 1931.

在图 152c 所示的方向为正，则弯曲时在凸缘中产生的剪力的表达式变成[1)]

$$V = \frac{dM}{dx} = D\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{Dh}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}, \tag{d}$$

式中 M 为凸缘中的弯矩. 以图 152c 中所示者作为 V 的正方向，因此得

$$M_t'' = -Vh = -\frac{Dh^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}, \tag{e}$$

而总轉矩为

$$M_t = M_t' + M_t'' = C\frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}. \tag{229}$$

在所研究的問題中(图 152c)，轉矩 M_t 在梁的長度 l 內不变. 端点条件为[2)]

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=l} = 0,$$

因此式(229)的解为

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{C}\left(1 - \frac{\cosh\dfrac{l-x}{a}}{\cosh\dfrac{l}{a}}\right), \tag{f}$$

式中

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C}. \tag{g}$$

由于弯曲刚度 D 和扭轉刚度 C 两者以同样的单位(磅时^2)来度量，因此由式(g)知，a 的量綱为長度，其大小依梁的尺寸而定.

由于式(f)中第二項的存在，即使轉矩 M_t 保持不变，单位長度內的扭轉角仍沿杆的全長变化. 若杆的扭轉与凸緣的弯曲有关，并由类似于式(229)的方程式所决定，則称为**非均匀扭轉**.

当 $d\varphi/dx$ 确定后，可由式(a)和(e)算出任意截面处总轉矩 M_t 中的 M_t' 和 M_t'' 部分. 对于固定截面，此处 $x=0$ 和 $d\varphi/dx=0$,

1) 剪力对凸緣撓度曲綫曲率的影响，在此推导中忽略不計.

2) 如把每一凸緣均看作一端固定而另一端自由的梁，就可确定这些条件.

由式(a)得 $M_t' = 0$. 因此在此点上，整个轉矩为作用在凸緣中的剪力矩所平衡，我們得 $V = -M_t/h$. 在端点 $x = l$ 处，运用式(f),得

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{C}\left(1 - \frac{1}{\cosh\frac{l}{a}}\right). \tag{h}$$

如果梁的长度比起截面尺寸来很大时,則 l 比起 a 来很大，式(h)括弧內第二項可忽略不計;因此 $d\varphi/dx$ 趋近于 M_t/C 之値.

凸緣中的弯矩可由式(d)求得:

$$M = \frac{Dh}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}; \tag{i}$$

或将式(f)的 $d\varphi/dx$ 代入并运用式(g)的記号,得

$$M = \frac{a}{h}M_t\frac{\sinh\frac{l-x}{a}}{\cosh\frac{l}{a}}. \tag{j}$$

固定端的弯矩为

$$M_{\max} = \frac{a}{h}M_t\tanh\frac{l}{a}. \tag{k}$$

当 l 比 a 大好几倍时，$\tanh(l/a)$ 趋近于 1, 我們可用

$$M_{\max} = \frac{aM_t}{h}, \tag{l}$$

即凸緣中的最大弯矩与一长度为 a 而端点受一力 M_t/h 的悬臂的情形相同. 对于极短的梁，l 比起 a 来很小，$\tanh(l/a)$ 趋近于 l/a,由式(k)得

$$M_{\max} = \frac{M_t l}{h}. \tag{m}$$

以截面积为 9.26 平方吋的 12I31.8 号梁作为一例. 截面用一由三个矩形組成的相当截面(图 153)来代替，这三个矩形与眞实截面的凸緣及腹板的截面积相同[1]. 运用式(224),得

---

1) 如計及第 212 頁上所說明的凸緣斜度,可求得 C 的較好一些的近似値.

$$C = (10.91 \times 0.35^3 + 2 \times 5 \times 0.544^3)\frac{G}{3} = 0.692G. \qquad (n)$$

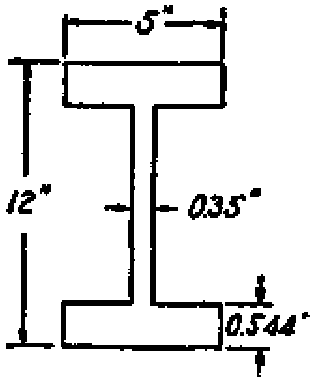


图 153

取标准截面对鉛直主軸的惯性矩[1] 的一半并乘以 E 可得一个凸緣的弯曲刚度 D. 于是 $D = (9.5/2)E = 4.75E$, 而由式(g)得

$$a = h\sqrt{\frac{D}{2C}} = h\sqrt{\frac{4.75 \times 2.6}{0.692 \times 2}} = 2.99h. \quad (o)$$

因此,如果梁的受力情形如图 151 所示,并且梁足够长以致 $\tanh(l/a)$ 趋近于 1 时,則由式(l)得凸緣中的最大弯矩約为轉矩 M_t 的三倍. 例如,若 $l/a = 2$ 因而 $l \approx 6h$,則得 $\tanh(l/a) = 0.96$,上面計算的誤差为 4%.

为了計算扭轉角 φ,我們运用式(f). 将此式积分,并調整积分常数以使 $x = 0$ 时 $\varphi = 0$,得

$$\varphi = \frac{M_t}{C}\left(x + \frac{a\sinh\frac{l-x}{a}}{\cosh\frac{l}{a}} - a\tanh\frac{l}{a}\right). \qquad (p)$$

将 $x = l$ 代入此式,得

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_t}{C}\left(l - a\tanh\frac{l}{a}\right). \qquad (q)$$

括弧内第二項表示凸緣弯曲对扭轉角的影响.对于长梁,$\tanh(l/a) \approx 1$,而式(q)变成

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_t}{C}(l - a). \qquad (r)$$

因此,凸緣弯曲对扭轉角的影响相当于长度 l 減小了 a.

上述用于不变轉矩 M_t 的方法也能用于轉矩沿梁长度变化的情形. 只需将作为 x 函数的 M_t 的适当表达式代入式(229)即可.

在前面討論工字梁的扭轉时(图 152),曾由对称性得出各截

1) 腹板的截面慣性矩可忽略不計.

面均对梁的中性轴旋轉．因此只研究了凸緣的弯曲．此外还可以看出，此弯曲并不影响腹板的簡单扭轉，因为在凸緣与腹板的連接点上，凸緣中的弯应力为零．对于截面不对称或截面只有一根对称軸的情形，問題就变得較为复杂，因为扭轉时不仅引起凸緣的弯曲，而且还会引起腹板的弯曲．我們来研究槽鋼的扭轉作为一例（图 154）．对于此情形，扭轉时各截面均对剪切中心 O 旋轉，剪切中心 O 位于截面的水平对称軸上，离腹板中面的距离为（参看原书上卷第 239 頁）

$$e = b^2h^2t/4I_z. \tag{s}$$

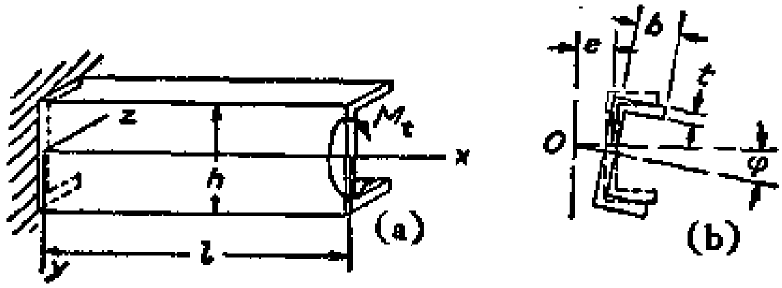


图 154

由此得出，凸緣和腹板在它們各自平面內的挠度各为

$$z = \pm\frac{h}{2}\varphi \text{ 和 } y = e\varphi, \tag{t}$$

式中 φ 为扭轉角，假設很小．此外还假設凸緣和腹板的厚度均很小，因此由这些部分在它們各自平面的垂直方向的弯曲而产生的应力可以忽略不計．

上凸緣与腹板間的作用可用图 155 所示的剪应力 $(\tau_{zx})_0$ 表示．这些应力引起了凸緣的弯曲与压縮．如果 S 为凸緣中离固定端 x 处的压縮力大小，我們得

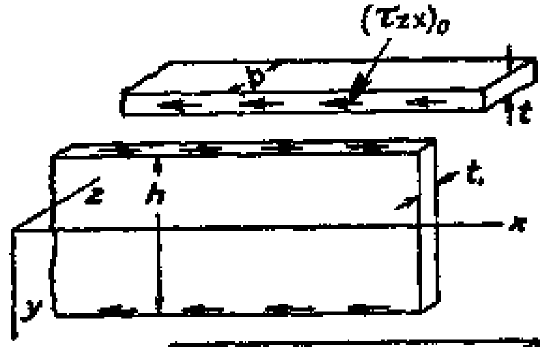


图 155

$$t(\tau_{zx})_0 = -\frac{dS}{dx} \text{ 和 } S = t\int_x^l (\tau_{zx})_0 dx.$$

力 S 的大小現在可由在凸緣与腹板連接处这两部分的縱向应变 ε_x 相同这一条件确定. 根据式(t)計算撓度曲綫的曲率，我們得出此条件可用下式表示[1]:

$$\varepsilon_x = e\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{h}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{b}{2} - \frac{S}{btE}. \tag{u}$$

現在运用式(s)，并考虑到 $I_x = t_1h^3/12 + bth^2/2$，得

$$S = \frac{Eb^2h^4tt_1}{48I_x}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}. \tag{v}$$

有了 S 的这一表达式，我們就可很快确定腹板和凸緣中的剪应力，以及为这些应力所平衡的这部分轉矩 M_t''.

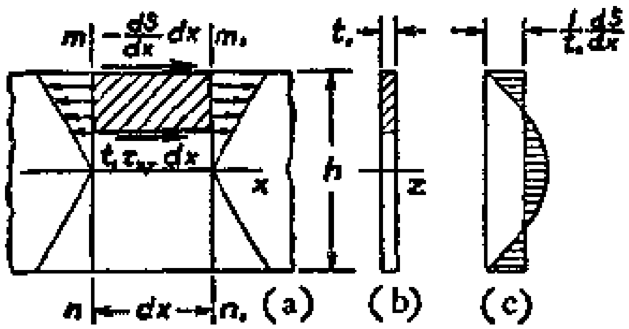


图 156

我們先从計算腹板中的剪应力开始. 取两个相邻截面 mn 和 m_1n_1 (图 156a)，并用一般方法来研究阴綫体元的平衡，我們得

$$\tau_{yx}t_1dx - \frac{dS}{dx}dx + \frac{dM}{dx}\cdot\frac{Q}{I_z'}dx = 0.$$

式中 Q 为腹板截面中阴綫部分对 z 軸的靜力矩(图 156b)，$I_z' = t_1h^3/12$ 为腹板截面对 z 軸的慣性矩，而 M 为腹板中的弯矩. 如果弯矩在腹板的上边产生拉应力，則弯矩 M 为正，其大小等于

$$M = EI_z'e\frac{d^2\varphi}{dx^2} = Sh.$$

于是应力 τ_{yx} 的表达式变成

$$\tau_{yx} = \frac{dS}{t_1dx}\left(1 - \frac{Qh}{I_z'}\right).$$

---

1) 剪力对凸緣撓度曲綫曲率的影响，在此推导中忽略不計.

鉴于Q沿截面高度按抛物綫律变化，我們得出，τ_{yx}的分布可用图156c中的阴綫面积表示，而腹板中的合成剪力为零。后面这一結論可以預計到，因为腹板和两凸緣中的剪力必須平衡轉矩的M_t''部分，而这只有在腹板中的剪力为零而两凸緣中的剪力构成一力偶时才有可能。

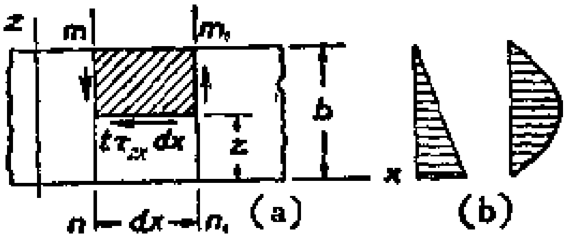


图 157

在計算凸缘中的剪应力τ_{zx}时(图157a)，我們看出，在截面mn处作用有一压縮力S和一弯矩[1]

$$M = D\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{h}{2}. \tag{w}$$

研究两相邻截面間的阴綫体元的平衡，得

$$t\tau_{zx}dx + \frac{dS}{dx}dx\cdot\frac{b-z}{b} + \frac{dM}{dx}dx\frac{Q_1}{I_1} = 0,$$

式中对凸緣計算的Q_1和I_1与对腹板計算的Q和I_2'一样。将式(w)的M值代入，得

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{t}\frac{dS}{dx}\frac{b-z}{b} - \frac{E}{t}\cdot\frac{d^3\varphi}{dx^3}\cdot\frac{hQ_1}{2}.$$

此式的右边两項分别用图157b中三角形和抛物綫形的阴綫面积表示。此两面积之和乘以t即表示凸緣中的总剪力，即[2]

$$V = \frac{b}{2}\frac{dS}{dx} + E\frac{htb^3}{24}\frac{d^3\varphi}{dx^3}.$$

然后将式(v)的S代入，求得为凸緣中的剪力所平衡的轉矩如下：

$$M_t'' = -Vh = -\frac{Dh^2}{2}\left(1+\frac{t_1h^3}{4I_s}\right)\frac{d^3\varphi}{dx^3}. \tag{x}$$

总轉矩为

$$M_t = C\frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2}\left(1+\frac{t_1h^3}{4I_s}\right)\frac{d^3\varphi}{dx^3}. \tag{y}$$

1) 如前面所定义的(第221頁)，$D=Etb^3/12$表示凸緣在其平面内的弯曲刚度。

2) 以图152c所示V的方向为正。

因此,如果式(g)所表示的 a^2 值代之以

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C}\left(1 + \frac{I_1 h^3}{4I_z}\right),$$

则对工字梁得出的全部結論也能适用于槽鋼.

在討論对称槽鋼的扭轉(图 154)时所用的方法,也能应用于不对称槽形截面(图 158)的較普遍情形. 此形状的剪切中心 O 的位置以前已經定出(参看原书上卷第 241—243 頁). 于是同前面一样进行[参看式(t)],我們以扭轉角 φ 表示凸緣和腹板的撓度曲綫. 凸緣中的縱向力 S_1 和 S_2 現在可由在連接点上凸緣和腹板的縱向应变 ϵ_x 相同这个条件来确定. 当力 S_1 和 S_2 算出后,剪应力的分布可按对称槽鋼的情形求得. 于是可以看出[1],腹板中的剪力为零,而两凸緣中的剪力 R 则构成一力偶,以平衡轉矩的 M_t'' 部分. 我們又得一类似于式(229)和(y)的总轉矩方程式;一般而言,可以这样来說明:对于**非均匀扭轉**的情形,此方程式具有下列形式:

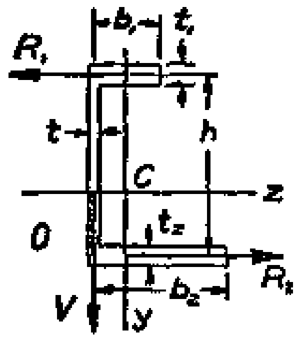


图 158

$$M_t = C\frac{d\varphi}{dx} - C_1\frac{d^3\varphi}{dx^3}. \tag{230}$$

常数 C_1 称为**翹曲剛度**,对于每一特定情形,它必須按前面例子所說明的来确定.

前面在处理开口截面构件的非均匀扭轉时所討論的方法,也能应用于管件截面为多边形的情形[2]. 我們又看出,总轉矩由下列两部分組成:(1)由于純扭轉而产生的部分,如 §48 中所討論的,和(2)由于管子平边的弯曲而产生的部分. 可以料到,对于管件的情

1) 計算載于 A. Ostenfeld 的論文中, *loc. cit.*, p. 255.

2) 此問題首先由 H. Reissner 作了討論, *Z. Flugtech. u. Motorluftschiffahrt*, vol. 17, p. 384, 1926. 并参看 Th. v. Kármán 和 N. B. Christensen 的論文, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 11, p. 110, 1944, 以及 F. Stüssi 的論文, *Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg.*, vol. 11, p. 375, 1951, 和 vol. 12, p. 259, 1952.

形，在固定截面处轉矩的第二部分具有高度的局部性. 用簡单梁公式來計算相应的应力可証明是不准确的，因此对此截面需要作更为精确的应力分析[1].

习 题

1. 有一Z形截面的悬臂(图 159)，其一端固定，而为作用在另一端的力偶 M_t 所扭轉. 試求扭轉角和凸緣中的最大弯矩.

解. 对于此情形，剪切中心与截面形心 C 重合（参看原书上卷第 243 頁)，因而腹板将不发生弯曲.两个凸緣中的力 S 完全相同，剪应力的分布則如图 159b 所示. 腹板中的合成剪力为零，凸緣中大小相等而方向相反的剪力 V 則为

$$V = \pm \frac{Eb^3ht}{12}\left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1}\right)\frac{d^3\varphi}{dx^3}.$$

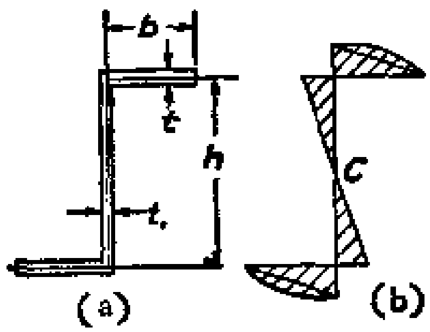


图 159

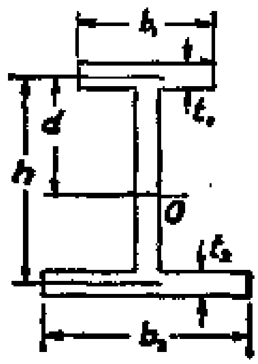


图 160

力 V 所产生的轉矩为

$$M_t'' = -Vh = -Dh^2\left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1}\right)\frac{d^3\varphi}{dx^3},$$

式中 D 为一个凸緣的弯曲刚度. 扭轉角和凸緣中的最大弯矩可由式(k)和(l)算得，对于此情形，式中

$$a^2 = \frac{Dh^2}{C}\left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1}\right).$$

---

1) 参看 Th. von Kármán 和錢伟长的論文，*J. Aeronaut. Sci.*, vol. 13, p. 503, 1946.

2. 如設截面如图 160 所示时，試解題 1。

答. 凸緣中的剪力为

$$V = \pm Dd\frac{d^3\varphi}{dx^3},$$

式中

$$D = \frac{Et_1b_1^3}{12},\quad \frac{d}{h-d} = \frac{b_2^3t_2}{b_1^3t_1}.$$

由于凸緣的弯曲而产生的轉矩 M_t'' 为

$$M_t'' = -Ddh\frac{d^3\varphi}{dx^3}.$$

要代入式(k)和(l)的 a 值为

$$a^2 = \frac{Ddh}{C}.$$

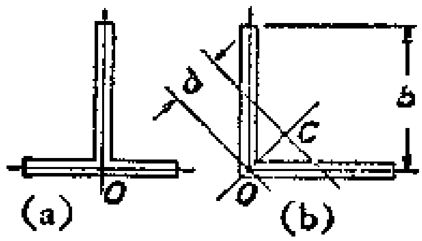


图 161

3. 如果截面如图 161 所示时，試解題 1。

答. 对于此两情形，剪切中心 O 均在两凸緣的相交处. 对此点旋轉时并不引起凸緣在它們平面內的任何弯曲，因此整个轉矩为扭应力所传递，而 $M_t'' = 0$。

§ 50. 开口截面薄壁构件的弯扭联合作用[1]. 我們来研究一薄壁杆件受任意横向力作用的一般情形. 任何力均能用一通过**剪切中心軸**的平行力和一轉矩来代替. 这样，我們便得一沿剪切中心軸受力并有轉矩作用在若干截面上的杆. 作用在剪切中心軸上的横向力只引起弯曲(参看原书上卷 52 节第 235 頁). 在討論扭轉时，我們可运用 §49 的結果. 我們取杆端($x = 0$)为坐标原点，并以 M_t^0 表示作用在該端的轉矩. 我們运用式(230)来确定扭轉角 φ. 将此式除以 C_1，并引用符号

$$k^2 = \frac{C}{C_1},$$

1) 参看作者的論文，*J. Franklin Inst.*, vol. 239, Nos. 3,4 和 5, p. 258, 1945.

得

$$\varphi''' - k^2\varphi' = -\frac{M_t}{C_1}, \tag{231}$$

式中的撇表示对 x 的微商. 此方程式的通解为

$$\varphi = \frac{M_t^0 x}{C} + A + A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx, \tag{232}$$

因为这时 $M_t = M_t^0$. 对于两相邻横向力間的各段梁,均可写出类似的方程式,只需以該段起点的轉矩值代替 M_t^0 即可. 于是积分常数必須由載荷作用点的連續条件确定.

如果我們不用积分常数 A, A_1 和 A_2, 而引用决定杆端 $x=0$ 处的条件之值[1],計算就可以大大加以簡化. 将式(232)微分并以 $x=0$ 代入,得

$$\varphi_0 = A + A_2,$$

$$\varphi_0' = \frac{M_t^0}{C} + kA_1,$$

$$\varphi_0'' = k^2 A_2,$$

式中下标 0 表示在杆端 $x=0$ 处之值. 解这些方程式以求常数 A, A_1 和 A_2, 并将这些值代入式(232),得

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k}\varphi_0' \sinh kx + \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right). \tag{233}$$

在此表达式中,第一段杆中任意截面的扭轉角 φ 由端点 $x=0$ 处的 φ_0, φ_0', φ_0'' 和 M_t^0 等值表示了出来. 将式(233)微分,得

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0' \cosh kx + \frac{1}{k}\varphi_0'' \sinh kx + \frac{M_t^0}{C}(1 - \cosh kx); \\ \varphi'' &= k\varphi_0' \sinh kx + \varphi_0'' \cosh kx - \frac{kM_t^0}{C}\sinh kx. \end{aligned}\right\} \tag{234}$$

式(233)和(234)可应用于 $x=0$ 和 $x=a$ 之間, 此处 a 表示第

---

1) 此法是由 A. N. Krylov 在討論为弹性基础所支承的梁的弯曲时所发展出来的. 参看他的著作: Calculation of Beams on Elastic Foundation, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 1931.

一个横向載荷的位置.

在研究第二段杆($x > a$)时,我們必須計及作用在截面 $x = a$ 处的轉矩 M_t^1. 現在将 M_t^1 所产生的扭轉角与式(233)相加,可得第二段杆中扭轉角的表达式. 这样,当 $x > a$ 时,我們得

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k}\varphi_0'\sinh kx + \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \\ + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right) + \frac{M_t^1}{C}\left[x - a - \frac{\sinh k(x-a)}{k}\right]. \quad (235)$$

右边最后一項表示由 M_t^1 所产生的角度. 它是由式(233)的最后一項以 M_t^1 代 M_t^0,并以 $x - a$ 代 x 而求得的,因为 M_t^1 离所研究截面的距离为 $x - a$.

对于第三段杆,我們可同样处理,依此类推,直到最后一段. 在各段杆中,φ 的表达式均包含同样的常数 φ_0, φ_0', φ_0'' 和 M_t^0. 所有这些常数現在可由杆两端的条件定出.

为了説明此方法,我們来研究几个簡单的例子. 我們从这情形开始:杆为作用在其两端的轉矩所扭轉,同时两端的支承情形允許它們旋轉,但完全不允許翹曲. 由于无力作用在跨距內,因此式(233)可应用于杆的全长. 設端点 $x = 0$ 处不能移动,并考慮到翹曲被制止,我們必須将 $\varphi_0 = 0$ 和 $\varphi_0' = 0$ 代入式(233),这样得

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right); \\ \varphi' &= \frac{1}{k}\varphi_0''\sinh kx + \frac{M_t^0}{C}(1 - \cosh kx). \end{aligned}\right\} \quad (236)$$

由于在杆的另一端($x = l$ 处),翹曲也被制止,因此我們得

$$\varphi_l' = \frac{1}{k}\varphi_0''\sinh kl + \frac{M_t^0}{C}(1 - \cosh kl) = 0,$$

从而得

$$\varphi_0'' = -\frac{kM_t^0}{C}\cdot\frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl}.$$

代入方程組(236)中的第一式,得扭轉角如下:

$$\varphi = \frac{M_t^0}{kC}\left[\frac{(\cosh kl - 1)(\cosh kx - 1)}{\sinh kl} + kx - \sinh kx\right].$$

取 $x=l$，得杆端 $x=l$ 处的旋轉角如下：

$$\varphi_l=\frac{M_t^0 l}{C}\left(1-\frac{\tanh kl/2}{kl/2}\right).$$

括弧內第二項表示阻止翘曲的端点約束对扭轉角的影响。

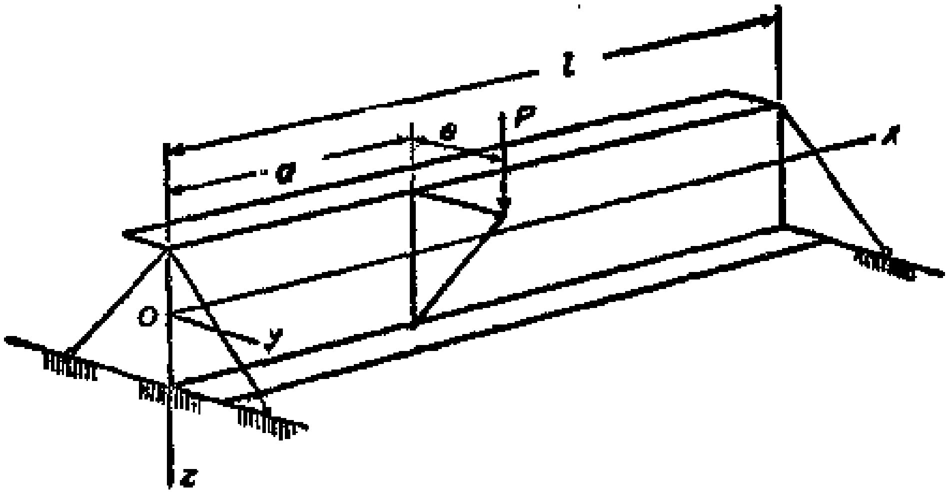


图 162

我們来研究图 162 所示的情形作为第二个例子．有一两端被支承的杆受一离左端的距离为 a 的偏心載荷．以 e 表示載荷离剪切中心軸的距离，我們将此問題化为梁由載荷 P 引起的簡单弯曲，与由轉矩 Pe 引起的扭轉相結合的情形．首先設杆的两端不能对 x 軸旋轉，但可以自由地翘曲．对于此情形，端点条件为

$$\varphi=\varphi''=0,\ 对\ x=0\ 和\ x=l.$$

对杆上自 $x=0$ 至 $x=a$ 的一段，我們运用式(233)．将 $\varphi_0=\varphi_0''=0$ 代入此式，得

$$\varphi=\frac{1}{k}\varphi_0'\sinh kx+\frac{M_t^0}{C}\left(x-\frac{\sinh kx}{k}\right).$$

对杆的右段 $(x>a)$，我們运用式(235)，当 $\varphi_0=\varphi_0''=0$ 和 $M_t^1=Pe$ 时得出

$$\varphi=\frac{1}{k}\varphi_0'\sinh kx+\frac{M_t^0}{C}\left(x-\frac{\sinh kx}{k}\right)+$$

$$+\frac{Pe}{C}\left[x-a-\frac{\sinh k(x-a)}{k}\right].$$

微分之，得

$$\varphi'' = k\varphi_0'\sinh kx - \frac{kM_t^0}{C}\sinh kx - \frac{kPe}{C}\sinh k(x-a).$$

鉴于在端点 $x=l$ 处条件为 $\varphi_l=\varphi_l''=0$，我們得下列用以計算常数 φ_0' 和 M_t^0 的方程式：

$$\varphi_0'\sinh kl + \frac{M_t^0}{C}(kl - \sinh kl) = -\frac{Pe}{C}[kl-ka-\sinh k(l-a)]$$

$$\varphi_0'\sinh kl - \frac{M_t^0}{C}\sinh kl = \frac{Pe}{C}\sinh k(l-a).$$

解这些方程式，得

$$M_t^0 = -Pe\frac{l-a}{l}$$

$$\varphi_0' = \frac{Pe}{C}\left[\frac{\sinh k(l-a)}{\sinh kl} - \frac{l-a}{l}\right].$$

将这些值代入 φ 的表达式，得杆左、右两段的扭轉角.

如果图 162 中的杆的两端均为固定，而且不能翘曲，則端点条件为

$$\varphi = \varphi' = 0, \text{ 对 } x=0 \text{ 和 } x=l.$$

将 $\varphi_0=\varphi_0'=0$ 代入式(235)，对 $x>a$，得

$$\varphi = \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right) +$$

$$+ \frac{Pe}{C}\left[x - a - \frac{\sinh k(x-a)}{k}\right].$$

将此式应用于端点 $x=l$ 处，得下列用以計算常数 φ_0'' 和 M_t^0 的方程式：

$$\varphi_0''(\cosh kl - 1) + \frac{kM_t^0}{C}(kl - \sinh kl) =$$

$$= -\frac{kPe}{C}[kl - ka - \sinh k(l-a)];$$

$$\varphi_0''\sinh kl + \frac{kM_t^0}{C}(1-\cosh kl) = -\frac{kPe}{C}[1-\cosh k(l-a)].$$

对于任何特定情形，均能由这些方程式算得常数 φ_0'' 和 M_t^0；将它們代入 φ 的表达式，我們又得此問題的完全解. 有了如图 162 所示的有一个集中力作用时的解，我們就能用迭加法求得有任意个集

中力作用时的解.

分布載荷的情形也不难处理. 作为一例，再研究图 162 所示的杆，并設我們有一强度 q 不变的分布載荷以代替力 P，分布載荷的作用綫平行于 x 軸，而离剪切中心軸的距离为 e。于是在任意截面处的轉矩为

$$M_t = M_t^0 + qex.$$

将此値代入式(230)，而解法如前，得

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k}\varphi_0'\sinh kx + \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \\ + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

如果杆的两端均刚性地固定，則端点条件为

$$\varphi = \varphi' = 0, \text{ 对 } x = 0 \text{ 和 } x = l.$$

然后将 $\varphi_0 = \varphi_0' = 0$ 代入上面 φ 的表达式，得

$$\varphi = \frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kx - 1) + \frac{M_t^0}{C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

将此式应用于端点 $x = l$ 处，并鉴于对称性得

$$M_t^0 = -\frac{qel}{2},$$

因此得下列方程式:

$$\frac{1}{k^2}\varphi_0''(\cosh kl - 1) - \frac{qel}{2C}\left(l - \frac{\sinh kl}{k}\right) + \frac{qel^2}{2C} = 0,$$

从而得

$$\varphi_0'' = -\frac{qekl}{2C}\cdot\frac{\sinh kl}{\cosh kl - 1}.$$

将此値代入 φ 的表达式，得

$$\varphi = -\frac{qel}{2kC}\cdot\frac{\sinh kl}{\cosh kl - 1}(\cosh kx - 1) - \\ - \frac{qel}{2C}\left(x - \frac{\sinh kx}{k}\right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

此表达式可簡化为下列形式:

$$\varphi = \frac{qel}{kC}\left[\frac{\sinh\frac{kx}{2}}{\sinh\frac{kl}{2}}\sinh\frac{k(l-x)}{2} - \frac{kx(l-x)}{2l}\right].$$

由这些例子可以看出，对于任何特定情形，均可很快求得式(230)的解。

§51. 开口截面薄壁构件的扭轉屈曲[1]. 已經知道，承受均匀軸向压縮的薄壁杆件有时会发生扭轉屈曲，而其軸綫仍保持为直綫。图 163 示出一具有四个相同凸緣的杆发生此純扭轉屈曲的例子。与 x 軸重合的纖維在屈曲时仍保持为直綫，而作用在端点的压縮力所产生的力矩 M_x，在杆的各截面处均为零。为了确定引起如图所示扭轉的轉矩，必須研究屈曲时凸緣的撓曲。

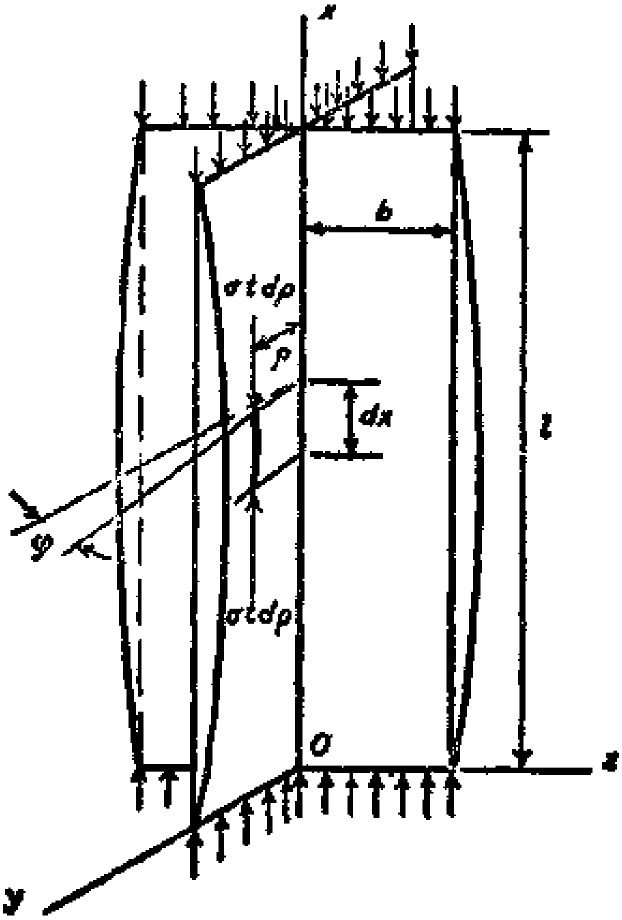


图 163

下面分析中所用的方法，将首先由支柱屈曲的簡单情形(图164a)来加以說明。最初支柱是直的，只有一中心推力 P 作用在杆上。我們現在假設力 P 达到其臨界值，因而支柱有一微弯的平衡形式。由于有此撓曲，因此在初始的均布压縮应力上将迭加上弯曲应力。同时，初始应力将作用在微轉的截面上，如图 164b 所示。撓曲支柱两相邻截面間的任何体元均处于平衡状态，因此

1) 参看作者的論文，*J. Franklin Inst.*, vol. 239, Nos. 3,4 和 5, p. 263, 1945.

我們可以指出，支柱屈曲时所产生的弯曲应力，与作用在微轉截面上的初始压縮应力相平衡。撓曲后两相邻截面間的夾角（图164b）为

$$\alpha=-\frac{d^2w}{dx^2}dx,$$

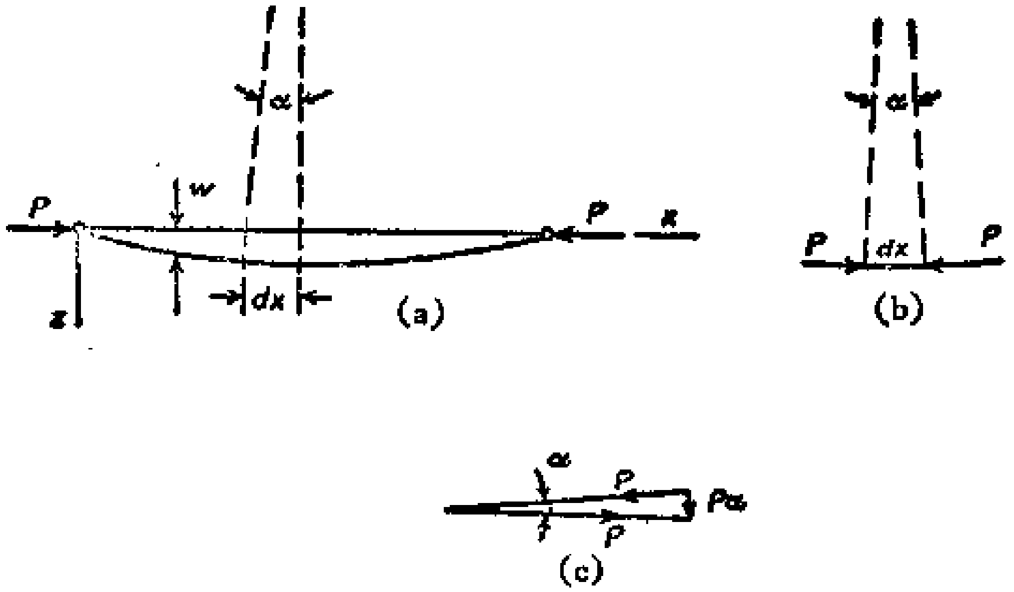


图 164

式中 w 表示杆在 z 方向的撓度。因此我們得出，支柱的旋轉截面上压縮力 P 的作用，相当于支柱每一体元上横向載荷的作用（图164c），横向載荷的大小等于

$$-P\frac{d^2w}{dx^2}dx.$$

我們看出，支柱的撓度曲綫和相应的弯曲应力，可假設支柱承受一强度为 $-Pd^2w/dx^2$ 的假想載荷而求得。这时撓度曲綫的微分方程式为

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4}=-P\frac{d^2w}{dx^2}.$$

根据此方程式，可用一般方法求得熟知的临界压縮力 P_{cr}。

現在回到图 163 中所示的扭轉屈曲問題上来，我們可以指出，在临界状态下，屈曲形式的平衡系由作用在纖維旋轉截面上的縱向压应力所維持。設凸緣的厚度 t 很小，并研究离軸綫的距离为

ρ 处截面为 $td\rho$ 的一小条，我們看出，由于扭轉屈曲而产生的挠度为 $w=\rho\varphi$. 在小条上取相距 dx 的两相邻截面間的体元，并研究小条的微轉截面上初始压縮力 $\sigma td\rho$ 的作用(图 163)，我們得横向力为

$$-(\sigma td\rho)\frac{d^2w}{dx^2}dx=-(\sigma td\rho)\rho\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx.$$

此力对 x 軸的力矩为

$$-\sigma\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx(t\rho^2d\rho).$$

将这些力矩相加，并对整个截面求和，我們求得作用在扭轉屈曲杆的两相邻截面間体元上的轉矩. 用符号 m_x 表示杆单位长度内的轉矩，得

$$m_x=-4\sigma\frac{d^2\varphi}{dx^2}\int_0^b t\rho^2d\rho=-\sigma\frac{d^2\varphi}{dx^2}I_0, \tag{a}$$

式中 I_0 为杆截面对剪切中心的极慣性矩，对于此情形剪切中心与截面形心重合. 我們現在运用式(230)列出屈曲杆的方程式. 将此式对 x 微分，并鉴于

$$m_x=-\frac{dM_t}{dx},$$

得

$$C_1\varphi''''-C\varphi''=m_x. \tag{237}$$

将式(a)所示的 m_x 值代入，得

$$C_1\varphi''''-(C-\sigma I_0)\varphi''=0. \tag{238}$$

压应力 σ 的临界值現在可由此式求得.

对于图 163 所示的情形，各凸緣的中綫交于一点，因此翹曲刚度 C_1 为零；于是式(238)变成

$$(C-\sigma I_0)\varphi''=0.$$

如設括弧内的值为零，此方程式就得到满足，因此得

$$\sigma_{cr}=\frac{C}{I_0}=\frac{\frac{4}{3}bt^3G}{\frac{4}{3}tb^3}=G\frac{t^2}{b^2}. \tag{239}$$

式(239)表明，压应力的临界值与杆的长度以及由角φ决定的屈曲形式无关。所以得此結果，是因为在推导式(230)时，忽略了凸緣在垂直于凸緣平面的方向内对弯曲的反抗所致。为了計及这种弯曲，我們必須把每一凸緣均看作沿三边簡支而第四边可以完全自由地屈曲的均匀受压板。由此較精确的研究知，临界应力为[1)]

$$\sigma_{cr} = \left(0.456 + \frac{b^2}{l^2}\right)\frac{\pi^2}{6(1-\mu)}\frac{Gt^2}{b^2}.$$

括弧内第二項表示杆长对临界应力的影响。对于相当长的杆，此項可忽略不計。于是我們得

$$\sigma_{cr} = \frac{0.75}{1-\mu}\frac{Gt^2}{b^2}.$$

对于 $\mu = 0.3$，此值較上面[式(239)]算得的值大 7% 左右。

式(238)也适用于 C_1 不是零的情形，如果屈曲时杆的軸綫保持为直綫，它还适用于不对称截面。我們将在下节中看到，这要求剪切中心軸与形心軸重合，如同对Z形截面的情形一样。在所有这类情形下，临界压应力均可由式(238)的解求得。引用記号

$$k^2 = \frac{\sigma I_0 - C}{C_1}, \tag{b}$$

我們求得此解为

$$\varphi = A\sin kx + A_1\cos kx + A_2x + A_3. \tag{240}$$

如果压杆的两端不能旋轉，但能自由地翘曲，我們就得下列端点条件：

$$\varphi = \varphi'' = 0,\ 对\ x = 0\ 和\ x = l,$$

从而得出

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0\ 和\ kl = n\pi.$$

将此k值代入式(b)，得

$$\sigma I_0 - C = \frac{n^2\pi^2}{l^2}C_1.$$

1) 此解系由作者所求得；参看 *Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1907, 和 *Z. Math. u. Phys.*, vol. 58, p. 337, 1910.

满足此条件的 σ 最小值为[1]

$$\sigma_{cr}=\frac{1}{I_0}\left(C+\frac{\pi^2}{l^2}C_1\right). \tag{241}$$

如果杆的两端均为固定而且不能翘曲，則端点条件为

$$\varphi=\varphi'=0,\ 对\ x=0\ 和\ x=l.$$

为了满足这些条件，我們必須取

$$A_1=-A_3,\ A=A_2=0,\ 和\ kl=2n\pi.$$

对于此情形，最小临界压应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{1}{I_0}\left(C+\frac{4\pi^2}{l^2}C_1\right).$$

§52. 开口截面薄壁构件由于同时受弯曲和扭轉而引起的屈曲[2]. 我們現在来研究屈曲的一般情形，即承受中心推力时，受压构件不仅发生扭轉，而且其軸綫还发生弯曲。我們設 y 和 z 为屈曲前杆截面的主形心軸(图 165)，而 y_0 和 z_0 为剪切中心 O 的坐标。屈曲时，剪切中心軸在 y 和 z 方向的挠度分别用 v 和 w 表示，面任意截面对剪切中心軸的轉角用 φ 表示。在图 165 中，点 C' 和 O' 表示形心 C 和剪切中心 O 挠曲后的位置。于是，屈曲时形心軸的挠度为

$$v+z_0\varphi\ 和\ w-y_0\varphi.$$

設有一推力 P 沿 x 軸作用在杆的两端，同簡支杆的情形一样，我們求得任意截面上对主軸的弯矩为

$$M_y=P(w-y_0\varphi),\ M_z=-P(v+z_0\varphi).$$

---

1) 此解系由 H. Wagner 所求得，25th *Anniversary Publication*, Technische Hochschule, Danzig, p. 329, 1929.

2) 扭轉屈曲曾由 H. Wagner 作了討論，*loc cit.*, p. 278. 并參看 H. Wagner 和 W. Pretschner, *Luftfahrtforsch.*, vol. 11, p. 174, 1934; 和 R. Kappus, *ibid.*, vol. 14, p. 444, 1937. 后一論文的英譯文載于 *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem.*, No. 851, 1938. 并參看作者的論文，*J. Franklin Inst.*, vol. 239, Nos. 3,4 和 5, p. 201, 1945; J. N. Goodier, *Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 27, 1941, 和 No. 28, 1942; 以及 V. Z. Vlasov, 的著作, Thin-walled Elastic Bars, Moscow, 1940 (俄文版). 有关扭轉屈曲的实驗，可參看 A. S. Niles 的論文，*Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, No. 733, 1939.

剪切中心軸的撓度曲綫微分方程式变成

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -P(v + z_0\varphi),$$
$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -P(w - y_0\varphi). \quad (242)$$

支柱上除了由式(242)所示的弯曲外，还有扭轉变形．为了写出扭轉角φ的方程式，我們按§51中的方法进行．我們在截面平面內取截面为tds[1]的一小条，此小条的坐标为y和z．屈曲时，小条撓度在y和z方向的分量为

$$v + (z_0 - z)\varphi$$

和

$$w - (y_0 - y)\varphi.$$

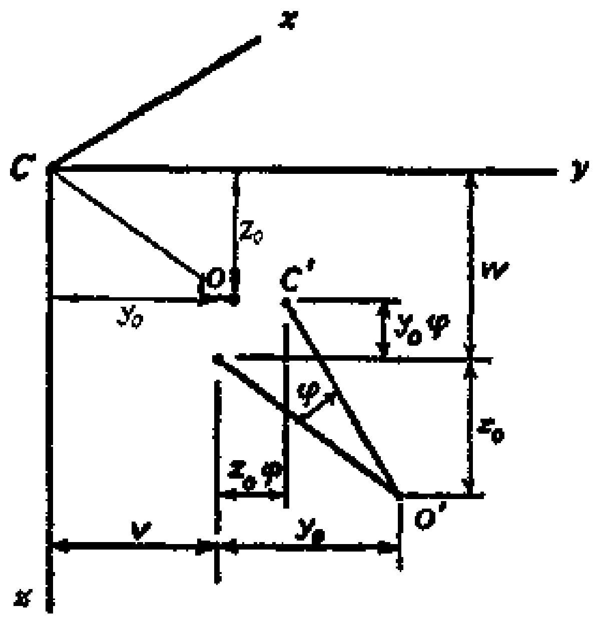


图 165

取这些表达式对x的二阶导数，并研究纖維的微段dx，同前面一样，我們求得作用在微段dx的微轉端面上的压縮力σtds在y和z方向所产生的力如下：

$$-\sigma tds \frac{d^2}{dx^2}[v + (z_0 - z)\varphi]dx,$$

$$-\sigma tds \frac{d^2}{dx^2}[w - (y_0 - y)\varphi]dx.$$

仍以撇表示对x的导数，并取上面各力对剪切中心軸的力矩，与一个小条所承担的一样，我們求得杆单位长度內的轉矩如下：

$$dm_x = -\sigma tds[v'' + (z_0 - z)\varphi''](z_0 - z) +$$
$$+ \sigma tds[w'' - (y_0 - y)\varphi''](y_0 - y).$$

对整个截面积分，考虑到

1) ds 为截面中綫上的綫元。

$$\sigma\int_A tds = P,\ \int_A ztds = 0,\ \int_A ytds = 0,$$
$$\int_A z^2tds = I_y,\ \int_A y^2tds = I_z,$$

得

$$m_x = (y_0w'' - z_0v'')P - r_0^2P\varphi'', \tag{a}$$

式中

$$r_0^2 = y_0^2 + z_0^2 + \frac{I_y + I_z}{A},$$

即 r_0 为截面对剪切中心的极迴轉半径．将算得的 m_x 值[式(a)]代入式(237)，得

$$C_1\varphi'''' - (C - r_0^2P)\varphi'' - P(y_0w'' - z_0v'') = 0. \tag{243}$$

現在可用此式連同式(242)来确定推力 P 的临界值[1]．

可以看出，所有这三个方程式中均含有轉角 φ．这說明了，扭轉屈曲一般会引起軸綫的弯曲，因此我們得扭轉和弯曲的联合屈曲．在 $y_0 = z_0 = 0$ 的特殊情形下，即剪切中心軸与形心軸重合时，式(242)和(243)中的每一式均只包含一个未知数，并可分别加以处理．于是由式(242)求得了两个临界載荷值，此两值相应于两个主平面內由欧拉理論所給出的屈曲，而由式(243)求得了純扭轉屈曲时的临界載荷，如 §51 中所討論过的．当然，在实际应用中将考虑这三个临界載荷值中的最小者．

回到一般的情形，我們假設压杆的两端不能对 x 軸旋轉（图163)，但能自由地翘曲，并能对 y 和 z 軸自由地旋轉(簡支端)．对于此情形，端点条件为

$$\left.\begin{aligned} v = w = \varphi = 0 \\ v'' = w'' = \varphi'' = 0 \end{aligned}\right\} \text{对 } x = 0 \text{ 和 } x = l,$$

如取式(242)和(243)的解的形式如下，則上列各条件就能得到滿足：

1) 等价于式(242)和(243)的方程組是由 Robert Kappus 首先求得的；參看 *Jahrb. deut. Luftfahrtforsch.*, 1937 和 *Luftfahrtforsch.*, vol. 14, p. 444, 1938.

$$v = A_1 \sin\frac{\pi x}{l},\ w = A_2 \sin\frac{\pi x}{l},\ \varphi = A_3 \sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (244)$$

将这些表达式代入式(242)和(243)，得下列用以計算常数 A_1，A_2 和 A_3 的方程式：

$$\left.\begin{aligned}
\left(P - EI_z\frac{\pi^2}{l^2}\right)A_1 + Pz_0A_3 = 0,\\
\left(P - EI_y\frac{\pi^2}{l^2}\right)A_2 - Py_0A_3 = 0,\\
Pz_0A_1 - Py_0A_2 + \left(-C_1\frac{\pi^2}{l^2} - C + r_0^2P\right)A_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (245)$$

如取 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$，这相应于受压支柱获得直形平衡，这些方程式就可得到满足。为了获得屈曲形式的平衡，式(245)必須得出 A_1，A_2 和 A_3 的非零解，而这只有在式(245)的行列式为零时才有可能。为了簡化书写，我們此处引用記号

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2},\ P_2 = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2},\ P_3 = \frac{1}{r_0^2}\left(C + C_1\frac{\pi^2}{l^2}\right). \qquad (246)$$

式中 P_1 和 P_2 为在两个主平面内屈曲时的欧拉載荷，而 P_3 則表示純扭轉屈曲时的臨界載荷，如式(241)所示。于是，令式(245)的行列式等于零，得

$$\begin{vmatrix}
P - P_1 & 0 & z_0P\\
0 & P - P_2 & -y_0P\\
z_0P & -y_0P & r_0^2(P - P_3)
\end{vmatrix} = 0,$$

展开后，得出下列用以計算 P 之臨界值的三次方程式：

$$\begin{aligned}
&(-r_0^2 + y_0^2 + z_0^2)P^3 +\\
&\quad + [(P_1 + P_2 + P_3)r_0^2 - y_0^2P_1 - z_0^2P_2]P^2 -\\
&\quad - r_0^2(P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_3)P + P_1P_2P_3r_0^2 = 0. \qquad (247)
\end{aligned}$$

由此方程式可得一重要的結論。設 $P_1 < P_2$，即較小的欧拉載荷相应于在 xy 平面内的弯曲，我們来研究在不同的 P 值下式(247)左边的符号。如果 P 极小，我們可把凡是包含 P 的各項略去，而表达式的左边化为 $P_1P_2P_3r_0^2$，此为正値。如果 P 取为 P_1 值，則式(247)的左面化为 $z_0^2P_1^2(P_1 - P_2)$，此为負値，因为 $P_1 < P_2$，

这説明式(247)有一小于 P_1 的根. 因此我們得出,如果考慮了屈曲时发生扭轉的可能性,我們必得一小于欧拉載荷的临界載荷.

为了求得任何特定情形下的临界載荷,我們运用式(246)的記号来計算式(247)中各系数的数値,然后解此三次方程式[1]. 因此我們得三个 P 値,在实际应用中当取其中最小者. 将临界値代入式(245),我們对每个可能的临界形式求得比値 $A_1:A_3$ 和 $A_2:A_3$. 建立截面的旋轉与平移間关系的这些比値,对每个临界形式定出了剪切中心軸位置和繞該軸的轉角.

如果杆壁极薄,而其长度 l 又很短,則 P_3 可能比 P_1 和 P_2 小得多. 对于这一情形,式(247)的最小根接近于 P_3 値. 将此値代入式(245),我們看出,A_1 和 A_2 比起旋轉位移来很小,这説明了屈曲形式接近于 §51 中所討論的純扭轉屈曲. 对于壁很厚而长度 l 又很大的情形,P_3 通常比 P_1 和 P_2 大得多,而式(247)的最小根接近于 P_1 値. 对于这一情形,扭轉对临界載荷的影响很小,因而运用普通柱公式能得出令人滿意的結果.

如果截面有一对称軸,P_{cr} 的計算就可得到簡化. 令 y 軸为对称軸,于是 $x_0=0$,而方程組(242)的第一式中包含 φ 的这一項为零. 杆在对称面内的屈曲与扭轉无关,而相应的临界載荷可由欧拉公式求得. 我們只須研究垂直于对称面的弯曲和扭轉即可. 相应的方程式为

$$EI_y w'' = -P(w - y_0\varphi),$$
$$C_1\varphi'''' - (C - r_0^2P)\varphi'' = Py_0 w''.$$

同前面一样处理,并运用式(244),在計算临界載荷时得

$$\begin{vmatrix} P-P_2 & -y_0P \\ -y_0P & r_0^2(P-P_3) \end{vmatrix} = 0,$$

从而得

$$r_0^2(P-P_2)(P-P_3) - y_0^2P^2 = 0. \qquad (248)$$

此二次方程式給出两个解. 連同在对称面内屈曲时的欧拉載荷,

---

1) 运用 Kappus 論文中所示的諸模图,可使求解大大簡化, *loc. cit.*, p. 281.

它們代表 P 的三个临界值。 在实际应用中必須运用其中最小者。研究式(248)的左边，我們看出，当 P 值极小时，它化为 $r_0^2P_2P_3$，此为正值。我們还看出，当 $P=P_2$ 和 $P=P_3$ 时，它为負值，因为它的值化为 $-y_0^2P^2$。当所有的 P 值均在 $P=P_2$ 和 $P=P_3$ 之間时，它也为負值，因为第一項变为負值而第二項永远是負值。由此討論我們得出，式(248)的一个根小于 P_2 或 P_3，而另一根則大于 P_2 或 P_3。 較小的一个根或在对称面內屈曲时的欧拉載荷給出了所需的临界載荷。

所有上面这些結論均基于式(244)。一点也不复杂，我們可将解写成較普遍的形式，并設

$$v=A_1\sin\frac{n\pi x}{l},\ w=A_2\sin\frac{n\pi x}{l},\ \varphi=A_3\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad (249)$$

此相应于屈曲时杆可分为 n 个半波的假設。 对于此情形，我們前面的結論仍能成立；只需将 $n^2\pi^2/l^2$ 值代入式(246)以代替 π^2/l^2 即可。 相应的临界載荷值自然将較屈曲成一个半波时求得的为大，而且只有在杆具有中間等距横向支座时才有实际意义。

如果杆的两端均为固定，則端点条件为

$$\left.\begin{array}{l} v=w=\varphi=0 \\ v'=w'=\varphi'=0 \end{array}\right\} \text{对 } x=0 \text{ 和 } x=l.$$

由于屈曲时会出現端力矩，因此我們可得下列方程式以代替式(242)：

$$\begin{aligned} EI_z\frac{d^2v}{dx^2}&=-P(v+z_0\varphi)+EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=0} \\ EI_y\frac{d^2w}{dx^2}&=-P(w-y_0\varphi)+EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0} \end{aligned}\qquad (250)$$

这些方程式連同式(243)[1]决定了杆的屈曲形式和相应的临界載荷。如取

1) 式(243)是研究了杆的两个相邻截面間的体元而推导出来的，它不受端点条件改变的影响。

$$v = A_1\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right),\ w = A_2\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right),$$
$$\varphi = A_3\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right), \tag{251}$$

所有这些方程式和端点条件就能得到滿足. 将这些表达式代入式(243)和(250),我們得到用以計算临界載荷的同样方程式(247),只需用 $4\pi^2/l^2$ 代替式(246)記号中的 π^2/l^2 卽可.

§53. 扭杆中的纵向正应力. 在討論圓軸的扭轉时(原书上卷第281頁),假設了在扭轉时軸的任意两截面間的距离保持不变.

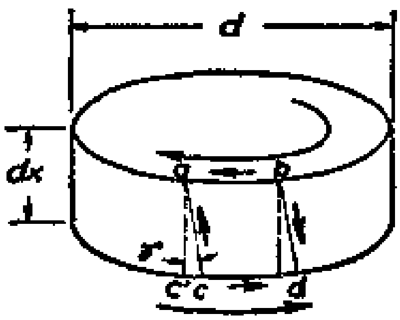


图 166

現在可以看出,对于小变形(如在鋼軸中),此假設非常精确. 但是对于橡皮之类的材料,在扭轉时最大剪应变可能相当大. 因此,如果我們希望求得应力的正确数值,必須計及扭轉时軸截面間距离的改变. 同样的結論也适用于狹长矩形截面或如图 144 所示的薄壁截面的鋼制受扭构件.

我們从討論一实心圓軸的情形开始,并首先假設两相邻截面間的距离(图 166)在扭轉时保持不变. 如果 γ 为軸表面上的剪应变,由三角形 acc' 可得纵向纖維 ac 的伸长量如下:

$$ac = \frac{ac'}{\cos\gamma} = ac'\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\right).$$

以单位长度内的扭轉角 θ 表示出 γ 后,得

$$ac = ac'\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta d}{2}\right)^2\right],$$

而纖維 ac 的单位伸长量为

$$\varepsilon_{\max} = \frac{ac - ac'}{ac'} = \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1}{8}\theta^2 d^2 = \frac{1}{2}\frac{\tau_{\max}^2}{G^2}. \tag{a}$$

相应的拉应力为

$$\sigma_{\max} = \varepsilon_{\max} E = \frac{E}{2}\cdot\frac{\tau_{\max}^2}{G^2}.$$

对于离軸綫 r 处的任何其他纖維，单位剪应变較 γ 为小，两者之比为 $r:d/2$，而拉应力为

$$\sigma = \sigma_{max}\left(\frac{2r}{d}\right)^2 = E\frac{2r^2}{d^2}\frac{\tau_{max}^2}{G^2}. \tag{b}$$

因此，扭轉时两截面間的距离保持不变的假設使我們得出这样的結論：为了使长度保持不变，必須有一产生拉应力[式(b)]的縱向拉力作用在两端。如果不加此力，則由純轉矩引起的扭轉将同时使軸縮短。令 ε_0 表示相应的单位縮短量。于是我們得

$$\sigma = \frac{2r^2}{d^2}\frac{E\tau_{max}^2}{G^2} - \varepsilon_0 E, \tag{c}$$

而不是式(b)。ε_0 值可由相应于应力分布[式(c)]的縱向力必須等于零这一条件确定。将截面分为許多微环，并求相应于式(c)应力的力之总和，得[1]

$$\int_0^{d/2} 2\pi r\sigma dr = 2\pi\int_0^{d/2}\left(\frac{2r^2}{d^2}\frac{E\tau_{max}^2}{G^2} - \varepsilon_0 E\right) r dr$$

$$= \frac{\pi d^2 E}{4}\left(\frac{\tau_{max}^2}{4G^2} - \varepsilon_0\right) = 0,$$

从而得

$$\varepsilon_0 = \frac{\tau_{max}^2}{4G^2},$$

而根据式(c)，应力分布变成

$$\sigma = \frac{E\tau_{max}^2}{4G^2}\left(\frac{8r^2}{d^2} - 1\right). \tag{252}$$

最大应力发生在外表面上，即 $r = d/2$ 处，因而我們得

$$\sigma_{max} = \frac{E\tau_{max}^2}{4G^2}. \tag{253}$$

在截面的中心，我們得一同样大小的压应力。

値得指出，应力 σ 与 τ_{max}^2 成正比；因此此应力的重要性随 τ_{max} 的增加而增加，亦即随扭轉角的增加而增加。对于鋼一类的材料，

1) 設纖維与杆的軸綫間夹角的余弦可以取为 1。

τ_{max} 比起 G 来总是非常小的，因此 σ_{max} 的大小比起 τ_{max} 来很小，而可以忽略不計．但是对于橡皮一类的材料，τ_{max} 可能与 G 同級；因此 σ_{max} 比起 τ_{max} 来不再很小，必須予以考慮．

托馬斯·楊（Thomas Young）[1]首先研究了圓軸在扭轉时产生的軸向变形．他指出了，由于傾斜纖維（如图 166 中纖維 ac）的拉伸，軸对扭轉有一与 θ^3 成正比的附加抗力．

如果不是圓截面，而是一狹长矩形截面，可以証明[2]，即使对于鋼之类的材料，应力 σ 也可能与 τ_{max} 的大小同級．如果截面的长边 b 比起短边 c 来很大，則最远纖維仅由扭轉所引起的最大伸长量可由式(a)以 b 代 d 而求得：

$$\varepsilon_{max} = \frac{b^2}{8}\theta^2.$$

对于离軸綫 y 处的任何纖維，伸长量較 ε_{max} 为小，两者之比为 $(2y/b)^2$．将此伸长量与縱向的单位收縮量 ε_0 合起来，得

$$\varepsilon = \frac{b^2}{8}\theta^2\left(\frac{2y}{b}\right)^2 - \varepsilon_0 = \frac{\theta^2 y^2}{2} - \varepsilon_0.$$

相应的拉应力为

$$\sigma = E\left(\frac{\theta^2 y^2}{2} - \varepsilon_0\right). \tag{d}$$

同前面一样，常数 ε_0 可由縱向拉力等于零这一条件定出；因此

$$\int_{-b/2}^{b/2} c\sigma dy = cE\int_{-d/2}^{b/2}\left(\frac{\theta^2}{2}y^2 - \varepsilon_0\right)dy = cE\left(\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{b^3}{12} - \varepsilon_0 b\right) = 0,$$

从而得

$$\varepsilon_0 = \frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{b^2}{12},$$

由式(d)得

---

1) 参看 Thomas Young, A Course of Lectures on Natural Philosophy, etc., London, 1807.

2) 参看 Buckley 的論文, *Phil. Mag.*, p. 778, 1914. 并参看 C. Weber, *loc. cit.*, p. 236, 以及他的論文, *Festschrift zum. 70. Geburtstage* August Föppl, Berlin, 1924.

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2}\left(y^2 - \frac{b^2}{12}\right). \tag{e}$$

最远纖維($y = b/2$ 处)中的最大拉应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{E\theta^2 b^2}{12}. \tag{f}$$

中心($y = 0$)处的最大压应力为

$$\sigma_{\min} = -\frac{E\theta^2 b^2}{24}. \tag{g}$$

为了比較这些縱向应力与 $\tau_{\max}$，可应用式(221)和(222). 对于狭长矩形截面，由这些方程式得

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{cG}. \tag{h}$$

将此关系式代入式(f)和(g)，得

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{12G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2};\ \sigma_{\min} = -\frac{E\tau_{\max}^2}{24G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2} \tag{254}$$

可以看出，当 b/c 很大时，应力 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 比起 $\tau_{\max}$ 来并不很小。应力分布[参看式(e)][1]示于图 167 中. 这些应力的方向与受扭小条的縱向纖維相同，并与小条軸綫成一傾角 θy. 它們在垂直于杆件軸綫的平面內的投影为

$$\sigma\cdot\theta y = \frac{E\theta^3}{2}\left(y^3 - \frac{b^2 y}{12}\right). \tag{i}$$

截面的面元 cdy 上应力 σ 的分量[式(i)]对杆件軸綫产生一力矩，其大小等于

$$\frac{E\theta^2}{2}\left(y^3 - \frac{b^2 y}{12}\right)cydy.$$

因此由应力 σ 产生的轉矩为

$$\int_{-b/2}^{b/2}\frac{E\theta^3}{2}\left(y^3 - \frac{b^2 y}{12}\right)cydy = \frac{Ecb^5}{360}\theta^3.$$

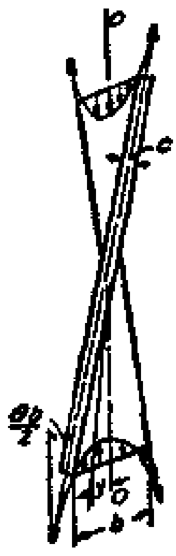


图 167

1) 这种应力分布发生在离杆两端較远处. 在两端附近产生一較式(e)所示的更为复杂的应力分布. 它使两端完全沒有正应力. 这种应力分布在作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity" (1951 年版)一书第 167 頁中有討論.

将此轉矩与由剪应力产生的轉矩[式(221)]加以合并，得总轉矩的表达式如下：

$$M_t=\frac{1}{3}bc^3G\theta+\frac{1}{360}Ecb^5\theta^3=\frac{1}{3}bc^3G\theta\left(1+\frac{1}{120}\frac{E}{G}\frac{b^4}{c^2}\theta^3\right). \tag{255}$$

可以看出，对于截面为非常狭长的矩形，而扭轉角較大的情形，应力 σ 可能提供轉矩的重要部分，因为由式(255)第二項代表的这部分随 θ^3 而变，而由剪应力 τ 产生的这部分則随 θ 而变。当轉矩的大小为已知时，相应的扭轉角 θ 可由式(255)求得。于是最大剪应力 τ_{max} 可由式(h)算出，而 σ_{max}, σ_{min} 可由式(254)算出。

我們取下列数据的狭长矩形截面杆作为一例：$b=4$ 吋，$c=0.05$ 吋，$E/G=2.6$，$G=11.5\times10^6$ 磅/吋²和 $M_t=\frac{1}{3}bc^2\times 15000=50$ 吋磅。如果略去正应力 σ，式(222)就給出 $\tau_{max}=15000$ 磅/吋²，而式(221)則給出

$$\theta=\frac{\tau_{max}}{cG}=0.0261\text{ 吋}^{-1}.$$

如果計及縱向应力，就必須应用式(225)。除以 $\frac{1}{3}bc^3G$ 后，由此式得

$$0.0261=\theta(1+2220\theta^3),$$

从而得 $\theta=0.0164$ 吋$^{-1}$。然后由式(h)和(254)得

$$\tau_{max}=cG\theta=9430\text{ 磅/吋}^2,$$

$$\sigma_{max}=\frac{E\tau_{max}^2}{12G^2}\frac{b^2}{c^2}=10700\text{ 磅/吋}^2.$$

可以看出，当金属薄条的扭轉角很大时(如本例所举者)，正应力 σ 与剪应力 τ 同級，在計算扭轉角时不能予以忽略。

从上面的討論还可以得出，均匀的縱向拉伸对矩形薄条的扭轉角有一些影响。例如，假設有一均匀的縱向拉应力 σ_0 作用在刚才研究的小条上。对于这一情形，用以計算 ε_0 的方程式为

$$cE\left(\frac{\theta^2}{2}\frac{b^3}{12}-\varepsilon_0 b\right)=\sigma_0 bc,$$

我們得

$$\varepsilon_0 = \frac{\theta^2}{2}\frac{b^2}{12} - \frac{\sigma_0}{E}.$$

于是縱向应力 σ 的表达式变成

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2}\left(y^2 - \frac{b^2}{12}\right) + \sigma_0,$$

而相应的轉矩为

$$\int_{-b/2}^{+b/2}\sigma\theta y\cdot cydy = \frac{Ecb^5}{360}\theta^3 + \frac{\sigma_0\theta b^3 c}{12}.$$

于是我們得总轉矩为

$$M_t = \frac{1}{3}bc^3G\theta\left(1 + \frac{1}{120}\frac{E}{G}\frac{b^4}{c^2}\theta^2 + \frac{1}{4}\frac{\sigma_0}{G}\cdot\frac{b^2}{c^2}\right), \quad (256)$$

而不是式(255). 可以看出，当 b/c 很大时，即对于薄条的情形，拉应力可使扭轉角 θ 大大减小.

§ 54. 疏圈螺旋弹簧. 前面在討論螺旋弹簧时（参看原书上卷第 290 頁），假設了簧圈与垂直于螺旋軸綫的平面間的夹角 α 极小. 忽略了此角的影响后，变形只是由于簧綫的扭轉而引起的. 在疏圈弹簧中，角 α 不再很小，由軸向載荷 P 引起的变形包括扭轉和弯曲两种变形(图 168). 在任意点 A，弹簧的螺旋形中心綫的切綫并不垂直于力 P，因此，此力在截面 A 处产生一繞軸綫 n_1 的弯矩和一轉矩. 力 P 可分解为两个分力：垂直于点 A 切綫的 $P\cos\alpha$ 和平行于点 A 切綫的 $P\sin\alpha$. 在截面 A 处，分力 $P\cos\alpha$ 产生轉矩

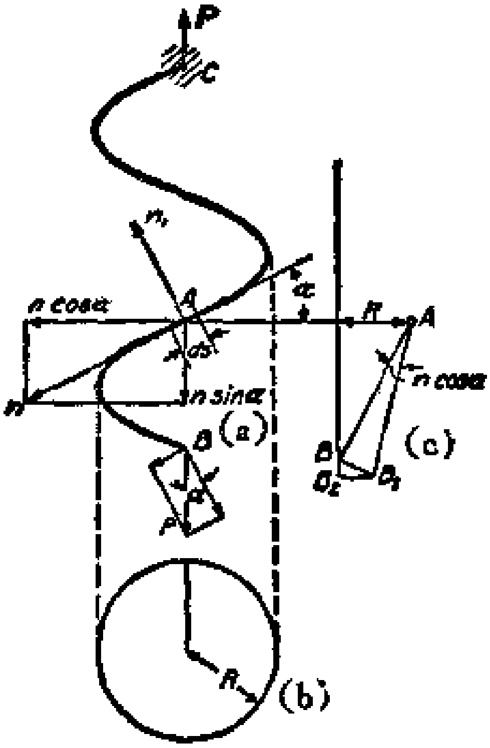


图 168

$$M_t = PR\cos\alpha, \quad (a)$$

式中R为螺旋的半径，而分力 $P\sin\alpha$ 则产生弯矩

$$M = PR\sin\alpha, \tag{b}$$

最大复合应力为(参看原书上卷第 297 頁)

$$\sigma_{max} = \frac{16}{\pi d^3}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}) = \frac{16PR}{\pi d^3}(1 + \sin\alpha), \tag{257}$$

式中d为簧綫直径. 最大剪应力为[1]

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + M_t^2} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \tag{258}$$

我們現在根据弹簧上端固定而下端受一軸向載荷P的这一假設来研究弹簧的撓曲. 在点A，两相邻截面間的微段 ds 为轉矩 M_t 所扭轉，轉过了角度

$$d\varphi = \frac{PR\cos\alpha}{GI_p}ds. \tag{c}$$

由于此扭轉，弹簧的下部繞点A的切綫旋轉，轉过了角度 $d\varphi$. 此微小的旋轉在图 168 中用沿切綫的矢量 n 表示. 如果矢量方向与旋轉方向間的关系和右手螺旋的位移与旋轉間的关系相同，則矢量方向为正. 微小的旋轉 n 可以分解为两个分量：(1)繞水平軸的旋轉 $n\cos\alpha$，和(2)繞鉛直軸的旋轉 $n\sin\alpha$. 后者并不引起弹簧的B端有任何的降低，因此这里无需加以考慮. 下面所討論的由于旋轉 $n\cos\alpha$ 而引起的B端的降低与討論密圈弹簧时类似. 由于有此旋轉，点B移至B_1(图 168c)，而我們得 $\overline{BB_1} = \overline{AB}\,n\cos\alpha$. 此位移的鉛直分量为

$$\overline{BB_2} = \overline{BB_1}\cdot\frac{R}{\overline{AB}} = Rn\cos\alpha. \tag{d}$$

由于扭轉而产生的B端总撓度为式(d)所示的各微量之总和，即

$$\delta_1 = \int_B^C Rn\cos\alpha, \tag{e}$$

---

1) 如果簧綫直径d比起螺旋直径$2R$来并不非常之小，就必須將此値乘上一修正系数，对于 $\alpha<20°$，可取此修正系数与密圈弹簧的相同(原书上卷第 292 頁). 关于此課題的深入討論曾由 O. Göhner 所作，*Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 76, p. 269, 1932. 并參看作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity", p. 391, 1951.

式中积分取自弹簧下端 B 至上面固定端 C 的总长.

由弯曲而产生的变形可以同样計算. 由于力矩 M[式(b)]使微段 ds 弯曲而产生的偏轉角为

$$d\varphi_1 = \frac{PR\sin\alpha}{EI}ds. \tag{f}$$

弹簧下部相应的旋轉在图 168 中用矢量 n_1 表示. 同上面一样，可以看出，只有它的水平分量 $n_1\sin\alpha$ 才引起 B 端的鉛直位移，此位移的大小为

$$\delta_2 = \int_B^C Rn_1\sin\alpha. \tag{g}$$

将式(e)和(g)相加，B 端的总撓度变成

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = R\int_B^C (n\cos\alpha + n_1\sin\alpha).$$

将式(c)的 n 和式(f)的 n_1 代入，得

$$\delta = PR^2\int_B^C\left(\frac{\cos^2\alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2\alpha}{EI}\right)ds,$$

或考虑到括弧內的表达式为常数，并以 s 表示簧綫的长度，得

$$\delta = PR^2s\left(\frac{\cos^2\alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2\alpha}{EI}\right). \tag{259}$$

如果簧綫直径 d 比起 $2R$ 来并不很小，就必須将式(259)中的扭轉剛度 GI_p 乘上修正系数

$$\beta = 1 + \frac{3\left(\frac{d}{2R}\right)^2}{16\left[1-\left(\frac{d}{2R}\right)^2\right]}.$$

对于方截面弹簧，也可应用同一系数[1].

(257)，(258)和(259)諸式給出了承受軸向力作用的疏圈螺旋弹簧問題的完整解[2].

弹簧的伸长同时引起其 B 端对鉛直的螺旋綫軸的旋轉. 为了

1) O. Göhner, *loc. cit.*, p. 292.

2) 螺旋弹簧的理論是由 St.-Venant 所发展出来的，参看 *Compt. rend.*, vol. 17, p. 1020, 1843. 一系列特殊情形曾由 Thompson 和 Tait 作了討論，Nat. Phil., Part 2, p. 139; J. Perry, Applied Mechanics, New York, p. 613, 1907; 和G. W. Shearer, *Engineering*, vol. 93, p. 206, 1912.

确定此旋轉．我們再来研究图 168a 中微段 ds 的变形． 由于此微段的扭轉，弹簧下部轉过了角度[1]

$$n\sin\alpha = \frac{M_t ds}{GI_p}\sin\alpha.$$

微段的弯曲引起 n_1 的角度变化（图 168a），从而引起的弹簧下部对鉛直軸的旋轉为

$$-n_1\cos\alpha = -\frac{Mds}{EI}\cos\alpha.$$

因此，由于微段 ds 的变形而引起的弹簧下部繞螺旋軸綫的总旋轉为

$$ds\left(\frac{M_t\sin\alpha}{GI_p} - \frac{M\cos\alpha}{EI}\right). \tag{h}$$

这些微旋轉之和等于 B 端对弹簧固定端 C 的总旋轉角 φ：

$$\varphi = s\left(\frac{M_t\sin\alpha}{GI_p} - \frac{M\cos\alpha}{EI}\right)$$
$$= sPR\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI}\right), \tag{260}$$

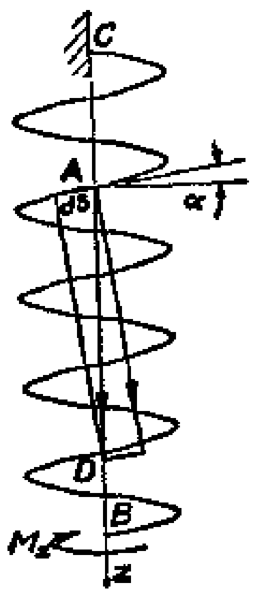


图 169

式中 s 为簧綫的总长．

对于其它截面形状的簧綫，必須将相应的扭轉刚度 C 代入式(260)以代替 GI_p．

軸向扭轉． 令矢量 $\overline{AD}$ 代表作用在弹簧 B 端的轉矩 M_z（图 169）． 作用在 A 处微段 ds 上的弯矩和扭矩各为

$$M = M_z\cos\alpha,\quad M_t = M_z\sin\alpha.$$

由于微段 ds 的变形而引起的弹簧 B 端繞 z 軸的旋轉为

$$ds\left(\frac{M_t}{GI_p}\sin\alpha + \frac{M}{EI}\cos\alpha\right) =$$
$$= M_z ds\left(\frac{\sin^2\alpha}{GI_p} + \frac{\cos^2\alpha}{EI}\right). \tag{i}$$

1) 設簧綫为圓截面者．

由轉矩 M_z 引起的 B 端对 z 軸的总旋轉为

$$\varphi_1 = sM_z\left(\frac{\sin^2\alpha}{GI_p} + \frac{\cos^2\alpha}{EI}\right). \tag{261}$$

由于拉力 P 引起了弹簧 B 端的旋轉 φ，因此由互易定理可以得出(参看原书上卷第 351 頁)，轉矩 M_z 将引起弹簧伸长. 此伸长量 δ 可由下式求得：

$$P\delta = M_z\varphi,$$

从而得

$$\delta = \frac{M_z}{P}\varphi = M_z sR\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI}\right). \tag{262}$$

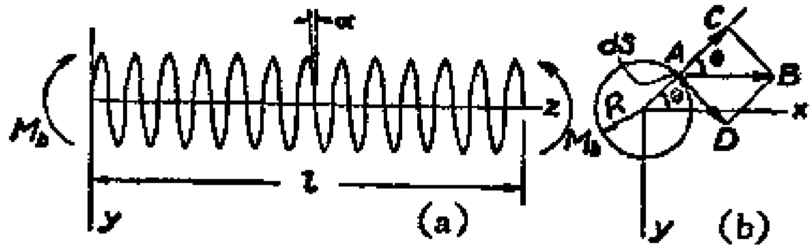


图 170

在軸綫平面內的弯曲. 有时我們必須研究螺旋弹簧在其軸綫平面內的純弯曲(图 170). 令图 170b 中矢量 $\overline{AB}$ 所表示的 M_b 为 yz 平面內的弯曲力偶. 研究弹簧上由角 θ 决定的点 A 处微段 ds，我們将矢量 $\overline{AB}$ 分解为两个分量：$\overline{AC} = M_b\cos\theta$ 和 $\overline{AD} = M_b\sin\theta$. 第一个分量代表与半径为 R 的圓柱面相切的平面內的力偶，它使簧綫在該平面內发生弯曲. 第二个分量代表作用在弹簧軸綫平面內的力偶，它可分解为轉矩 $M_b\sin\theta\cos\alpha$ 和在簧圈平面內的弯矩 $M_b\sin\theta\sin\alpha$. 因此微段 ds 为一大小等于

$$\sqrt{M_b^2\cos^2\theta + M_b^2\sin^2\theta\sin^2\alpha} \tag{j}$$

的复合弯矩所弯曲，并为一大小等于 $M_b\sin\theta\cos\alpha$ 的轉矩所扭轉. 如設簧綫为圓截面，则微段的应变能为

$$dU = ds\left[\frac{M_b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\alpha)}{2EI} + \frac{M_b^2\sin^2\theta\cos^2\alpha}{2GI_p}\right]. \tag{k}$$

将 $ds = Rd\theta/\cos\alpha$ 代入，并自 $\theta = 0$ 至 $\theta = 2\pi n$ 积分(此处 n 为

圈数),得

$$U=\frac{\pi nR}{\cos\alpha}\left[\frac{M_b^2(1+\sin^2\alpha)}{2EI}+\frac{M_b^2\cos^2\alpha}{2GI_p}\right]. \qquad (1)$$

弹簧一端对另一端的偏轉角为 l/ρ, 此处 l 为弹簧长度(图170a),而 ρ 为弹簧軸綫挠度曲綫的曲率半径. 长度 l 由下列表达式确定:

$$l=s\sin\alpha=\frac{2\pi Rn}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha.$$

使弯曲力偶 M_b 所作的功等于应变能[式(1)],得

$$\frac{M_b}{2}\cdot\frac{l}{\rho}=U,$$

从而得

$$\frac{1}{\rho}=M_b\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{2EI}+\frac{\cos^2\alpha}{2GI_p}\right). \qquad (263)$$

因此,对于簧綫为圓截面的螺旋弹簧受軸向弯曲的情形,必須取

$$B=\frac{\sin\alpha}{\dfrac{1+\sin^2\alpha}{2EI}+\dfrac{\cos^2\alpha}{2GI_p}} \qquad (m)$$

作为弯曲刚度. 如果角 α 很小,我們就可足够精确地假設 $\sin^2\alpha=0$ 和 $\cos^2\alpha=1$. 于是由于 $\sin\alpha=l/s$, 我們可以用下列公式表示螺旋弹簧的弯曲刚度:

$$B=\frac{2EIl}{s}\frac{1}{1+\dfrac{E}{2G}}. \qquad (264)$$

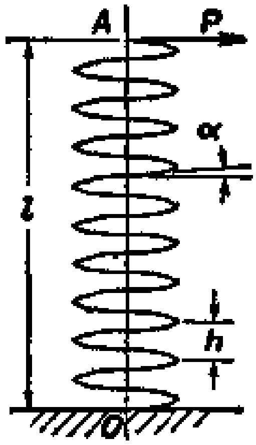


图 171

在研究螺旋弹簧由一横向載荷所引起的弯曲时(图171), 我們不仅要考虑由于弯矩产生的挠度,而且还須考虑由剪力产生的挠度. 設弹簧的 O 端固定,且 α 很小,我們可由普通悬臂的公式代入式(264)的弯曲刚度而求得弹簧上端 A 由弯矩所产生的变形 δ_1. 因此

$$\delta_1=\frac{Pl^3}{3}\cdot\frac{s}{2EIl}\cdot\left(1+\frac{E}{2G}\right). \qquad (n)$$

在討論剪力对变形的影响时，我們研究由剪力 V 所引起的一个簧圈在其平面内的畸变[1](图 172)．在任意点 A，由 V 所产生的弯矩为 $VR\sin\theta$，而一个簧圈的相应应变能为

$$U=\int_0^{2\pi}\frac{M^2Rd\theta}{2EI}=\frac{V^2R^3\pi}{2EI}.$$

于是相对位移 e 为

$$e=\frac{\partial U}{\partial V}=\frac{\pi VR^3}{EI}.$$

将此位移除以螺距 h，求得由于剪力作用而产生的撓度曲綫的附加斜率 γ 如下：

$$\gamma=\frac{e}{h}=\frac{\pi VR^3n}{EIl}. \tag{o}$$

前面对实心梁由于剪切而产生的撓度导出的公式(参看原书上卷第 39 节)也能适用于計算螺旋弹簧的横向撓度，只需以式(o)所給出的斜率代替前面所用的表达式 $\alpha V/AG$ 即可．对于图 171 所示的情形，剪力沿长度 l 不变，其大小等于 P；因此由于剪切而产生的撓度为

$$\delta_2=\gamma l=\frac{\pi nPR^3}{EI}. \tag{p}$$

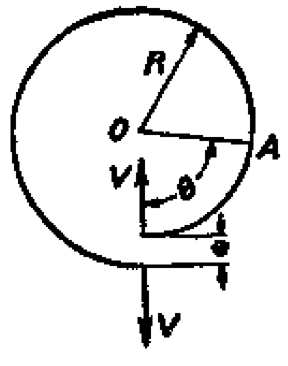


图 172

将式(n)和(p)相加，并設 $s=2\pi Rn$，得

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{\pi nPl^2R}{3EI}\left(1+\frac{E}{2G}+\frac{3R^2}{l^2}\right). \tag{265}$$

括弧内最后一項表示剪切作用的影响．如果螺旋半径 R 比起长度 l 来很小时，它就可忽略不計[2]．

---

1) 在此討論中，設角 α 很小．

2) 螺旋弹簧受軸向压縮时的横向屈曲在作者的“弹性稳定理論”(科学出版社出版，1958)一书中有討論．該书还列出了关于此課題的参考书目．

第八章　应力集中

§55. 受拉或受压构件中的应力集中. 在討論簡单拉伸和压縮时,假設了杆为稜柱形. 于是当力作用在中心时,应力在截面上均匀分布. 对于变截面杆的情形,也假設了应力为均匀分布(参看原书上卷第16頁图14),但此为近似的,只有在截面緩慢地改变时才得出令人滿意的結果. 截面的急剧变化引起应力很不規則地分布. 在設計承受变外力和反复应力的机器零件时,这种不規則性特别重要. 在这些地方,应力分布的不規則性意味着某些点上的应力远較平均値为大,而在反复应力的作用下,可能发生进展性裂縫. 机器零件在使用中的断裂,大多数可归因于这种进展性裂縫.

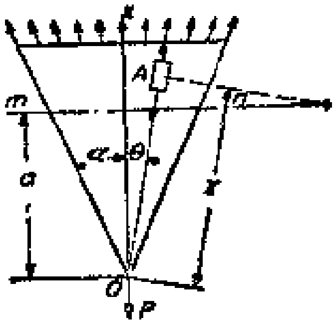


图　173

为了說明受拉变截面杆中的应力分布,我們来研究承受如图173所示載荷的等厚度 h 的对称楔. 由精确解知,应力为单純的径向分布(参看第54頁). 在任意点 A 处,径向体元处于单純径向拉伸状态. 此径向拉应力的大小可由下式表示:

$$\sigma_r = k\frac{P\cos\theta}{hr}, \tag{a}$$

式中 θ 为 x 軸与半径 OA 之間的夹角, r 为点 A 离 O 的距离,而 $k = 1\Big/\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ 为决定于楔角 2α 的系数.

在垂直于楔对称軸的任意截面 mn 上,正应力 σ_x 的分布是不均匀的. 运用原书上卷第38頁式(17),并将 $r = a/\cos\theta$ 代入上面的式(a),得

$$\sigma_x = \sigma_r\cos^2\theta = \frac{kP\cos^4\theta}{ah}. \tag{b}$$

此表明正应力在截面中心($\theta=0$)处最大，而在 $\theta=\alpha$ 处最小. 最大与最小应力之差随角 α 而增加. 当 $\alpha=10^{\circ}$ 时，此差为截面 mn 的面积除载荷 P 而得的平均应力的 6% 左右. 对于圆錐形杆也可得出类似結論. 可以指出，正应力在截面上的分布随錐角的減小而趋于均匀.

由此結論知，如果截面沿杆长緩慢地改变，則在非稜柱形杆的截面上正应力为均匀分布的这一假設仍可得出令人滿意的結果. 可是当截面急剧改变时，情形就完全不同了. 在这种所在，应力分布极不均匀，根据应力为均匀分布的假設而得的結果完全錯誤. 在后面的几节中将討論截面急剧变化的几个例子.

§ 56. 有一圓孔的板中的应力. 如果在一承受均布拉应力 σ 的板中做出一小圓孔[1)]，在点 nn 上就发生高度的应力集中(图 174a). 由精确理論[2)]知，这些点上的拉应力等于 3σ. 此理論还指出，此应力集中具有高度的局部性，它局限于孔的极近之处.

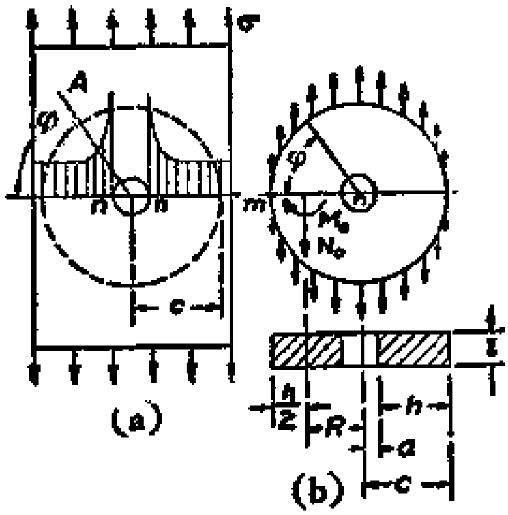


图 174

如果画一与孔同心而半径 c 較大的圓(如图 174a 中虛綫所示)，可以认为此圓圓周上的应力状态受孔的影响不大. 以图174b 表示一由半径为 c 的圓柱面从板上切出的圓环. 在此环外表面的每一点上，我們施加一大小为 $\sigma\sin\varphi$ 的鉛直方向应力，此应力等于板的相应面元 A 上的应力[参看原书上卷第 37 頁式(16)]. 于是，环中的应力将与板上由半径为 c 的圓所包的这部分(图 174a)內的应力接近相同. 这样，在板中圓孔附近的应力分布問題就化为承受強度为 $\sigma\sin\varphi$ 而沿外边綫連續分布的已知鉛直力的矩形

---

1) 例如，孔的直径小于板寬的 1/5.

2) 此理論由 Kirsh 所給出，*Z. Ver. deut. Ing.*, 1898. 并参看作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity" (1951 年版)一书第 78 頁.

截面圆环的問題[1]. 后面这一問題可用原书上卷第 380 頁中所討論的方法来解. 研究环的一个象限，沿截面 mn 作用的应力可化为作用在截面形心处的纵向拉力 N_0 和一弯曲力偶 M_0. 纵向力可由靜力学方程式确定，即

$$N_0 = \sigma c. \tag{a}$$

力矩 M_0 为靜不定的，它可由最小功定理算得. 对于位能可运用原书上卷第 382 頁式(228)，其中环任意截面处的纵向力和弯矩均由角 φ 确定(图 174b)，其值各为

$$N = \sigma c \cos^2\varphi,$$

$$M = M_0 + \sigma c(1 - \cos\varphi)\left[\frac{c}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{h}{2}\cos\varphi\right] - $$

$$- \sigma c\left(c - \frac{h}{2}\right)(1 - \cos\varphi), \tag{b}$$

式中 h 为矩形截面的高度. 于是

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{Md\varphi}{AEe} - \int_0^{\pi/2} \frac{Nd\varphi}{AE} = 0,$$

积分后，得

$$M_0 = \frac{2\sigma c^2}{\pi}\left[1 - \frac{3}{8}\pi - \frac{h}{2c}\left(1 - \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{e\pi}{4c} + \frac{R}{2c}(\pi - 2)\right]. \tag{c}$$

同前面一样，式中 R 为中心綫的半径，而 e 为中性軸与截面形心間的距离.

环的截面 mn 上点 n 处的应力由下面两部分組成：(1)由纵向力 N_0 产生的拉应力，其大小为

$$\sigma_1 = \frac{N_0}{h} = \frac{\sigma c}{h}, \tag{d}$$

和(2)由 M_0 产生的弯应力，根据原书上卷第 365 頁式(212)为

$$\sigma_2 = \frac{M_0\left(\frac{h}{2} - e\right)}{Aea} = \frac{M_0}{2ea}\left(1 - \frac{2e}{h}\right), \tag{e}$$

1) 設板厚为 1.

式中 a 为孔的半径.

对比值 c/a 的各个数值算出距离 e（参看原书上卷第 368 頁第 79 节），然后由式(d)和(e)确定 σ_1 和 σ_2. 最大应力为

$$\sigma_{max}=\sigma_1+\sigma_2.$$

計算結果列于下面的表 18 中.

表 18

c/a	3	4	5	6	8	10
$2e/h$	0.1796	0.2238	0.2574	0.2838	0.3239	0.3536
σ_1/σ	1.50	1.33	1.25	1.20	1.14	1.11
σ_2/σ	2.33	1.93	1.83	1.83	1.95	2.19
σ_{max}/σ	3.83	3.26	3.08	3.03	3.09	3.30

将上表最后一行的数字与孔非常小时的精确解 $\sigma_{max}=3\sigma$ 作一比較可以看出，当 $5<c/a<8$ 时，近似計算的結果很接近于精确解. 当 $c/a<5$ 时，孔不能看作非常小，而对半径为 c 的圓(图 174a)上的应力分布有显著的影响. 对于此情形，我們关于力沿环的外边緣分布(图 174b)的假設并不足够精确. 当 $c/a>8$ 时，与精确理論的偏差是由于在內半径比起外半径来非常小时曲杆的初等理論不够精确所致.

取截面 mn (图 174b)上离孔心 r 处的任一点，由精确理論得該点的正应力为

$$\frac{\sigma}{2}\left(2+\frac{a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right), \tag{f}$$

式中 σ 为作用在板端的均匀拉应力. 此应力分布由图 174a 中的阴綫面积表示. 可以看出，对于此情形，应力集中是高度局部化的. 在点 n 处，即 $r=a$ 处，我們得 $\sigma_{max}=3\sigma$. 应力随着离此过应力点的距离的增加而急剧降低；在离孔边的距离等于孔的半径之处，即 $r=2a$ 处，由式(f)得正应力等于 $1\frac{7}{32}\sigma$. 应力也随角 φ 的增大而急剧降低(图 174b)；当 $\varphi=\pi/2$ 时，即截面平行于所作用的拉应力 σ 时，我們看出，在圓孔边上切向压应力等于作用在

板端的拉应力 σ.

如果板不是受拉伸而是受压縮(图 175a)，我們只須改变前面討論中所得的应力的符号即可. 我們得出，在点 n 处将有一大小为 3σ 的压应力，而在点 m 处将有一大小为 σ 的拉应力. 对于如玻璃等压縮強度极高而拉伸強度很低的脆性材料，裂縫通常发生在点 m 处，如图 175b 所示.

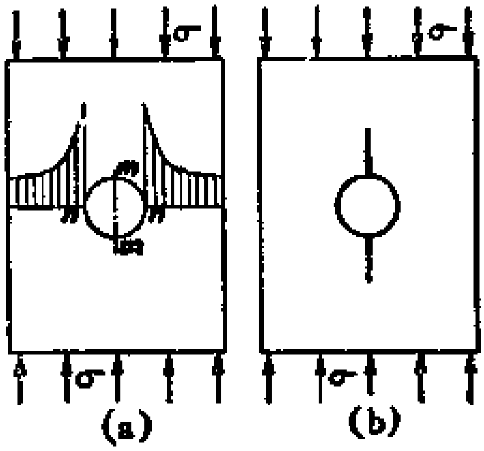


图 175

求得了簡单拉伸或压縮时的应力，再运用迭加法，我們就容易求得在两个垂直方向**同时受拉伸或压縮**时的应力集中. 例如，对于图 176 所示的情形，我們求得在点 n 处的切向应力为 $3\sigma_y-\sigma_x$，而在点 m 处的应力为 $3\sigma_x-\sigma_y$. 对于**純剪切**的特殊情形，我們得

$$\sigma_x=-\sigma_y=\sigma,$$

对于点 n 得应力为 -4σ，而对于点 m 得应力为 $+4\sigma$；因此对于此情形，最大应力为作用在板边的应力的四倍. 在具有一小圓孔的薄壁圓管的扭轉中(图177)，可得此高度应力集中的情形. 如果所

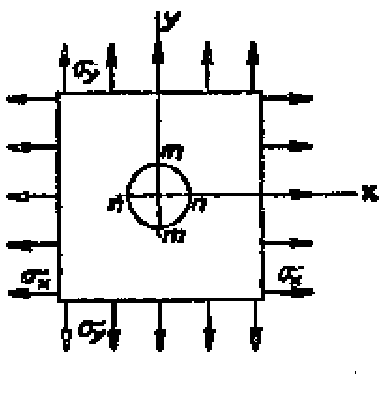
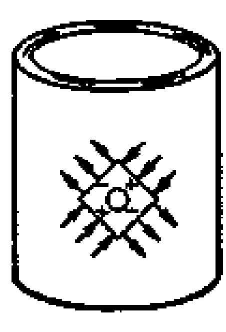


图 176


图 177

加轉矩的方向如图中所示，在孔边注有＋号之处就产生一大小为作用在两端的剪应力四倍的最大拉应力. 在注有－号之处，将有一同样大小的压应力.

上面所述的計算圓孔处应力的近似方法，也可用于孔有圓緣的情形(图 178)．当 $b/t_1 = 11$ 和 $t/2a = 0.01$ 时，此計算的結果[1]得出对应于不同 c/a 值的比值 $\sigma_{max}:\sigma$ 如下：

$c/a =$	4	5	6
$\sigma_{max}/\sigma =$	2.56	2.53	2.56

在上列范围内，比值 σ_{max}/σ 随 c/a 而变，但变化很小，所以以后的計算只对 $c/a = 5$ 的情形进行．圓緣的截面积对 σ_{max} 的影响可改变圓緣的尺寸 b 来加以研究．如果 $A_1 = 2t_1a$ 表示板的截面由于有孔而引起的減量，而 $A_2 = (b - t_1)t$ 表示圓緣的截面积，則对应于比值 A_2/A_1 若干数值的比值 σ_{max}/σ 如下：

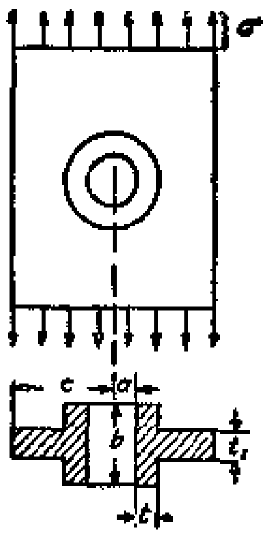


图 178

$A_2/A_1 =$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$\sigma_{max}/\sigma =$	2.53	2.17	1.90	1.69	1.53

上面的数值也可用于圓緣截面为其他形状的情形，只要圓緣的径向尺寸 t 比起孔的半径 a 来可看作很小．取具有 40 吋直径的圓孔，而厚度为 7/16 吋的受拉寬板为例．設孔边用两个 4 × 4 × 7/16 吋角鉄加固．对于这一情形，$A_2/A_1 = 0.40$，由上表查得 $\sigma_{max}:\sigma = 1.69$．

§57. 受拉构件中的其他应力集中情形． 应力集中問題可从理論上求得精确解[2]的只是少数情形，如圓孔的情形便是．关于在截面急剧改变之处的最大应力的資料大多数是由实驗得来的[3]．在以后的討論中，将列出一些或許具有实用意义的理論和实驗研

1) 此問題的討論載于作者的論文中，*J. Franklin Inst.*, vol. 197, p. 505, 1924. 設圓緣的整个截面为有效的．关于此問題的深入研究，可参看 L. Beskin, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. 140, 1944. 并参看 C. Gurney, *Air Ministry Repts. and Mem.* (London), No. 1834, 1938.

2) 各种形状孔的应力集中問題的理論解載于 G. N. Sawin 的著作中，Stress Concentration of Holes, 1951 (俄文版).

3) 确定最大应力的各种实驗方法在 §61 和 §62 中有說明．并参看 E. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, 1934.

究的最后結果[1]。

对于板中有小橢圓孔的情形[2]（图 179a），最大应力是在孔的水平軸的两端，且由下式給出：

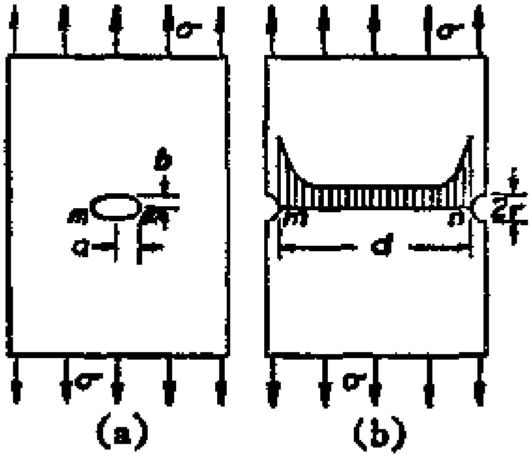


图 179

$$\sigma_{max} = \sigma\left(1 + 2\frac{a}{b}\right), \quad (a)$$

式中 σ 为作用在板端的拉应力。此应力随比值 a/b 而增加，因此垂直于拉伸方向的非常狹长的孔会引起非常高的应力集中，这說明了为什么垂直于作用力方向的裂縫会不断扩展。在裂縫的两端鉆孔以去除引起高度应力集中的尖角就可制止这种扩展。

在受拉板中的小半圓槽[3]（图179b）也会引起高度的应力集中。由实验[4]知，如果槽的半径 r 比起最小截面的寬度 d 来非常小，在点 m 和 n 处的应力为作用在板端的应力的三倍左右。一般而言，在点 m 和 n 处的最大应力为比值 r/d 的函数。最大应力与最小截面 mn 上的平均应力之比通常称为**应力集中系数**，用 k 表示之。对应于比值 r/d 各种数值的 k 值由图 180 中的曲綫 II[5]表示。在同图中还給出了圓孔的应力集中系数（曲綫I）和圓角的应力集中系数（曲綫 III）。在图 181 中給出了关于圓角上应力集中的更多資料。

在图 182 中給出了底部为圓形的不同深度槽的系数 k。可以

---

1) 在应力集中方面收集得极为完备的資料載于 R. E. Peterson 的著作中，Stress Concentration Design Factors, 1953.

2) 参看 G. Kolosoff 的論文，1910, St. Petersburg; 并参看 C. E. Inglis, *Engineering*, vol. 95, p. 415, 1913 和 *Trans. Inst. Naval Architects*, 1913.

3) 关于此問題的理論解，可参看 F. G. Maunsell 的論文，*Phil. Mag.*, vol. 21, p. 765, 1936.

4) 参看 M. M. Frocht, *J. Appl. Mech.*, vol. 2, p. 67, 1935.

5) 在下面討論中所給出的曲綫均取自M. M. Frocht 的論文，*ibid.*

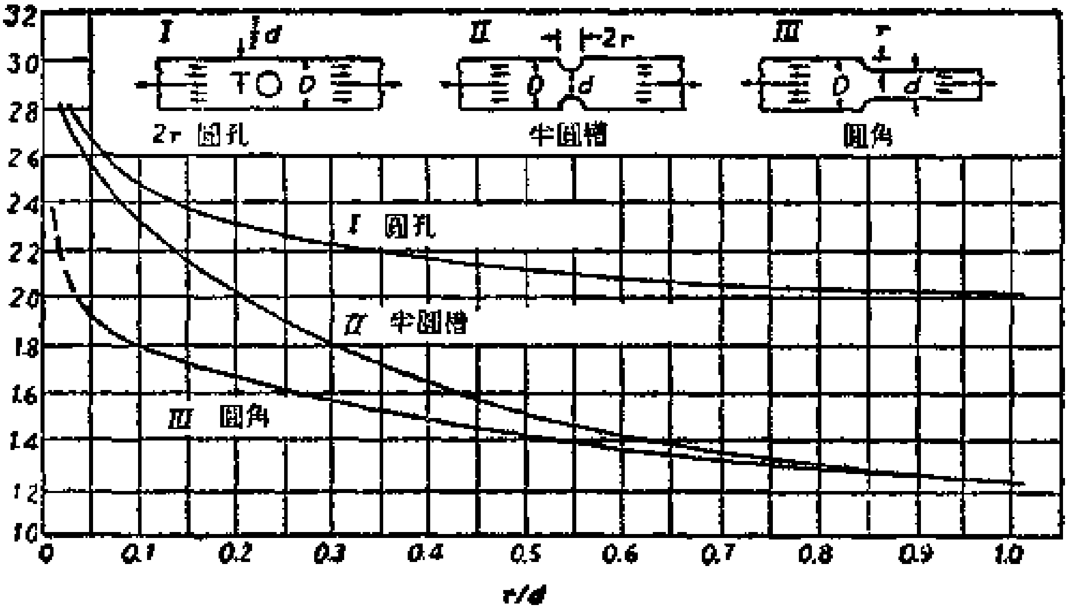


图 180

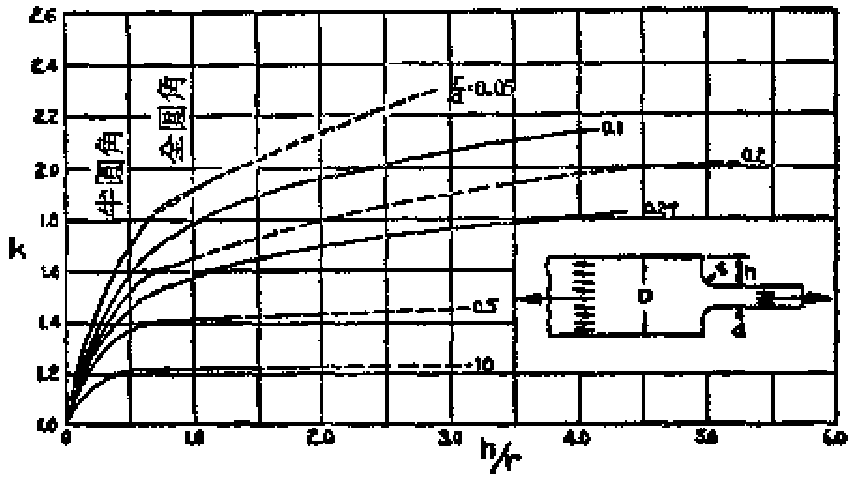


图 181

看出，当 r/d 之值相同时，深槽的应力集中系数較半圓槽的应力集中系数为大。

当板的寬度极大，且具有双曲綫槽时（图 183），可从理論上加以处理[1]。由解知，应力集中系数，卽点 m 和 n 处的最大应力与截面 mn 上的平均拉应力之比，可用下列近似公式表示[2]：

1) H. Neuber. *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 13, p. 439, 1933. 并参看 Neuber 的著作，Kerbspannungslehre, 1937.

2) 在 (b)、(c)和(d)三式中，取了泊桑比等于 0.3。

$$k = \sqrt{0.8\frac{d}{r} + 1.2} - 0.1 \qquad \text{(b)}$$

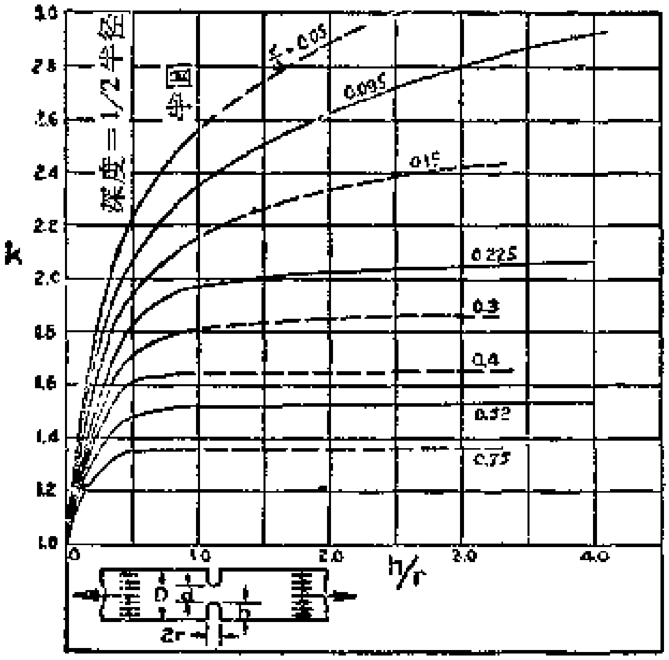


图 182

式中 d 为最小截面的寬度，而 r 为槽底的曲率半径．值得指出，由此公式求得的 k 值与对底部为半圓形（图 182）的深槽（$h/r = 4$）所得的实驗結果很为符合．

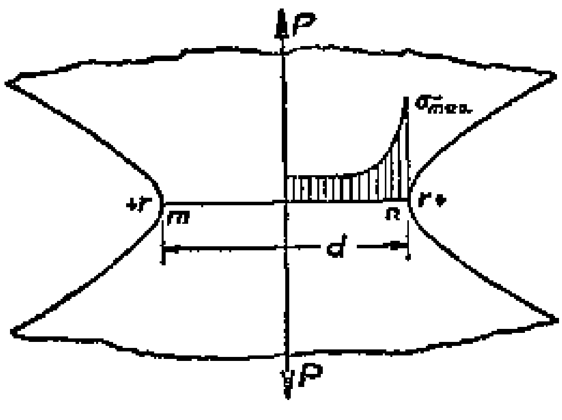


图 183

現在設图 183 表示一承受軸向拉伸，而具有双曲綫深槽的大直径圓柱的軸向截面．最大拉应力仍发生在槽底，应力集中系数之值为[1)]

$$k = \sqrt{0.5\frac{d}{r} + 0.85} + 0.08. \qquad \text{(c)}$$

将此公式与公式(b)作一比較可知，有槽圓柱的应力集中較有槽板的为小．后面将作关于此比較的深入討論（参看 §60）．

1) H. Neuber, *Z. angew. Math. u. Mech., ibid.*

当轴綫处有一椭圆洞的圆柱承受拉伸时(图 179a 可看作此圆柱的軸向截面),最大拉应力发生在点 m 处. 其值可由下列近似公式求得·

$$\sigma_{max} = \sigma\left(\sqrt{0.8\frac{a}{r} + 0.05} + 0.78\right), \qquad (d)$$

式中 σ 为作用在圆柱两端的均匀拉应力, 而 r 为椭圆在点 m 处的曲率半径.

图 184 中所示用混凝土制的标准拉伸試样为截面急剧改变的受拉构件的另一例子. 由实验知[1],最大应力发生在点 m 和 n 处, 此应力为截面 mn 上平均应力的 1.75 倍左右.

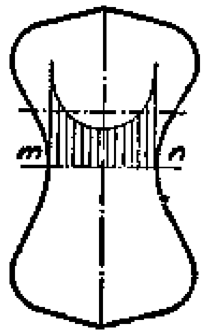


图 184

图 185 表示一在电动机中常用以固接磁极与輪辋的**燕尾接头**. 作用在极上的离心力在截面 mn 上产生很大的拉应力. 这些应力的分布示于图 185b[2]中. 由于截面的突然变化, 在点 m 和 n 处发生高度的应力集中. 拉应力 σ_x 同时引起横向应力 σ_y. 这些应力沿 mn 的分布示于图 185b 中. σ_x 和 σ_y 沿垂直对称面的分布则示于图185a 中.

上面关于应力分布的所有結論, 均假設了最大应力是在材料的比例极限以內. 超过比例极限时, 应力分布就与材料的**延性**有关. **延性材料**在超过屈服点时可以承受很大的伸長, 而应力增加不大. 由于有此事实,因此随着材料的伸長,超过屈服点后的应力分布变得愈来愈均匀. 这說明了为什么对于延性材料而言, 当带槽試件作靜力試驗时,孔和凹槽并不降低**极限强度**. 此外,在試驗有深槽的軟鋼試样时,极限強度通常有所提高,因为槽阻止了試样在断裂截面处頸縮之故(参看第 369 頁).

可是对于如玻璃等**脆性材料**, 高度的应力集中一直保留到破

1) 参看 E. G. Coker, *Proc. Congr. Internat. Assoc. Testing Materials*, New York, 1913.

2) 参看 E. G. Coker 的論文, *J. Franklin Inst.*, vol. 199, p. 289, 1925. 在机器設計中也常用到的T形头曾由 M. Hetényi 作了試驗, *J. Appl. Mech.*, vol. 6, p. 151, 1939.

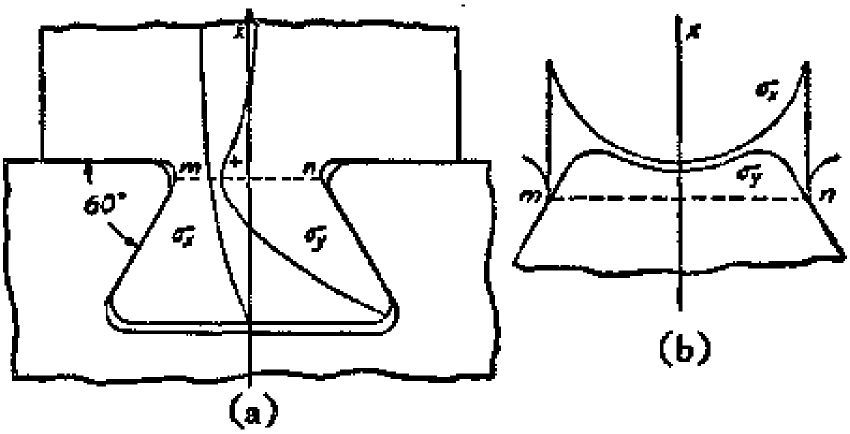


图 185

裂时为止．这引起一很大的削弱作用，此可由脆性材料制成的任何带槽杆件极限強度的降低来加以証明．值得指出，虽然刮痕底部的应力集中必定很高，但在玻璃試样表面上极細的刮痕并不引起削弱作用[1]．解释此現象时，可以認为普通玻璃在其自然状态下具有許多內在的显微裂縫，表面上的微小附加括痕不致改变試样的強度．

因此，由上面的討論知，在設計中是否应用凹槽和凹角是一个需要判断的問題．对于如結构鋼等延性材料，如无交变应力，則高度的应力集中并不危险，例如，在图185所示的燕尾接头中，应力往往很高，以致在 m 和 n 处发生屈服，但此屈服并不認为有危险，因为此結构承受靜力作用．对于脆性材料，在应力集中之处有一很大的削弱作用，必須消除这种所在或加大圓角以降低应力集中．

在承受反复应力的构件中，总是要考虑应力集中的作用的，因为即使是延性材料，在这种所在也很易产生进展性裂縫（参看§87）．

§58. 扭轉中的应力集中． 在討論变截面杆的扭轉时（参看§46和§47）曾指出，截面边綫上的凹角或其他的尖銳不平都会引起高度的应力集中．縱向孔也起同样的作用．

1) 此現象曾由 A. A. Griffith 作了研究，*Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 221. p. 163, 1920. 并参看 I. N. Sneddon 的論文，*Proc. Roy. Soc.* (London), *A*. vol. 187, p. 229, 1946.

我們来研究受扭圓軸上有一**小圓孔**的情形[1](图186)作为第一个例子．在討論此問題时，运用**流体动力比拟**非常有效[2]．等截面杆的扭轉問題在数学上与**无摩擦流体**在一截面与杆相同的柱形壳內的等角速度运动完全一样．在任一点上的流体速度代表杆受扭时其截面相应点上的剪应力．圓截面軸上小孔的作用与流体动力模型的液流中同样大小的靜止实心圓柱的作用类似．这一圓柱使其附近的流体速度大大改变．前后各点的速度均变为零，而側面的点 m 和 n 处的速度則提高了一倍．因此，这样的一个孔使其所在的这段軸中的最大应力提高了一倍．表面上与軸长平行的**小半圓槽**(图186)也起同样的作用．点 m 附近的剪应力为所算得的軸表面上离槽很远之点的剪应力的两倍左右．

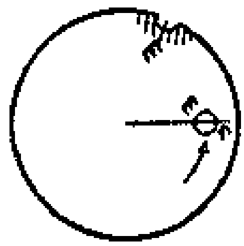


图 186

上述流体动力比拟說明了**椭圓截面孔**或**半椭圓截面槽**的作用．如果椭圓的一个主軸 a 处于径向，而另一主軸为 b，則在 a 軸两端的孔边上应力按比例 $[1+(a/b)]:1$ 增大，因此，这时产生的最大应力与比值 a/b 的大小有关．椭圓孔对应力的影响在椭圓的长軸处于径向时較之长軸处于周向时为大．这說明了为什么径向裂縫对軸的強度起削弱作用．上面的討論也可应用于軸表面上有一平行于軸綫的半椭圓槽的情形．

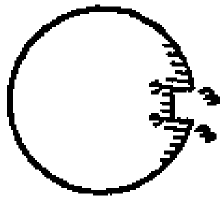


图 187

对于尖角**鍵槽**(图 187)，由流体动力比拟知，在向外突出的角上(点 m-m 处)流体的速度为零；因此在这些角上相应扭轉問題中的剪应力等于零．在点 n-n 处卽凹角的頂点处，流体的速度在理論上为无限大．在相应的扭轉問題中，点 n-n 处的剪应力也是无限大，这意味着卽使有一很小的轉

1) 此情形曾由 J. Larmour 作了研究，*Phil. Mag.*, vol. 33, p. 76, 1892.

2) 此比拟法是由 Lord Kelvin 和 Tait 所推証出来的，*Natural Philosophy*, vol. 2; J. Boussinesq, *J. math.* (Liouville), vol. 16, 1871; 及 A. G. Greenhill 的"Hydromechanics"这一篇，Encyclopaedia Britannica, 9th Ed. 关于此比拟法在实验中的应用，可参看 J. P. Den Hartog 和 J. G. McGivern 的论文，*J. Appl. Mech.*, vol. 2, p. 46, 1935.

矩，也会在这些点上产生永久变形。将角 n-n 圓化可使应力集中降低。

对一外径为 10 吋、内径为 5.8 吋、鍵槽深度为 1 吋、鍵槽寬度为 2.5 吋和鍵槽角上的圓角半径为 r 的空心軸所作的实驗[1] 表明，圓角上的最大应力等于无鍵槽的类似軸中的最大应力乘以表19所列的系数 k。这說明了，加大角 n 处的圓角半径可使应力集中大大降低。

表 19

r (吋)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
k	5.4	3.4	2.7	2.3	2.1	2.0	1.9

軸中由孔和槽所引起的应力集中造成的削弱作用与材料是否为延性有关，在 §57 中得出的結論这里也能应用。

如果管件具有凹角，在这些角上就有应力集中，最大应力的大小与角的半径有关。此最大应力的近似值可由薄膜比拟法求得。

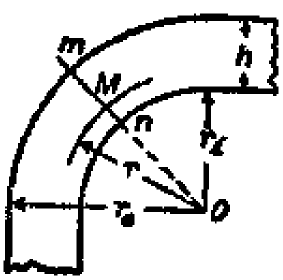


图 188

我們来研究等厚度管的簡单情形，并假設角以中心为 O 而半径为 r_i 和 r_a 的两同心圓（图 188）为界。在截面 mn 处，薄膜表面可假設[2]为繞过 O 点垂直于图平面的軸綫的迴轉面。我們已經知道，薄膜表面在任一点 M 处的斜率其数值等于剪应力 τ。按照图 189——此图表示一通过 mn 的經綫截面——薄膜在此点对于經綫（取經綫的微段 ds 等于 dr）的主曲率为

$$\frac{1}{R_1}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\tau}{dr},$$

对于垂直于經綫的截面则为

$$\frac{1}{R_2}=\frac{\tau}{r}.$$

1) 参看集体著作，The Mechanical Properties of Fluids, New York. D. Van Nostrand Company, Inc., p. 245, 1924.

2) 如果 r_i 比起 r_a 来并不很小时，此假設可令人滿意。

于是由式(122)得薄膜的平衡方程式为

$$\frac{d\tau}{dr}+\frac{\tau}{r}=\frac{p}{s},$$

或运用第 206 頁式(a)得

$$\frac{d\tau}{dr}+\frac{\tau}{r}=2G\theta. \qquad (a)$$

以 τ_0 表示由式(226)求得的平均剪应力。于是由式(227)得

$$\frac{d\tau}{dr}+\frac{\tau}{r}=2G\theta=\frac{\tau_0 s}{A}, \qquad (b)$$

式中 s 为管件截面中心綫的长度. 式(b)的通解为

$$\tau=\frac{C}{r}+\frac{\tau_0 sr}{2A}. \qquad (c)$$

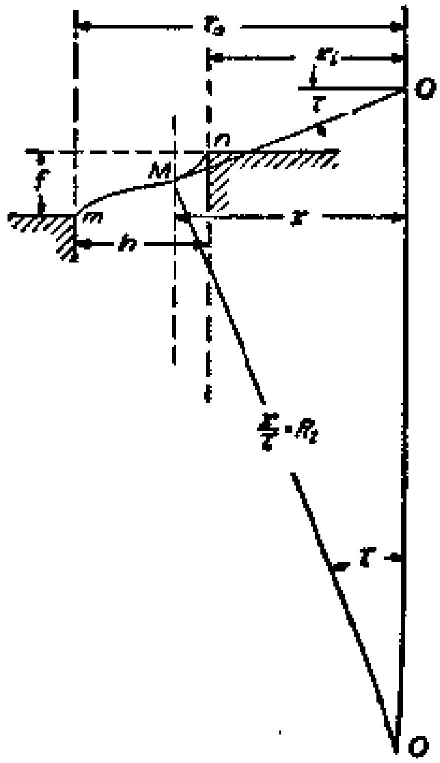


图 189

积分常数 C 可由下列条件[1]求得：

$$\int_{r_i}^{r_a}\tau dr=\tau_0 h.$$

将式(c)的 τ 代入，得

$$C=\tau_0 h\frac{1-\frac{s}{4A}(r_a+r_i)}{\ln\frac{r_a}{r_i}},$$

由式(c)得

$$\tau=\frac{\tau_0 h}{r}\cdot\frac{1-\frac{s}{4A}(r_a+r_i)}{\ln\frac{r_a}{r_i}}+\frac{\tau_0 sr}{2A}. \qquad (266)$$

在凹角处，$r=r_i$，将此値代入上面的方程式，我們就可算得这些角上的应力集中[2].

1) 此条件由流体动力比拟(第 269 頁)得出. 如果流体在一截面形状如管件的管道中流动时，通过管道各截面的流量必定保持不变.

2) 这一方程式是由 C. Weber 給出的，*loc. cit.*, p. 236.

以外尺寸为 4×4 吋、壁厚 $h = 0.4$ 吋、圆角半径 $r_i = 0.2$ 吋、$r_a = 0.6$ 吋的方管(图 190)为例. 于是

$$A = 3.6 \times 3.6 - 0.4^2(4 - \pi) = 12.82 \text{ 吋}^2,$$

$$s = 3.6 \times 4 - 0.4(8 - 2\pi) = 14.40 - 0.70 = 13.70 \text{ 吋}.$$

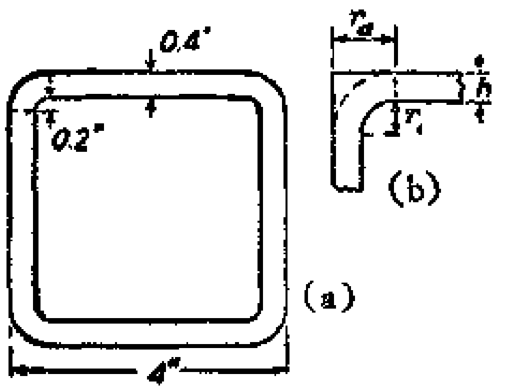


图 190

平均应力 τ_0 可由式(226)求得. 由式(266)得凹角上的应力为

$$\tau = 1.54\tau_0.$$

这时应力集中系数为 1.54. 可以看出,此系数随内半径 r_i 的减小而增大.

式(266)也可用作应力集中的近似計算,只要凹角为圓角(图 190b)即可. 当突出角上的应力很小时,我們可取 $r_a = h + r_i$,如图中虛綫所示.

对于如图 144b 和 144c 所示的輾制型材截面, 最大应力发生在凹角处. 其値可由式(222)或(225)算得的应力与下式所示的应力集中系数相乘而得[1]:

$$k = 1.74 \sqrt[3]{\frac{c}{r}}, \tag{267}$$

式中 c 为凸緣厚度,而 r 为圓角半径. 由較精确的計算所求得的应力集中系数之値如图 191 中的曲綫 AB 所示[2].

§ 59. 变直径圓軸[3]. 如果軸的直径沿軸长緩慢地改变时,最

1) E. Trefftz, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 2, p. 263, 1922. 式(267)是对如图 144b 所示的毗連部分具有相等厚度的角导出的. 对于如图 144c 所示的具有两个不同厚度 c_1 和 c_2 的情形,在式(267)中必須用較大的厚度. 关于此問題的深入討論曾由 H. M. Westergaard 和 R. D. Mindlin 所作, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, p. 509, 1935.

2) 参看 J. H. Huth 的論文, *J. Appl. Mech.*, vol. 17, p. 388, 1950. Huth 的計算結果与 N. S. Waner 和 W. W. Soroka 用导电薄片比拟而得的实驗結果很为符合. 参看 *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 11., p. 19, 1953.

3) 此問題的通解系根据 J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, 1899, 和 A. Föppl, *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch.*, vol. 35, p.

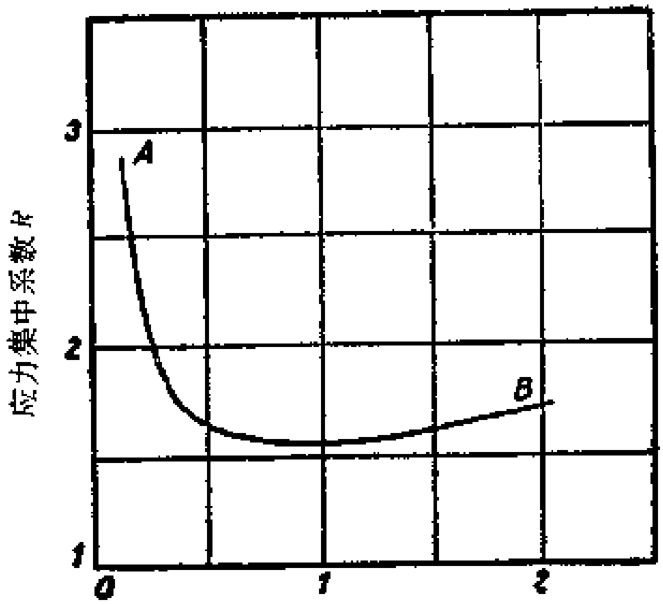


图 191

大应力就可足够精确地用原书上卷第 284 頁对圓柱軸导出的式(152)求得．但是如果直径急剧地改变，如图 192 所示时，則在圓角起点 m-m 处就有高度的应力集中．最大应力的大小取决于比值 ρ/d 和 D/d，其中 ρ 为圓角半径，而 d 和 D 为軸的两圓柱部分的直径．这些很高的局部应力虽然在延性材料受靜載荷时并不危险，但在应力发生波动时，例如在螺旋桨軸和曲軸中，就会起显著的削弱作用．实用中有許多断裂情形可归諸于这一原因．圓角上最大应力的理論計算对于工程实用来說过于复杂[1]，因此在下面几頁中將給出一測量最大应力的实驗方法．此法在扭軸中的应力分布与板中的电流分布之間作了比拟[2]．

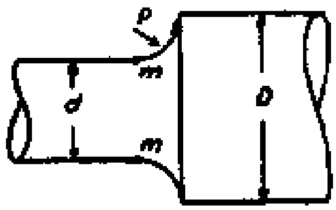


图 192

249, 1905. 图 192 中所示的情形是由 A. Föppl 首先研究的；参看 *Z. Ver. deut. Ing.*, p. 1032, 1906. 关于此課題的文献編在作者和 Goodier 的"Theory of Elasticity", p. 310, 1951.

1) 这种計算是由 F. A. Willers 用一近似积分法所作的；参看 *Z. Math. u. Phys.*, vol. 55, p. 225, 1907. 并参看 R. Sonntag 的学位論文, Munich, 1926.

2) 此比拟法是由 L. S. Jocobsen 所发展的；参看 *Trans. A. S. M. E.*, vol. 47, p. 619, 1926.

我們从一等直径圓軸开始，設想此軸被分成許多微管，而使每管承受总轉矩 M_t 的相等的一份．例如在图 193 中，軸被分成五层，而每层均承受 $\frac{1}{5}M_t$．这些管子可称之为**等力矩管**；而在軸的直径截面内的相应的綫可称之为**等力矩线**．以 ΔM_t 表示每管所受的轉矩，并設各管的厚度均很小．对于所有的管子，单位长度内的扭轉角相同，均为

$$\theta=\frac{\Delta M_t}{GI_p}=\frac{\Delta M_t}{G2\pi r^3h}, \tag{a}$$

式中 r 为管子的平均半径，而 h 为其厚度．由于各管的 ΔM_t 和 θ[1] 相同，因此管厚与平均半径的立方成反比．由式(226)得，一个管子中的平均剪应力为

$$\tau=\frac{\Delta M_t r}{I_p}=\frac{\Delta M_t}{2\pi r^2h}. \tag{b}$$

在图 193 中还示出直径截面内的第二組綫．这些綫均与等力矩綫垂直，可称之为**等角綫**．它們相应于軸上称为**等角面**的截面，取此截面时应使两相邻等角面之間的扭轉角沿軸长不变．此角以 $\Delta\varphi$ 表示．在圓軸中，等角面即等距面．我們可以以 a 表示它們之間的距离．于是在任意半径 r 处的剪应变为

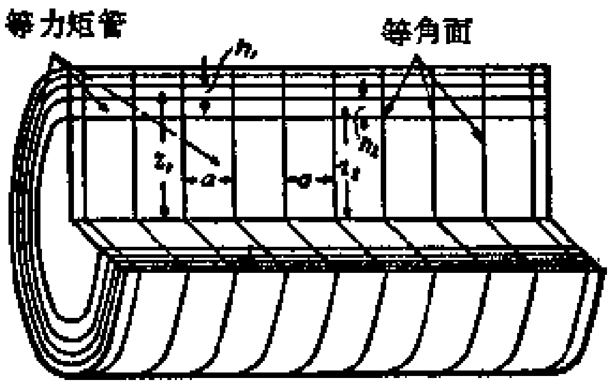


图 193

$$\gamma=\frac{\Delta\varphi r}{a},$$

而相应的应力为

$$\tau=\frac{G\Delta\varphi r}{a}. \tag{c}$$

等力矩綫和等角綫这两組垂直綫将軸的直径截面分成許多微矩

1) θ 为实心軸的扭轉角．

形，如图 193 所示． 这些矩形的大小可以用来比較軸上相应点的剪应力．运用式(b)，并比較半径各为 r_1 和 r_2 处的剪应力 τ_1 和 τ_2，得

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{r_2^2h_2}{r_1^2h_1}. \tag{d}$$

由式(c)得

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{r_1a_2}{r_2a_1}. \tag{e}$$

对于所研究的情形，$a_1=a_2=a$，但后面对于較普遍的情形将运用式(e)． 显然，每一組綫均可用来計算剪应力． 对于某种情形［式(d)］，应力之比决定于等力矩綫間距离之比 h_2/h_1；而对于另一种情形［式(e)］，則它决定于等角綫間距离之比 a_2/a_1．

我們来研究如图 192 所示的变直径軸．在圓角处产生的应力分布的不規則性具有局部性質．在离直径不同的两段軸的接头足够远之处，应力分布实际上与等截面軸的相同，在直径截面內可作出上述两組綫（图 194）．在突变截面附近，应力分布較为复杂，而等力矩綫和等角綫均变成曲綫．由問題的分析知[1]，虽然是曲綫，但这些綫仍相互正交，它們将直径截面分成如黑色面积所示的許多曲綫矩形．如果我們以 h 和 a 作为在各曲綫矩形中部量得的尺寸，則对等直径軸导出的式(d)和(e)仍能适用．于是等力矩綫和等角綫給出了軸中应力分布的一个完整的图象． 例如，研究等力矩綫并运用式(d)，我們看出，应力随等力矩管半径和厚度的減小而增大． 由图 194 显而易見，在圓角上应力最大，此处外等力矩管的厚度 h 最小．研究等角

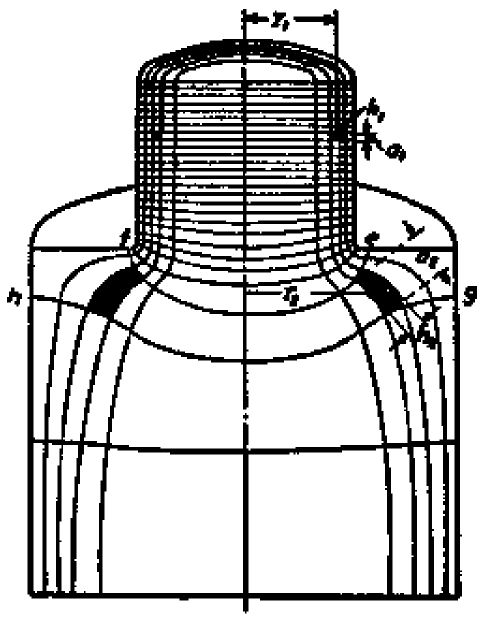


图 194

1) 参看 F. A. Willers 的論文，*loc. cit.*, p. 318.

綫,我們也可以得出同样的結論. 从图中可以看出,在圓角处这些綫之間的距离 a 非常小;因此由式(e)知应力很大. 如果等力矩綫或等角綫为已知时, 我們就可由式(d)或(e)确定圓角上的最大应力与任何其他点上的应力之比.

前面第 273 頁所提到的电比拟提供了測量等角綫間距离 a 的一个方法. 这些距离均在較小直径 d 的軸段表面上測量, 首先在远离突变截面之处測量,然后在圓角处測量. 为了求得圓角上的最大应力,必須将这两距离之比所給出的系数[参看式(e)]去乘用通常公式算出的应力. 在討論电比拟时,我們从等厚度矩形板(图 195)的情形开始. 如使板的两端保持不变的电位差, 则在板的截面上均布的电流将流过此板. 将电流分成許多等份, 我們得到一組等距**流綫**. 有一組**等位綫**垂直于流綫. 对于均質的等截面板,电位将沿电流方向均匀下降,因此等位綫为等距离的鉛直綫. 为

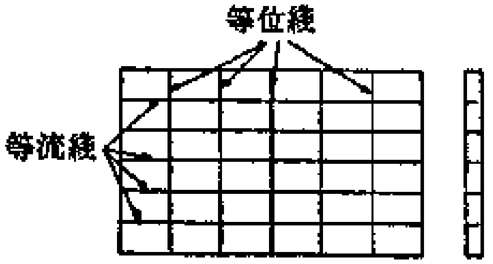


图 195



图 196

了获得与图 193 中类似的两組綫, 使板的厚度随距离 r 的立方而变,如图 196b 所示. 于是流綫間的距离将与 r 的立方成反比[1],而鉛直等位綫間的距离则同前面一样仍保持不变. 这样, 我們可得出与图 193 中相同的一組相互正交的綫. 板边 O-O 相当于軸的軸綫,等位綫相当于等角綫,而流綫则相当于扭轉問題中的等力矩綫. 由研究知[2],对于板有两种不同寬度而其厚度随距离 r 的立方而变(图 197)的情形,也能用此比拟. 这样,就有可能用电比拟法来研究扭軸圓角上的应力集中. 我們在板的两端保持一不变的电

1) 設单位截面积內的电流在截面上均匀分布.

2) 参看 L. S. Jacobsen 的論文, *loc. cit.*, p. 318.

位差，并沿边 mnp 测量电位降. 因此，分别求得了在遥远点 m 处和圆角 n 处的等位线間的距离 a_1 和 a_2. 这些距离之比 a_1/a_2 給出了圆角 n 处的应力集中系数.

实际测量是对 24 吋长、大端宽 6 吋和边 pq 上的最大厚度为

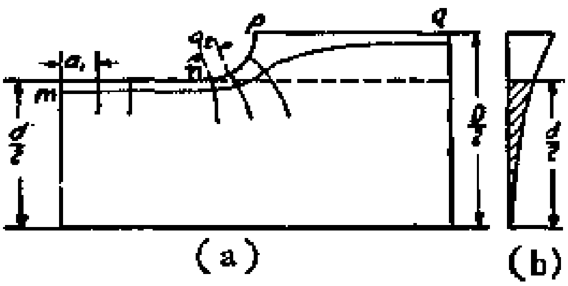


图 197

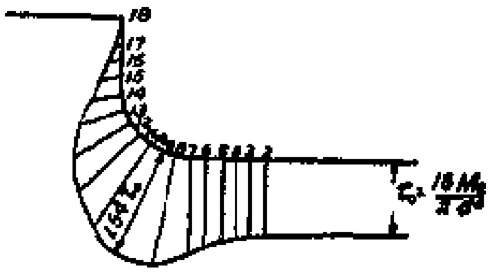


图 198

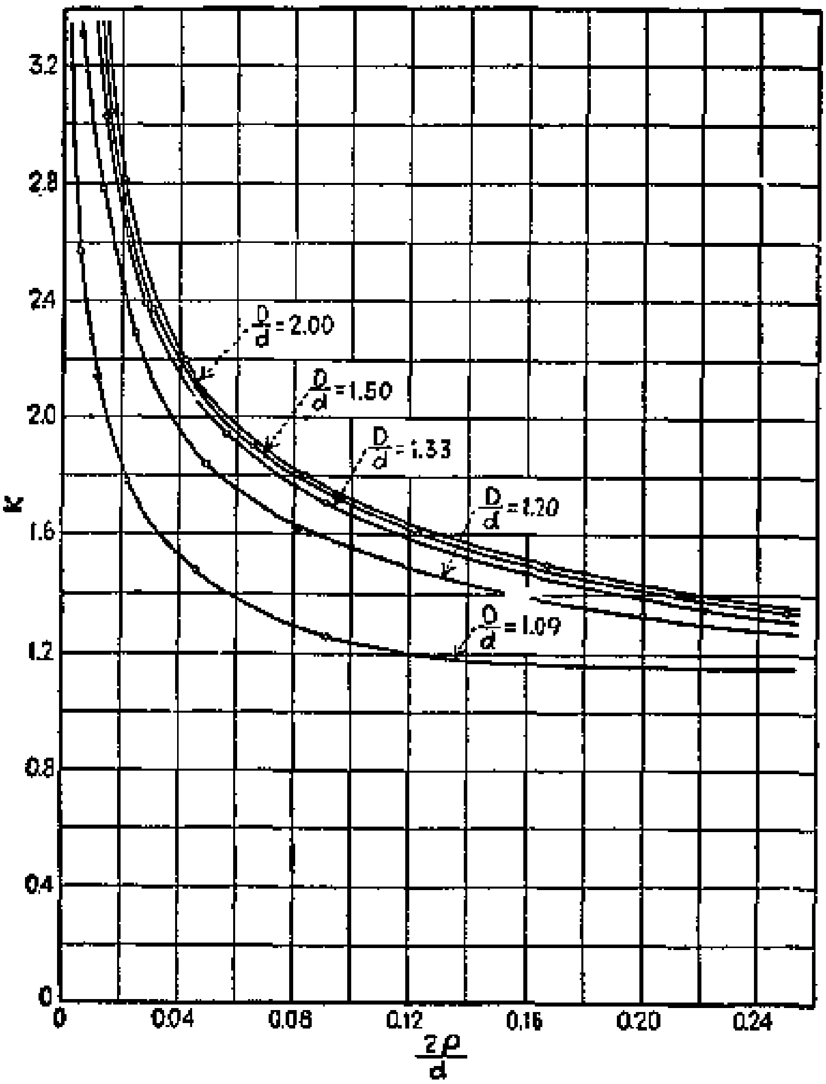


图 199

1 吋的鋼模型所作的．沿模型边 $mnpq$ 的电位降可用一非常灵敏的电流計来探测．电流計的两綫端与固定在一座块中的两个相距 2 毫米的尖針相連接，使針与板接触时，电流計就示出两針尖端之間距离内的电位降．使針沿圓角移动时，就可以求出最大电压梯度的地点，并量出此最大値．此最大値与遙远点 m 处（图 197）的电压梯度之比給出了下式中应力集中系数 k 的大小：

$$\tau_{max} = k\frac{16M_t}{\pi d^3}. \tag{268}$$

图 198 示出了在一个特定情形下的这种試驗結果，每一点处量得的电位降在图中用板边在此点的法綫长度来表示．由此图知，应力集中系数为 1.54．图 199 給出用不同比例的軸求得的这一系数的大小，图中横坐标表示圓角半径与軸的較小半径之比 $2\rho/d$，縱坐标表示各种比值 D/d 下的系数 k.

§ 60. 弯曲中的应力集中． 已导出的稜柱梁弯应力和剪应力公式也常应用于梁为变截面的情形．如果截面的变化并不太快，此为一令人滿意的处置（参看 §9）．

如果截面急剧地变化，在突变截面处应力分布就有很大的扰动．最大应力通常远較由簡单梁公式求得的为大，且可用下列公式表示：

$$\sigma_{max} = k\sigma, \tag{a}$$

式中 σ 为由稜柱梁公式求得的所研究点的应力，而 k 为应力集中系数．只有在少数情形下，此系数才可用弹性理論方程式求得[1]．

当具有双曲綫凹槽的大寬度板（图 183）承受弯曲时，对于其凹槽处的应力分布我們有一精确解．由此解知，当板受作用在中面内的力偶而发生純弯曲时，最大应力发生在点 m 和 n 处．公式 (a) 中的应力集中系数可用下列近似公式表示：

$$k = \sqrt{0.355\frac{d}{r} + 0.85} + 0.08, \tag{b}$$

1) H. Neuber, *Ingenieur-Archiv*, vol. 5, p. 238, 1934 和 vol. 6, p. 133, 1935.

式中 d 为板的最小宽度，而 r 为凹槽底部的曲率半径.

对于有一双曲綫槽的圆軸(图183表示双曲綫槽的軸向截面)，純弯曲时的应力集中系数为

$$k=\frac{3}{4N}\left(\sqrt{\frac{d}{2r}+1}+1\right)\left[\frac{3d}{2r}-(1-2\mu)\sqrt{\frac{d}{2r}+1}+4+\mu\right], \tag{c}$$

式中

$$N=3\left(\frac{d}{2r}+1\right)+(1+4\mu)\sqrt{\frac{d}{2r}+1}+\frac{1+\mu}{1+\sqrt{\frac{d}{2r}+1}}. \tag{d}$$

同前面一样，d 为最小截面的直径，而 r 为槽底的最小曲率半径. 当比值 $d/2r$ 的数值很大时，式(c)可足够精确地用下列近似公式代替：

$$k=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{d}{2r}}. \tag{e}$$

关于式(a)中系数 k 的資料，大多是由光弹性法的实驗[1]来获

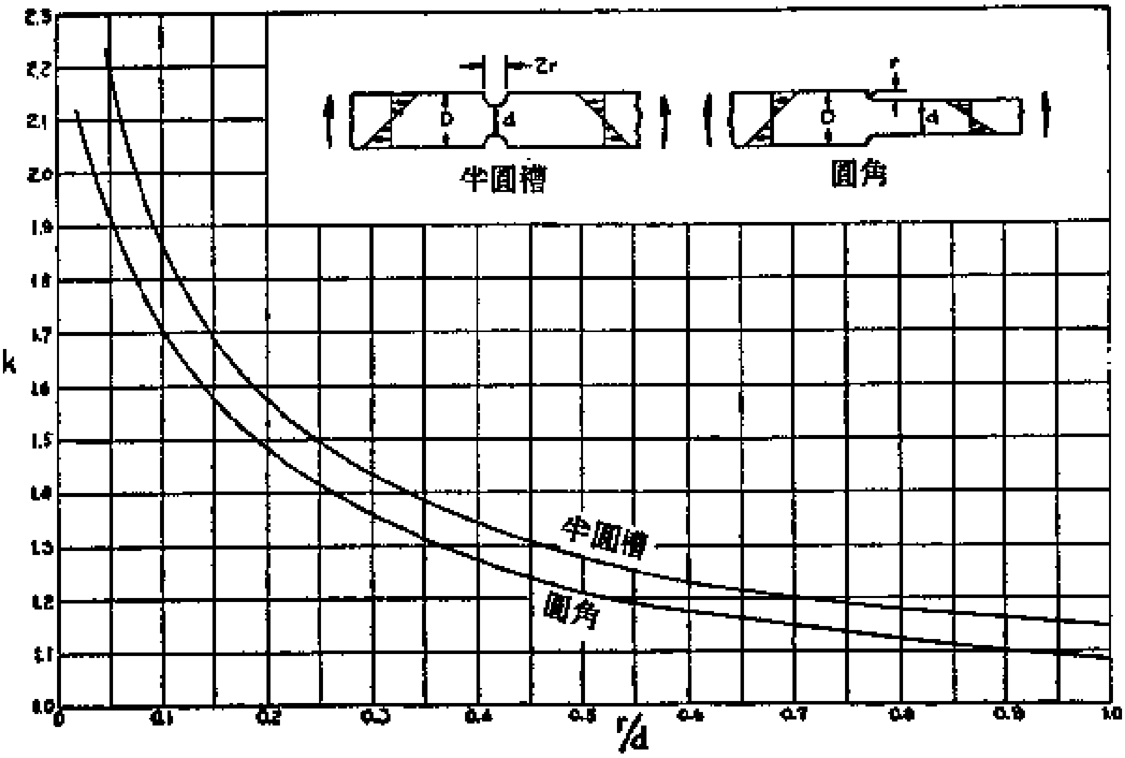


图 200

1) 在下面討論中所給出的曲綫均取自 M. M. Frocht 所著的論文，*loc. cit.*, p. 307. 并参看 M. M. Leven 和 M. M. Frocht 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 19, p. 560, 1952.

得的。 图 200 中的曲綫給出了具有半圓槽的板和圓角形狀为四分之一圓而 $D=d+2r$ 的板在純弯曲时的应力集中系数。在图 201 中給出了具有不同比值 D/d 的圓角的应力集中系数。 在图 202 中給出了純弯曲时变深度槽的应力集中系数。

为了比較板和圓軸在拉伸和弯曲时的应力集中系数，給出了图 203 中的曲綫[1]。曲綫 1 和 2 給出了拉伸时板和圓軸中双曲綫凹

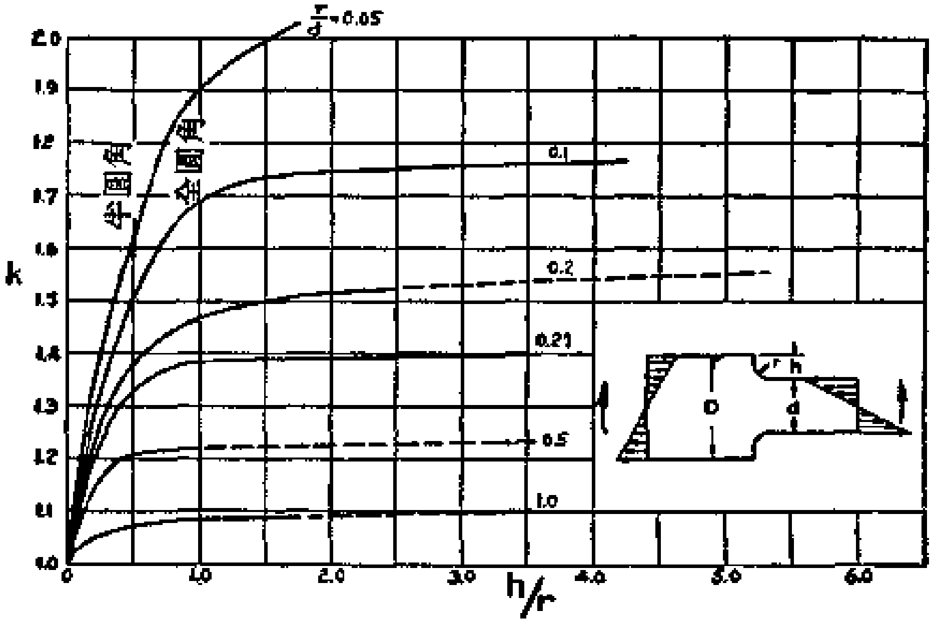


图 201

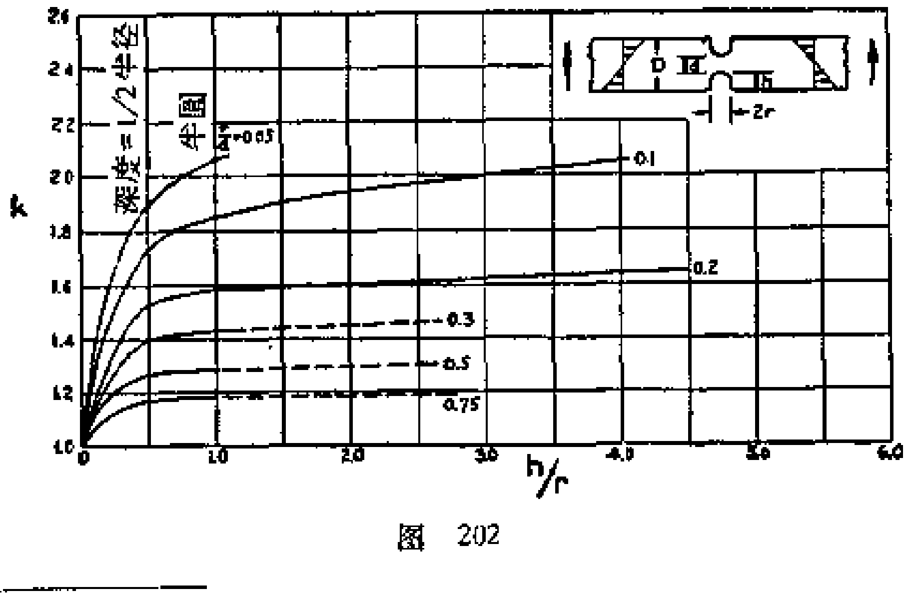
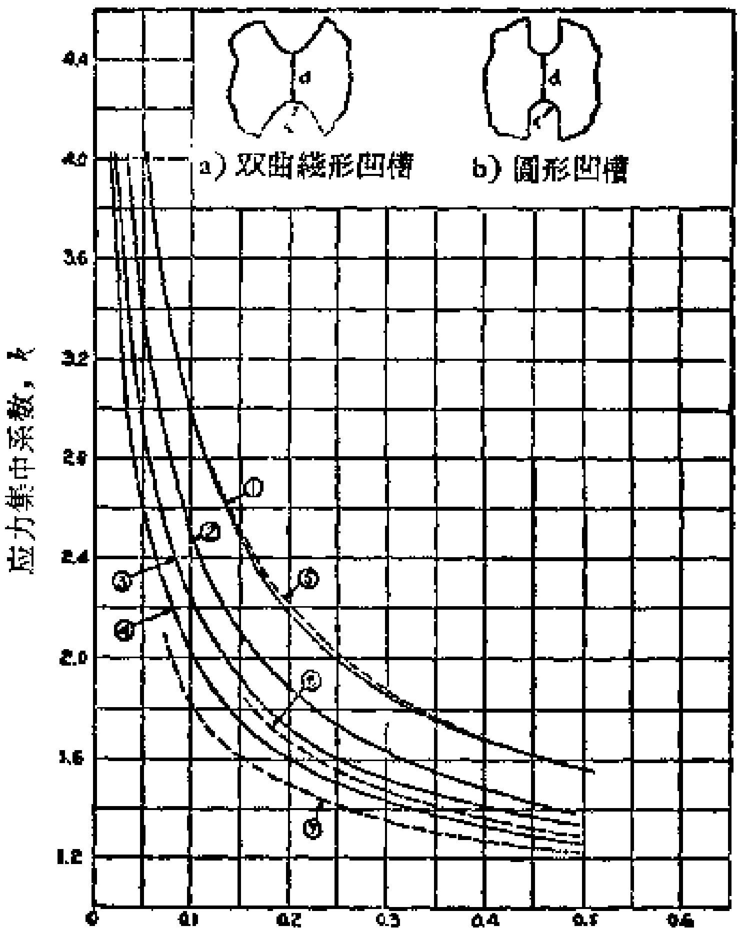


图 202

1) 此图和以后的图均取自 R. E. Peterson 和 A. M. Wahl 的論文，*J. Appl Mech.*, vol. 3, p. 15, 1936.

槽的应力集中系数，此两曲綫系根据第 265—266 頁式(b)和(c)算得. 曲綫 3 和 4 給出了純弯曲时凹槽的应力集中系数，此两曲綫系根据第 278—279 頁式(b)和(c)算得. 从这些曲綫可以看出，板的应力集中系数較圓軸的为大，在拉伸时其差异更为显著. 在純弯曲时——这在实际上較为重要——两者之差异很小，对于实用尺寸



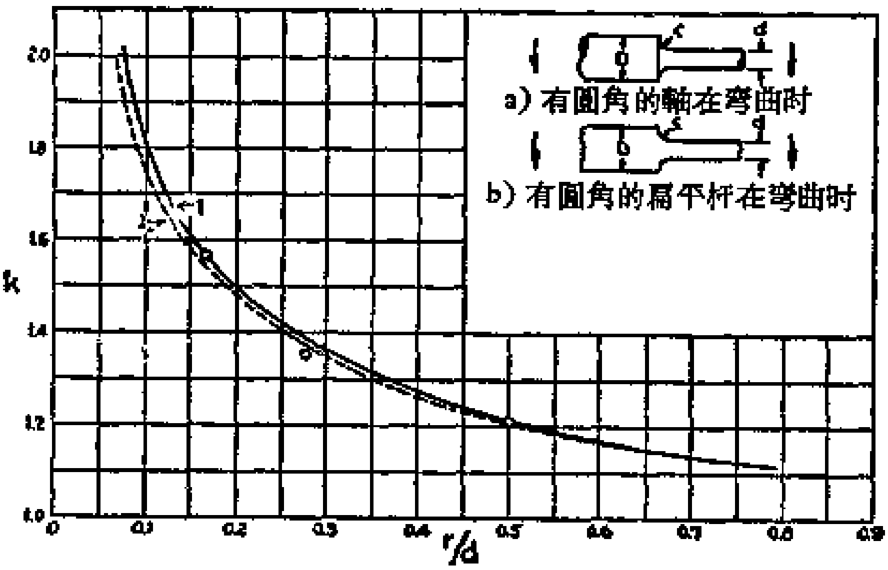
比值 $\frac{r}{d}=\frac{\text{凹槽或圓角的最小半径}}{\text{最小截面的寬度或直径}}$

①鉋制的凹槽，双曲綫形，(a)拉伸时
②車制的凹槽，双曲綫形，(a)拉伸时
③鉋制的凹槽，双曲綫形，(a)弯曲时
④車制的凹槽，双曲綫形，(a)弯曲时
⑤鉋制的凹槽，圓形，(b)拉伸时，光弹性試驗
⑤鉋制的凹槽，圓形，(b)弯曲时，光弹性試驗
⑤鉋制的圓角，弯曲时(情形 b)，$D/d=2$，光弹性試驗
——計算曲綫，NEUBER
——实驗曲綫，FROCHT

图 203

的凹槽为 6—8%左右. 图 203 中的虛綫曲綫 5 和 6 系根据图 182 和 202 中相应于半圓底深槽的曲綫将其外推至較大的比值 h/r 而求得. 可以看出,当比值 r/d 在 0.15 与 0.50 之間时, 曲綫 5 和 6 与双曲綫凹槽的曲綫 1 和 3 相当符合. 这說明了对于深槽而言,应力集中系数的大小主要决定于比值 r/d 的大小, 而与凹槽的形状无关.

虛綫曲綫 7 系根据图 201 中的曲綫求得,它表示比值 $D/d=2$ 的板在純弯曲时圓角上的应力集中系数. 可以看出,当比值 r/d 相同时,圓角的应力集中系数較深槽的(曲綫 4 和 6)稍小.



○ 应变測量(a), $D/d=1.5$
——光弹性試驗, (b), $D/d=2$, FROCHT
----光弹性試驗, (b), $D/d=1.5$, FROCHT

图 204

为了求得圓軸中圓角的应力集中系数,西屋研究所 (Westinghouse Research Laboratories) 曾对直徑比 $D/d=1.5$ 的巨大鋼軸作了直接試驗[1]. 图 204 中的小圓圈表示直接測量圓角上的应变而得的应力集中系数之值. 为了比較起見, 在同图中用曲綫 1 和 2 表示[2]对 $D/d=2$ 和 $D/d=1.5$ 的扁平模型所作的光弹性实

1) *Ibid.*

2) 这些曲綫系根据图 201 中所示的数据作出.

論的結果．根据这些实驗可以作出非常重要的結論、即圓軸的应力集中系数与用光弹性法求得的扁平試样的应力集中系数之值非常符合．

§61. 利用模型研究应力集中． 前已指出，只有在如圓孔或椭圓孔和双曲綫凹槽等少数最簡单的情形下，突变截面处的应力分布才有完全的理論解．关于应力集中的資料大多是由实驗得来的．因此，有时可用灵敏的伸长計来测量突变截面处的应变．例如，曾經用此方法探測了拉伸試样上凹槽处的应力集中[1]．在运用此法时，由于在所研究之处应力分布具有高度的局部性，因而发生了困难．为了获得令人满意的結果，需要用一非常小的标距长度、

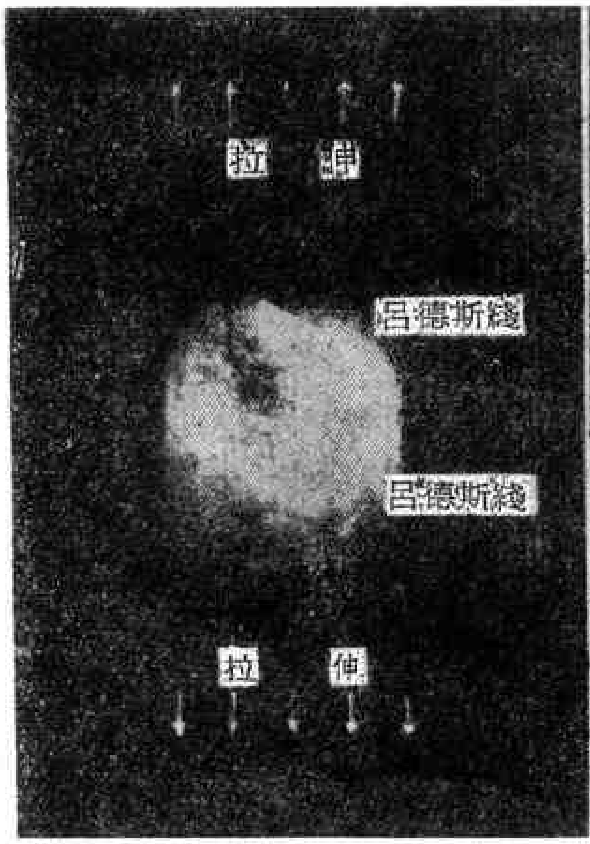


图 205



图 206

1) 参看 E. Preuss, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 56, p. 1349, 1912; vol. 57, p. 664, 1913; 和 *Forschungsarb.*, No. 134, 1913. 并参看 Th. Wyss, *Proc. Internat. Congr. Appl. Mech.*, Delft, p. 354, 1924, 和他的学位論文, Zürich, 1923. 并参看 F. Rötscher 和 J. Crumbiegel, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 76, p. 508, 1932.

因此需要大大地放大[1].

如在試样或結构的模型上施加載荷，直到在最大应力处发生屈服时为止，就可粗略地估算应力集中系数. 在表面經抛光的軟鋼試样中可以清楚地看出这种屈服. 图 205 为軟鋼带中的屈服綫照片. 这些屈服綫[称为呂德斯(Lueders)綫，参看第 356 頁]首先出現在最大应力之处. 这些綫的分布給出了关于突变处的应力的宝貴資料[2].

图 206 示出了比值 $r/d = 0.157$ 和 $D/d = 2.5$ 的軟鋼模型(图 181)圓角上的呂德斯綫. 发生在圓角处由先前的光弹性实驗得知的最大应力集中之处的綫是可以料到的. 由图 181 中的曲綫所給出的应力集中系数为 1.85. 于是，当模型較狹部分的平均拉应力仅为使同样材料的稜柱杆(图 205)中产生呂德斯綫时所需的 1/1.85 时，在最薄弱之处就会发生屈服. 由实驗知，使圓角处发生屈服时所需的載荷为稜柱杆的 1/1.8.

图 207 表示軟鋼带中圓孔边上的呂德斯綫. 这些綫再次准确地表出了最大应力集中之处. 板发生屈服时，其端截面上的平均应力为使稜柱杆中发生屈服时所需的 1/2.3.

在前面两个例子中，当平均应力較眞实应力集中系数所表示的为大时，在最大应力之处发生屈服. 这可以解释如下：承受过度应力的材料的微小区域被应力不超过比例极限的部分所包围. 这阻止了图 205 所示的沿着与图面垂直并与拉伸方向成 45° 傾角的面滑移. 对于图 206 和图 207 所示的情形，发生在抛光板面上的呂德斯綫为垂直于最大拉应力的細綫. 这說明了，在这些情形下，滑移沿着通过这些綫并与板平面成 45° 傾角的平面进行. 这时，

---

1) 为了增加突变截面处的变形，在某些情形下，曾用了橡皮模型；参看 A. Stodola, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 51, p. 1272, 1907; Hummel, *Schweiz. Bauzeitung*, p. 143, 1924; L. Chitty 和 A. J. S. Pippard, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 156, p. 518, 1936. 关于測量应变的改良方法，可参看 James A. Miller 的論文，*Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 10, p. 29, 1952.

2) 参看 M. A. Voropaeff 的論文，*Bull. Polytech. Inst.* (Kiev), 1910, 和作者的論文，*Proc. Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, p. 419, 1926.

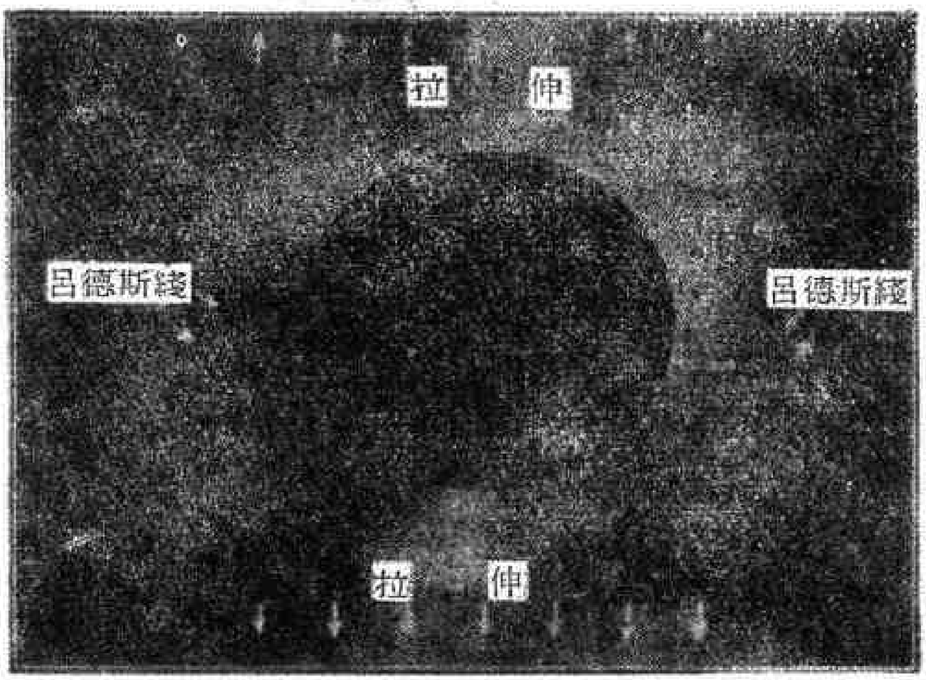


图 207

板的厚度为一重要因素. 为了使滑移面完全位于承受很大过度应力的材料的区域内,此厚度必須远較孔或圓角的半径为小. 发生在最大应力处的滑移面必定通过应力較小的区域这一事实解释了[1]呂德斯綫所以出現迟緩的原因. 对于上述的圓孔,板宽为 6 吋和孔径为 1 吋,而板厚则仅为 1/8 吋. 将厚度与孔径为同級的模型作試驗时, 不可能看出应力集中对产生呂德斯綫的載荷有任何重大的影响. 呂德斯綫所以迟緩的另一原因为, 在可以看出呂德斯綫之前,可能已发生了一些永久变形.

用呂德斯綫来检验結构的薄弱点并不局限于任何特定型式的問題,它所以較下节所述的光弹性法优越,在于它可应用于三維問題. 为了能在粗糙的表面上显示出金属的屈服, 在表面上复以一层**脆性漆**或应力层的这种方法,在用于探測鍋炉頂[2]和組合式受压构件[3]中的应力时已奏成效. 如在試驗后将試样和模型切开,并对

1) 这一解释是由 L. H. Donnell 提供給作者的.

2) 参看 F. Koerber 和 E. Siebel 的論文, *Mitteil. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch.* (Düsseldorf), vol. 8, p. 63, 1926, 和 vol. 9, p. 13, 1927.

3) R. S. Johnston, *Iron and Steel Inst. J.*, vol. 112, p. 341, 1925. 并参看 William F. Stokey 的論文, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 10_1, p. 179, 1952. Dietrich 和 Lehr 曾应用此法来探測机器零件中的应力, *Z. Ver.*

破切的表面使用一种特殊的蝕鏤法，就可以显露出已經屈服的內部区域，因此获得了关于金属在应力集中处流动的資料[1]。

§ 62. **测量应力的光弹性法**. 有許多应力分析間題其中变形基本上与一平面平行．这种間題称为**二維間題**．例如，狹长矩形截面梁的弯曲，大梁、拱和輪齿的弯曲，或更普遍地說，任意形状的等厚度板受板平面內的力或力偶的作用而发生的弯曲等等．它們的形状可能使应力分布极难用分析法确定．对于这种情形，**光弹性**法已被証明非常有效．此法所用的模型是由玻璃、賽璐珞或电木之类的各向同性透明材料制成的板上切出的．众所周知，在应力的作用下，这些材料变成**双折射**材料；如使一束**偏振光**通过一受力的透明模型，就可得到一彩色相片，从而可得出应力分布[2]。

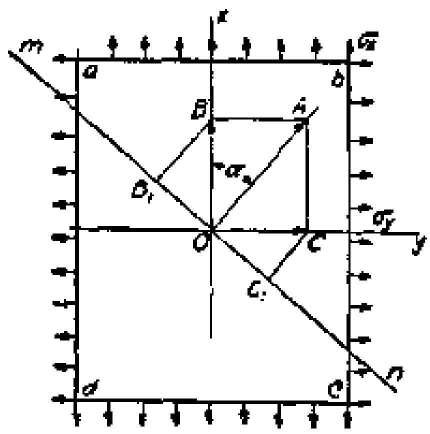


图 208

deut. Ing., vol. 76, 1932. 并参看 H. Kayser, *Bautechnik*, 1936; A. V. de Forest 和 Grreer Ellis, *J. Aeronaut., Sci.*, vol. 7, p. 205, 1940; 和 M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, p. 636, 1950.

1) 参看 A. Fry 的論文, *Kruppsche Monatsh.*, 1921年7月; 及 *Stahl u. Eisen*, 1921.

2) 由于受力而引起双折射的現象是由 D. Brewster 所发現的, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), 1816. 此現象由 F. E. Neumann 和 J. C. Maxwell 作了探入研究. 对于前者参看 *Berlin Abh.*, 1841, 对于后者参看 *Trans. Roy. Soc.* (Edinburgh), vol. 20, 1853 和 *Scientific Papers*, vol. 1, p. 30. 应用此現象来解工程間題是由 C. Wilson 倡議的, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32, 1891, 并由 A. Mesnager 和 E. G. Coker 作了进一步发展, 对于前者参看 *Ann. ponts et chaussées*, 1901 和 1913; 对于后者参看 *General Electric Co. Mag.*, 1920, 和 *J. Franklin Inst.*, 1925. 关于光弹性法的进一步发展可参看 Henry Favre 的論文, *Schweiz. Bauzeitung*, vol. 20, p. 291, 1927; 并参看他的学位論文: Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures, Paris, 1929. 运用单色光, 又称条紋法, 是由 Z. Tuzi 所提出的, Inst. Phys. Chem Research (Tokyo), vol. 8, p. 247, 1928. 在 E. G. Coker 和 L. N. G. Filon 所著的"Photo-Elasticity" (1931) 一书中以及 M. M. Frocht 所著的"Photo-Elasticity" (1941) 一书中, 对此課題有非常完备的討論. 用光弹性法测量应力的精确度在 M. M. Frocht, R. Guernsey 和 D. Landsberg 的論文中有討論, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 11_1, p. 105, 1953.

在图 208 中，$abcd$ 表示一透明的等厚度板，而 O 表示垂直于板的一束偏振光与板的交点. 設 OA 表示光的振动平面，而长度 $\overline{OA}=a$ 表示此振动的振幅. 如将振动看作簡諧振动(单色光)，則位移可用下式表示：

$$s=a\cos pt, \tag{a}$$

式中 p 与振动频率成正比，振动频率决定于光色.

現在設想有大小不同的两应力 σ_x 和 σ_y 作用在板边上. 由于有应力差，板在两垂直方向的光学性质也就不同. 以 v_x 和 v_y 各表示平面 Ox 和 Oy 內的光速. 平面 OA 內的簡单振动可分解为平面 Ox 和 Oy 內振幅各为 $\overline{OB}=a\cos\alpha$ 和 $\overline{OC}=a\sin\alpha$ 的两个分量，而相应的位移各为

$$x=a\cos\alpha\cos pt;\quad y=a\sin\alpha\cos pt. \tag{b}$$

如 h 为板厚，则两个分振动通过板所需的时間間隔为

$$t_1=\frac{h}{v_x}\ \text{和}\ t_2=\frac{h}{v_y}, \tag{c}$$

振动[式(b)]通过板以后可用下式表示：

$$x_1=a\cos\alpha\cos p(t-t_1);\quad y_1=a\sin\alpha\cos p(t-t_2). \tag{d}$$

由于有速度差，因此这些分量具有相差 $p(t_2-t_1)$. 由实験知，光速差与应力差成正比；因此

$$t_2-t_1=\frac{h}{v_y}-\frac{h}{v_x}=\frac{h(v_x-v_y)}{v_xv_y}$$
$$\approx\frac{h(v_x-v_y)}{v^2}=k(\sigma_x-\sigma_y), \tag{e}$$

式中 v 为当应力为零时的光速，而 k 为决定于板材料物理性質的数字系数.

我們看出，两个主应力之差可由測量两个振动的相差而求得. 使它們在同一平面內发生干涉就可以做到这一点. 为此，将一尼科耳(Nicol)稜鏡(称为**分析器**)放在板后，其位置使振动只能在与平面 OA 相垂直的平面 mn 內通过. 通过稜鏡的振动 (d) 的分量具有振幅 $\overline{OB_1}=\overline{OB}\sin\alpha=(a/2)\sin 2\alpha$ 和 $\overline{OC_1}=\overline{OC}\cos\alpha=(a/2)\sin 2\alpha$. 因此在平面 mn 內的合成振动为

$$\frac{a}{2}\sin 2\alpha\cos p(t-t_1)-\frac{a}{2}\sin 2\alpha\cos p(t-t_2)=$$

$$=\left(a\sin 2\alpha\sin p\frac{t_1-t_2}{2}\right)\sin p\left(t-\frac{t_1+t_2}{2}\right). \qquad (f)$$

此为一簡諧振动,其振幅与 $\sin p[(t_1-t_2)/2]$ 成正比；因此光的強度为相差 $p(t_1-t_2)$的函数. 如应力 σ_x 与 σ_y 相等,则 t_1 与 t_2 也相等,而合成振动[(f)式]的振幅为零,我們得到黑色. 每当应力差使得

$$p\frac{t_1-t_2}{2}=n\pi, \qquad (g)$$

而式中 n 为整数时,也将为黑色. 当应力差使

$$\sin p\frac{t_1-t_2}{2}=\pm 1$$

时,可得光的最大強度.

設想我們有一条受簡单拉伸的透明带, 而不是图 208 中的体元 $abcd$. 逐渐增加拉应力,每当(g)式得到满足时,我們就在屏幕上得到此带的黑色相片. 这样,我們可由实验确定一巳知厚度的給定材料的应力, 此应力相应于試样的两个接續黑色相片間的間隔. 例如,对于一种 1 毫米厚的酚醛电木板, 求得[1]此应力为 1620 磅/吋^2. 因此对于 1/4 吋厚的板,相应的应力将为1620/6.35=255 磅/吋^2. 有了这种資料, 統計逐漸加載于試样时发生的接續黑色影象間的間隔数,我們就可以确定受拉伸的带中的应力.

如我們使用受純弯曲的带,我們就得到如图 209 所示的相片. 平行的黑色条紋表明,在带上离載荷作用点很远的部分,各垂直截面內的应力分布相同. 当两个相邻条紋之間的应力差与簡单拉伸时两个接續黑色影象之間的应力差相同时, 統計条紋数我們就可以确定应力的大小. 在逐漸施加載荷时注意此带, 我們就可以看出黑色条紋数如何随載荷的增加而增加. 新的条紋总是出現在带

1) Z. Tuzi, *Sci. Papers, Inst. Phys. Chem. Research* (Tokyo), vol. 12, p. 247, 1929.

的頂端和底部,并逐漸向中性面移动,因此条紋愈来愈密集.于是,任意点的应力可統計通过此点的条紋数而求得.

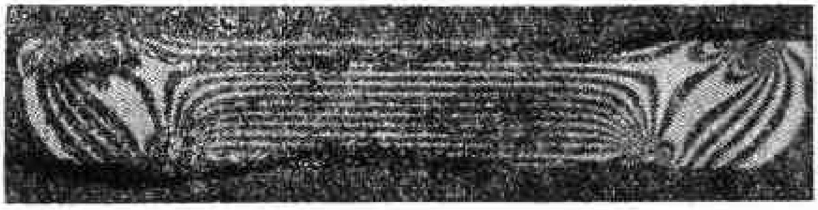


图 209

統計通过一取定点的黑色条紋数的这一方法也可适用于任何的平面应力分布. 正如可从我們前面的討論中看出的,条紋数表示該点的两主应力之差. 为了完全确定該点的应力,尙須求出主应力的方向及其和数.由(f)式知,通过分析器的光的强度与 $\sin 2\alpha$ 成正比,此处 α 为偏振面与一个主应力平面之間的夹角(图 208).如这两个平面相重合,则 $\sin 2\alpha$ 为零,而我們在屏幕上得一黑点.因此在偏振光中試驗受力透明模型时,我們不仅看到前面所討論的黑色条紋,而且还看到把一个主应力方向与偏振面相重合的各点連接起来的黑綫. 使偏振器和分析器这两个尼科耳棱鏡旋轉,并在偏振面处于不同方位时录下受力板的影象上的黑綫,我們就获得一族**等傾綫**,这些等傾綫将主应力方向相同的各点連接了起来. 有了这些綫,我們就可画出在每一点都与主应力軸相切的各綫. 后面这些綫称为主应力**軌綫**(参看原书上卷第 128 頁).这样,板上各点的主应力方向均可由实驗求得.

主应力之和也可以由实驗求得,即測量板厚 h 由于应力 σ_x 和 σ_y 引起的改变量 Δh[1],并运用下列已知关系式求得:

$$\Delta h = \frac{\mu h}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \tag{h}$$

由光弹性試驗求得了两主应力之差,并由式(h)求得了两主应力之和,我們就可很快地算出主应力的大小. 图 210 示出了受純弯曲作用的有圓角的板中获得的条紋.由条紋羣集在圓角处这一事实

1) 此法是由 A. Mesnager 提出的, *loc. cit.*, p. 334. 所需的横向伸长計是由 A. M. Wahl 加以发展并有成效地使用的. 参看 R. E. Peterson 和 A. M. Wahl 的論文, *J. Appl. Mech.*, vol. 2, p. 1, 1935.

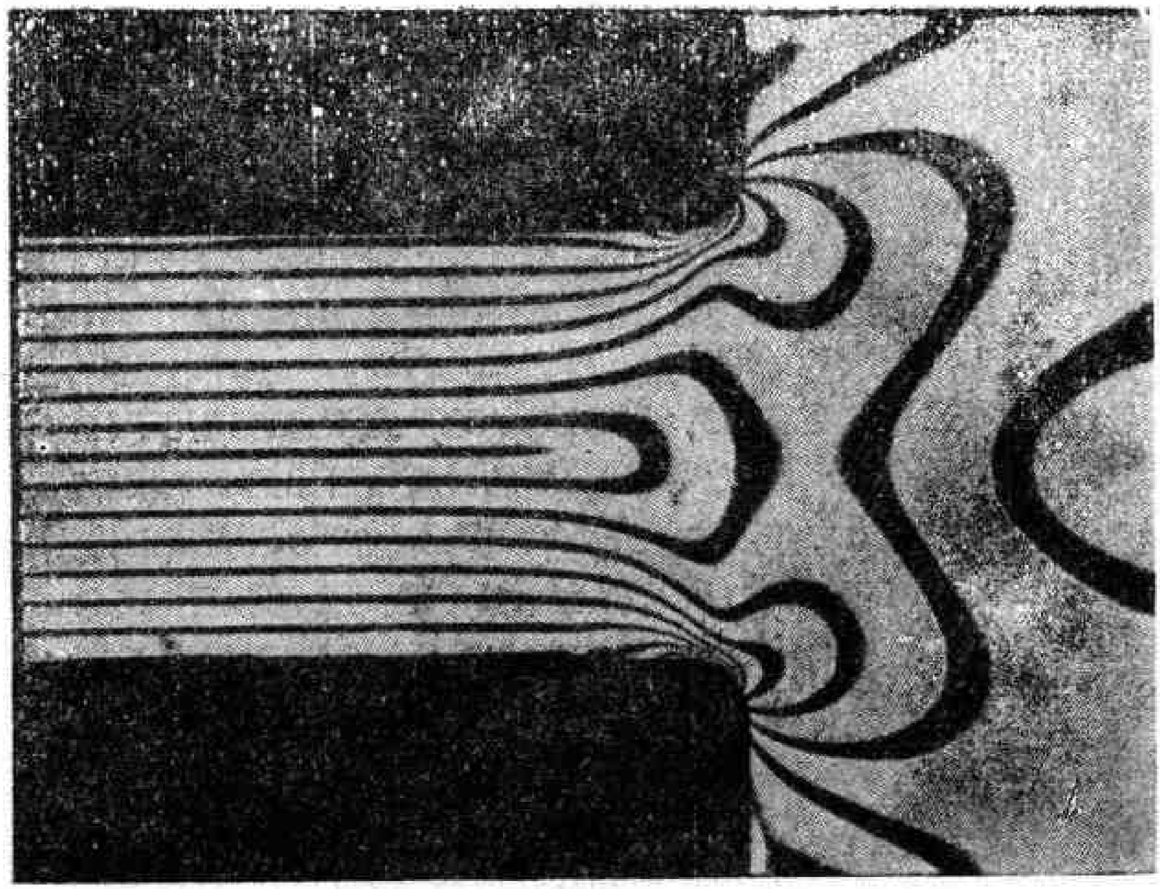


图 210

可以得知，在这些点上发生很显著的应力集中。 在图 211 中示出了受中心载荷的两支点梁的条紋。

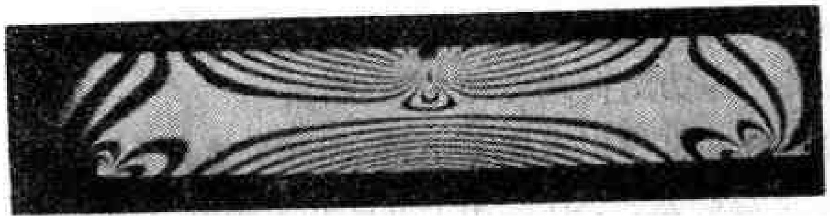


图 211

前面在討論应力分析的光弹性法时，始終假設了我們所涉及的是二維問題。近来，在将光弹性法推广至三維問題上曾作了很大的努力，在这方面已获得了一些成果[1]。

1) 参看 M. Hetényi 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 5, p. 149, 1938. 并参看 R. Weller, *J. Appl. Phys.*, vol. 10, p. 266, 1939, 及 M. Hetényi 所編 "Handbook of Experimental Stress Analysis" (New York, 1950) 一书中 D. C. Drucker 所著的章节。

§ 63. 球和滚子中的接触应力. 如两弹性体(例如两球)相互压紧,由于局部变形之故,形成了一微小的接触面. 分布在此面上的压力称之为接触压力. 这些压力和在物体中产生的应力其大小可用弹性理論的方程式算得[1]. 我們在这里只列出这些研究的最后結果.

对于两球为力 P 所挤压的情形(图 212),压力分布在微小的**接触圈** mn 上,此圓的半径可由下式求得:

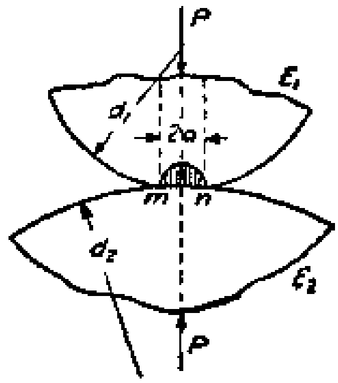


图 212

$$a = 0.88\sqrt[3]{\frac{P}{2}\frac{(E_1+E_2)d_1d_2}{E_1E_2(d_1+d_2)}}. \quad (269)$$

式中 E_1 和 E_2 为两球的弹性模量,而 d_1 和 d_2 則为相应的直径. 最大压力发生在**接触圈**的中心处,它可由下式求得:

$$p_{max} = 1.5\frac{P}{\pi a^2}. \quad (270)$$

由于局部变形,两球的中心互相接近了距离

$$\lambda = 0.77\sqrt[3]{2P^2\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)^2\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)}. \quad (271)$$

当两球的直径和弹性模量均相等时,上列各式变成

$$a = 0.88\sqrt[3]{\frac{Pd}{2E}};\ p_{max} = 0.62\sqrt[3]{\frac{4PE^2}{d^2}};\ \lambda = 1.54\sqrt[3]{\frac{2P^2}{E^2d}}. \quad (272)$$

当直径为 d 的一个球压向一平面弹性体时,以 $d_1 = d, d_2 = \infty$ 代入式(269)—(271),可得所需的公式. 設 $E_1 = E_2 = E$, 对于此情形得

$$a = 0.88\sqrt[3]{\frac{Pd}{E}};\ p_{max} = 0.62\sqrt[3]{\frac{PE^2}{d^2}};\ \lambda = 1.54\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2d}}. \quad (273)$$

---

1) 此問題是由 H. Hertz 解出的, *Gesammelte Werke*, vol. 1, 1895. 关于此問題的研討和参考书目載于作者和 Goodier 的 "Theory of Elasticity", p. 372, 1951. 并参看 I. J. Steierman, Contact Problems, 1949 (俄文版); 及 N. M. Belajef, Strength of Materials, 1945 (俄文版).

对于**球在球座中**的情形（图 213），必须改变式(269)—(271)中 d_2 的符号。于是对于 $E_1=E_2=E$ 的情形，得

$$\left.\begin{aligned} a &= 0.88\sqrt[3]{\frac{P}{E}\frac{d_1d_2}{d_2-d_1}};\\ p_{\max} &= 0.62\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{d_2-d_1}{d_2d_1}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{274}$$

着重指出，对于式(272)和(273)所表示的情形，接触面中心的最大压应力决定于比值 P/d^2 的大小，即如果此比值保持不变，则最大应力也保持不变。这証实了惯常取球每平方吋的直径截面内一定大小的載荷来确定球的安全直径是正确的。由于接触面中心的材料被阻止作横向膨涨，因此其各面均处于受压状态，可以承受很高的压力而不致破坏（参看 §81）。在經硬化的坩堝鋼的实驗中[1)]，当一个球压向一个平面时，有时根据下式来取許用挤压力 P：

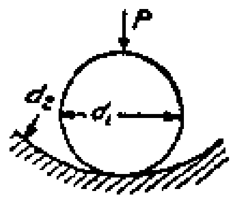


图 213

$$P_{\max}=700d^2,$$

式中 d 以吋計而 P 以磅計。代入方程組(273)中的第二式，求得 $p_{\max}$ 近似等于 530000 磅/吋^2。

对于弹性模量 E 相同的两物体互受挤压的一般情形，以 $1/r_1$ 和 $1/r_1'$ 表示一个物体在接触点的主曲率，以 $1/r_2$ 和 $1/r_2'$ 表示另一个的主曲率[2)]，并以 φ 表示包含曲率 $1/r_1$ 和 $1/r_2$ 的法平面間的夹角。对于一般情形，**接触面**为一椭圓，其半軸可由下式求得：

$$a=\alpha\sqrt[3]{\frac{Pm}{n}};\quad b=\beta\sqrt[3]{\frac{Pm}{n}}, \tag{275}$$

式中 P 为挤压力，而

$$m=\frac{4}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2'}};\quad n=\frac{4E}{3(1-\mu^2)}.$$

1) 参看 Stribeck, *Z. Ver. deut. Ing.*, p. 73, 1901; Schwinning, *ibid.*, p. 332, 及 A. Bauschlicher, *ibid.*, p. 1185, 1908.

2) 主曲率为最大和最小曲率，它們位于成直角的平面內。如相应的曲率中心位于物体之内，則此物体的曲率作为正值。

对于任何特定情形，常数 α 和 β 均可取自表 20. 表上第一列中的角 θ 系由下式算得：

$$\cos\theta = \frac{B}{A}, \tag{a}$$

表 20 計算接触椭圆半轴用的常数

θ (度)	α	β	θ (度)	α	β
20	3.778	0.408	60	1.486	0.717
30	2.731	0.493	65	1.378	0.759
35	2.397	0.530	70	1.284	0.802
40	2.136	0.567	75	1.202	0.846
45	1.926	0.604	80	1.128	0.893
50	1.754	0.641	85	1.061	0.944
55	1.611	0.678	90	1.000	1.000

式中

$$A = \frac{2}{m};\ B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)\cos 2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{b}$$

于是接触面中心的最大压力的表达式为

$$p_{max} = 1.5\frac{P}{\pi ab}. \tag{276}$$

对于**滚子受挤压**的情形(图214)，接触面为一狭长矩形，其宽度 b 可由下式求得[1)]：

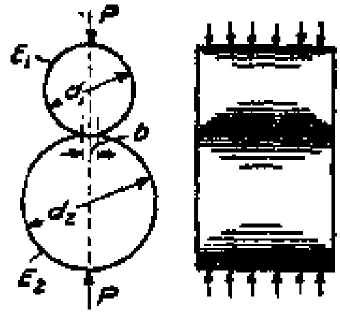


图 214

$$b = 2.15\sqrt{\frac{P'}{2}\frac{d_1d_2}{d_1 + d_2}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)}, \tag{277}$$

式中 P' 表示滚子单位长度内的挤压力. **接触矩形中央的最大单位压力为**

$$p_{max} = 0.59\sqrt{2P'\frac{E_1E_2(d_1 + d_2)}{(E_1 + E_2)d_1d_2}}. \tag{278}$$

1) 参看 A. Föppl, *Technische Mechanik*, vol. 5, p. 351, 1907.

对于两滚子弹性模量相等的特殊情形，

$$b = 2.15\sqrt{\frac{P'd_1d_2}{E(d_1+d_2)}};\quad p_{max} = 0.59\sqrt{P'E\frac{d_1+d_2}{d_1d_2}}. \tag{279}$$

如取一个直径为无限大，如同滚子与平面接触的情形一样，則式(279)化为

$$b = 2.15\sqrt{\frac{P'd}{E}};\quad p_{max} = 0.59\sqrt{\frac{P'E}{d}}. \tag{280}$$

可以看出，如 P' 与 d 按同比例改变，則最大应力保持不变。这証实了慣常根据滚子的直径截面积来确定安全尺寸是正确的。例如，对于桥梁上的普通鋼滚子，許用挤压力 P' 可由下式求得：

$$P' = 700d.$$

代入式(280)，得最大压力为 85000 磅/吋^{2}左右[1]。

习　　題

1. 試确定图 215 所示的单列球軸承中接触面 C 处的最大压力。球的直径为 $d = 1.5$ 吋，槽的半径为 1 吋，外座圈的直径为 8 吋而一个球上的最大挤压力为 $P = 5000$ 磅。

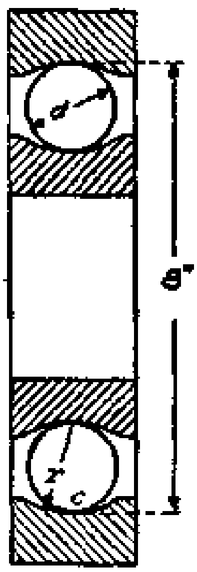


图　215

解. 运用第 292 頁的符号，得

$$r_1 = r_1' = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}\text{ 吋};\quad r_2 = -1\text{ 吋};$$

$$r_2' = -4\text{ 吋};$$

$$m = \frac{4}{\frac{2}{1.5}+\frac{2}{1.5}-\frac{1}{1}-\frac{1}{4}} = 2.823;$$

$$n = \frac{4\times 30\times 10^6}{3\times 0.91};$$

1) 关于鋼滚子的試驗，可参看 W. M. Wilson, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 162, 1927; No. 191, 1929; No. 263, 1934. 并参看 V. P. Jensen, *Iowa Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 138, 1937. 滚子的疲劳試驗在 §89 中有討論。

$$2A=\frac{4}{m}=\frac{4}{2.823}=1.417;\quad 2B=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}=0.750;$$

代入式(a),得

$$\cos\theta=\frac{0.750}{1.417}=0.529;\ \theta=58^{\circ}$$

于是由表 20 用內插法得

$$\alpha=1.536,\ \beta=0.701.$$

由式(275)得接触椭圓的半軸为

$$a=1.536\sqrt[3]{\frac{5000\times 2.823\times 3\times 0.91}{4\times 30\times 10^{6}}}=0.105\text{ 吋},$$

$$b=0.701\sqrt[3]{\frac{5000\times 2.823\times 3\times 0.91}{4\times 30\times 10^{6}}}=0.048\text{ 吋};$$

而由式(276)得

$$p_{max}=1.5\frac{5000}{\pi ab}=475000\text{ 磅/吋}^{2}.$$

由于在接触椭圓的中心处材料不仅受力 P 方向的挤压，而且还受横向挤压,因此硬化鋼能承受这样高的应力.

2. 試确定軸綫相互垂直的两圓柱之間的接触面和最大压力. 例如，我們考虑关于輪緣为圓柱形的車輪与軌道之間的接触压力的問題[1).

解. 以 r_1 和 r_2 表示圓柱的半径,并运用第 292 頁的符号,

$$\frac{1}{r_1'}=0;\ \frac{1}{r_2'}=0;\ \varphi=\frac{\pi}{2};\ m=\frac{4}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}};\ n=\frac{4E}{3(1-\mu^{2})};$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right);\ B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r_1^{2}}+\frac{1}{r_2^{2}}-\frac{2}{r_1r_2}}=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

选择 B 的符号时須使 B 为正值. 由式(a)得

---

1) 随着現代机車車軸載荷的增加,接触压力的問題日益重要. 关于此問題的研討,可参看 H. Fromm 的論文, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 73, p. 957, 1929, 及 N. M. Belajef 的論文, *Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication* (St. Petersburg), 1929.

$$\cos\theta = \pm \frac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}}.$$

知道了 θ 后，我們可由式(275)求得接触橢圓的半軸，而由式(276)求得最大压力.

对于两圓柱半径相等的特殊情形，$\cos\theta = 0$，由表 20 可以得出，接触面为圓形.

3. 如 $P = 1000$ 磅和泊桑比 $\mu = 0.25$，試求圓柱形輪緣(半径为 $r_1 = 15.8$ 吋)的車輪与軌头半径为 $r_2 = 12$ 吋的軌道之間的最大压力.

答. 接触橢圓的半軸为

$$a = 0.0946 \text{ 吋 和 } b = 0.0792 \text{ 吋},$$

而最大压力为

$$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab} = 63600 \text{ 磅/吋}^2.$$

第九章　超过弹性极限后的变形

§ 64. **由完全塑性材料制成的結构**．在前面的討論中，始終假設了結构的材料服从胡克定律．根据此定律，分析了各种不同情形下的变形和应力分布．但在有些情形下，需要研究結构在超过比例极限后的变形．为了作此研究，必須了解材料在超过比例极限后的机械性質．这些性質通常由拉伸和压縮試驗图定出．对于**完全塑性材料**，这些图綫的形式最为簡单．这种材料直至达到比例极限为止一直服从胡克定律，然后在常应力下发生屈服．图 216 表示相应的拉伸和压縮試驗图．具有明显的屈服点，并在該点伸长很大的結构鋼，其性質在一定范围內接近于完全塑性材料．根据图 216 中的图綫来分析結构中的应力，对于很多情形具有实际的重要性．在本节和下节中，我們将討論属于此类的若干問題．

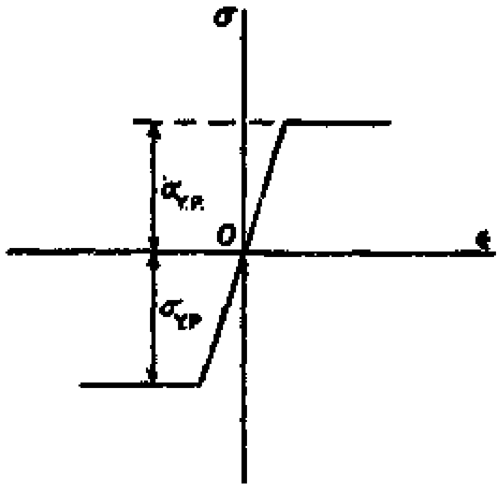


图　216

純弯曲．在討論超过比例极限后的純弯曲时，我們可作与弹性弯曲时相同的假設（参看原书上卷第 92 頁第 23 节）．因此，我們假設：(1) 弯曲时梁的截面保持为平面并与撓度曲綫垂直；和 (2) 梁的纵向纖維处于簡单拉伸或压縮状态且相互間无横向压力[1]．研究有一軸向对称面的梁，并設弯曲力偶作用在此平面內，則弯曲将发生在同一平面內，而弯曲时梁的截面将繞其垂直于弯曲平面

---

1) 这些假設与实驗很为符合；参看 G. H. MacCullough 的論文，*Trans. A. S. M. E.*, vol. 55, p. 55, 1935.

的中性轴旋轉．离中性軸 y 处的纤維其单位伸长（参看原书上卷第 93 頁)为

$$\varepsilon = \frac{y}{r}. \tag{a}$$

开始屈服时的弯矩大小可由下式計算(参看原书上卷第 95 頁)：

$$M_{Y.P.} = \sigma_{Y.P.} \frac{I_z}{c}, \tag{b}$$

式中 I_z 为梁的截面对其中性軸的慣性距，而 c 为該軸与梁的最远纤維的距离．

以图 217 中的矩形梁作为最簡单的例子，得[1]

$$M_{Y.P.} = \sigma_{Y.P.} \frac{bh^2}{6}, \tag{c}$$

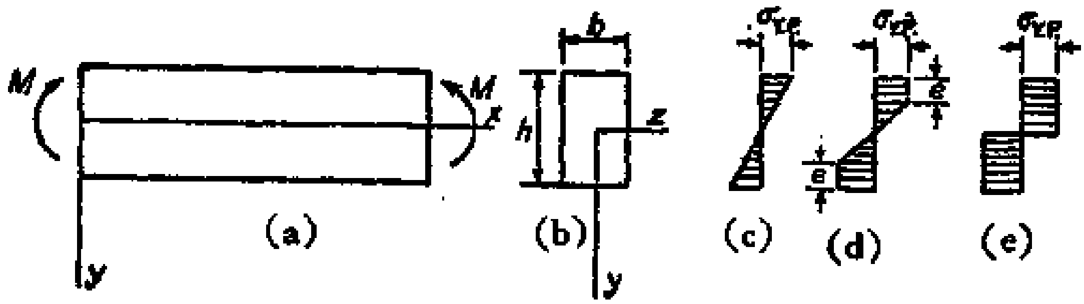


图 217

相应的应力分布示于图 217c 中．梁的所有纤維均处于弹性状态，而最远的纤維刚好达到屈服点应力．如果我們将弯矩略为增加至 $M_{Y.P.}$ 以上，則在梁的上下表面附近的纤維就开始屈服，应力分布将如图 217d 所示．当弯矩再增加时，塑性变形更深入梁內．当此深入深度 e 为任何大小时，由图 217d 中阴綫面积所定出的相应弯矩均可用下式表示：

$$\begin{aligned} M &= \sigma_{Y.P.} be(h-e) + \sigma_{Y.P.} \frac{b(h-2e)^2}{6} \\ &= \sigma_{Y.P.} \frac{bh^2}{6}\left[1 + \frac{2e}{h}\left(1 - \frac{e}{h}\right)\right]. \end{aligned} \tag{d}$$

1) 我們假設拉伸与压縮的 $\sigma_{Y.P.}$ 相等．如拉伸与压縮的 $\sigma_{Y.P.}$ 值不同，我們的推导也可很容易加以推广．

梁相应的撓度曲綫曲率可由式(a)求得．将此式应用于离中性轴 $(h/2)-e$ 处的纖維，并考慮到这些纖維中的应力正好达到比例极限 $\sigma_{Y.P.}$，得

$$\sigma_{Y.P.}=\frac{E\left(\frac{h}{2}-e\right)}{r},$$

和

$$\frac{1}{r}=\frac{\sigma_{Y.P.}}{E\left(\frac{h}{2}-e\right)}. \tag{e}$$

运用式(d)和(e)，我們可将弯矩 M 与曲率 $1/r$ 間的关系表示为如图 218 所示者．在 $M=M_{Y.P.}$ 以前的变形为弹性变形，梁的曲率与弯矩按正比增大．当 M 增大至 $M_{Y.P.}$ 以上时，M 与 $1/r$ 間的关系就变成非綫性．当塑性变形的深入深度 e 趋近于 $h/2$ 时，相应的曲綫(图 218)变得更陡，而应力分布則趋近于如图 217e 所示者．以 $e=h/2$ 代入式(d)，得最大弯矩值为

$$M_{ult}=\sigma_{Y.P.}\frac{bh^2}{4}. \tag{f}$$

在图 218 中，M_{ult} 值定出了曲綫的鉛直漸近綫的位置．当 M 趋近于 M_{ult} 时，M 的微小增量会引起曲率的很大增加，因此 M_{ult} 会引起梁的完全破坏[1]．

式(c)和(f)系对矩形梁推导的，我們可以得出，对于此截面

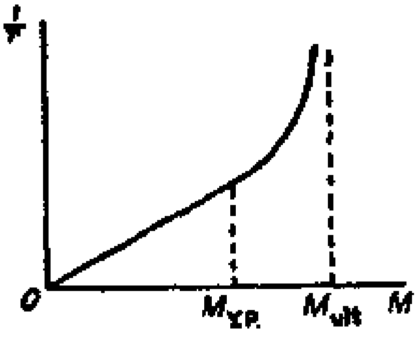


图 218

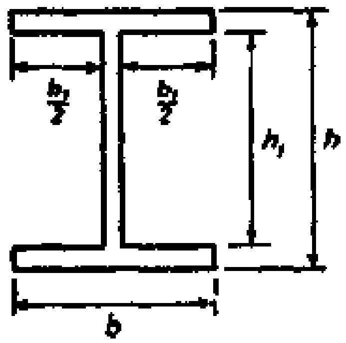


图 219

1) 極限力矩的概念系由实驗研究加以証实的；参看 J. F. Baker 的論文，*J. Inst. Aeronaut. Engrs.*, vol. 31, p. 188, 1949.

形状，引起梁完全破坏所需的弯矩比塑性变形刚开始发生时要大 50%. 对于其它形状的对称截面，不难导出类似的方程式.

例如，我們来研究一工字梁（图 219）. 屈服力矩仍由 $\sigma_{Y.P.}$ 与截面模量相乘而得[参看式(b)]，即

$$M_{Y.P.} = \sigma_{Y.P.}\left(\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}\right)\frac{2}{h}. \tag{g}$$

在計算 M_{ult} 时，我們注意到图 217e 表示相应的应力分布. 将 $\sigma_{Y.P.}$ 乘以一半截面对中性軸的静力矩可得所有內拉力对中性軸的力矩. 将此力矩加倍，得

$$M_{ult} = \sigma_{Y.P.}\left(\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1h_1^2}{4}\right). \tag{h}$$

現在由式(g)和(h)得

$$\frac{M_{ult}}{M_{Y.P.}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1-\dfrac{b_1h_1^2}{bh^2}}{1-\dfrac{b_1h_1^3}{bh^3}}. \tag{i}$$

我們看出，工字梁的比值 $M_{ult}/M_{Y.P.}$ 小于 3/2，其值依截面的大小而定. 例如，設 $b_1/b = h_1/h = 0.9$，由式(i)得 $M_{ult}/M_{Y.P.} = 1.18$. 对于此情形，M_{ult} 仅比 $M_{Y.P.}$ 大 18%. 对于一般的輾制工字梁，由計算得出的 $M_{ult}/M_{Y.P.}$ 之值为 1.15 至 1.17.

由此研究可以看出，如果一矩形梁和一工字梁按同样的对应于开始屈服时的安全系数来設計，則对完全破坏而言、矩形梁的強度将較工字梁为高. 在开始屈服后，矩形梁的強度裕度較工字梁为大. 对于工字梁的全部材料都集中在薄凸緣上的理論情形，可得 $M_{ult} = M_{Y.P.}$，而屈服一发生梁便完全破坏.

对于矩形和工字形截面，我們有两个对称軸. 在发生弹性与塑性变形时，中性軸与其中一軸重合. 如果只有一个对称軸，例如对于T形截面(图 220)，情形就不同了. 在計算 $M_{Y.P.}$ 时，梁的所有纖維均处于弹性状态，而中性軸通过截面的形心. 而在計算 M_{ult} 时，我們取应力分布如图 220b 所示，由于內拉力之和必須等

于压縮力之和，我們得知中性軸將截面分成两等份．当中性軸的位置求得后，M_{ult} 的大小就可由下式算得：

$$M_{ult}=\frac{1}{2}\sigma_{Y.P.}Aa,$$

式中 A 为截面积，而 a 为截面两部分形心間的距离．

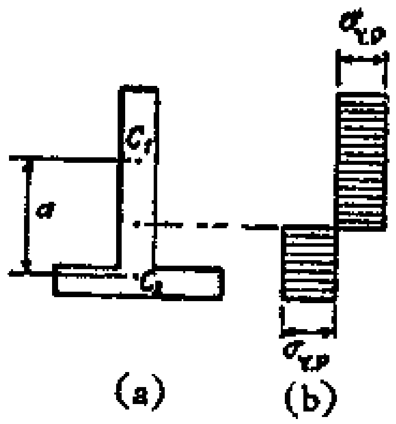


图 220

由横向力引起的弯曲．我們来研究一简支矩形梁受中央載荷的情形作为一例(图 221)．弯矩图为一三角形．如 $M_{Y.P.}<Pl/4<M_{ult}$，則发生塑性变形的中間这段梁长度可按图 221b 所示的来确定．忽略了剪应力的影响后[1)]，在任意截面內的塑性变形深入深度 e 就可由式(d)算得，而由此可确定图中阴綫所示的塑性流动区域．当最大

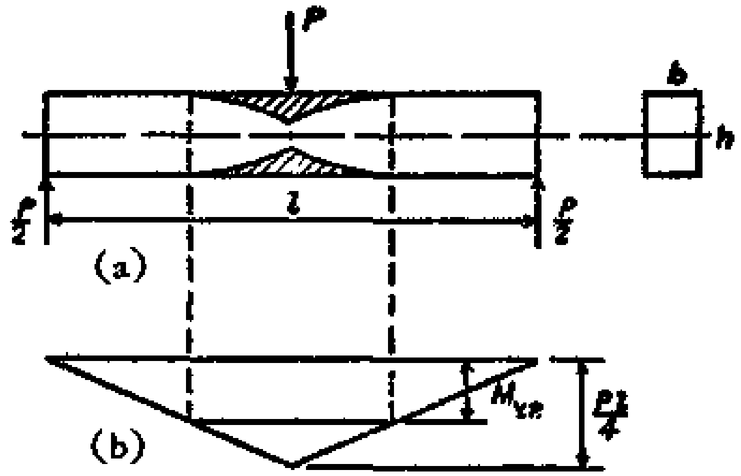


图 221

弯矩 $Pl/4$ 趋近于 M_{ult} 截时，塑性区域趋近于梁中間截面的中性軸．因此，在此截面处对弯曲的抗力达到了最大值，而梁將发生破坏．梁的两半將繞中間截面的中性軸各对各旋轉，如同繞一鉸鏈一样．此称为**塑性鉸**，由不变力矩 M_{ult} 抵抗旋轉．

为了研究具有塑性变形区域的梁的撓曲(图 221a)，我們忽略

1) J. F. Baker 和 J. W. Roderick 所作的实驗証实了此假設；参看 *Trans. Inst Welding*, vol. 3, p. 83, 1940.

剪力对挠曲的影响，而运用对純弯曲导出的式(d)和(e)。从这些方程式中消去 $\sigma_{Y.P.}$，得

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{kEI_z}, \tag{j}$$

式中

$$k=\left(1-\frac{2e}{h}\right)\left[1+\frac{2e}{h}\left(1-\frac{e}{h}\right)\right]. \tag{k}$$

k 值为 e 的函数。当 $e=0$ 时 k 等于 1；当 $e=h/2$ 时 k 等于零。对于图 221a 中梁的塑性区域內的任意截面，e 可由式(d)算得，而 k 可由式(k)求得。

如果我們用 M/k 代替 M，曲率方程式(j)的形式就与弹性弯曲的情形相同。在計算挠度时如应用**面积-力矩法**(参看原书上卷第 147 頁)，我們必須运用一**修正**的弯矩图，图中纵坐标等于M/k。当 M 趋近于 M_{ult} 时，k 趋近于零；修正弯矩图的纵坐标无限地增大，而趋近于塑性鉸的情形。

在前面的討論中研究了矩形梁，但对其它截面形状，也能作出类似的推导。一般而言，运用面积力矩法，連同修正的弯矩图，可算得梁超过比例极限后在对称面內的挠度。对于任何特定形状的截面，均須导出式(j)中的 k 值。

习　　題

1. 試确定图 222 所示截面的梁的比值 $M_{ult}/M_{Y.P.}$。

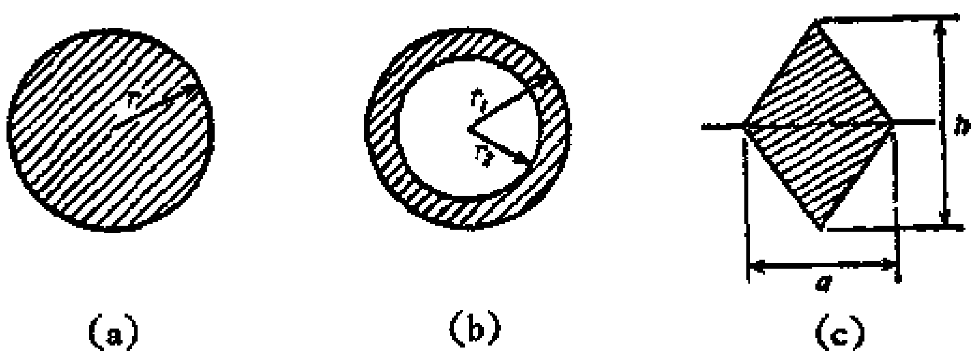


图 222

答.

$$(a)\ \frac{16}{3\pi}=1.70;\ (b)\ \frac{16r_1}{3\pi}\cdot\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^4-r_2^4},\ (c)\ 2.$$

2. 如果 $a=b$ 时,試求图 223 所示的T形截面梁的 M_{ult}.

答.

$$M_{ult}=\sigma_{Y.P.}ah\left(\frac{a+h}{2}\right).$$

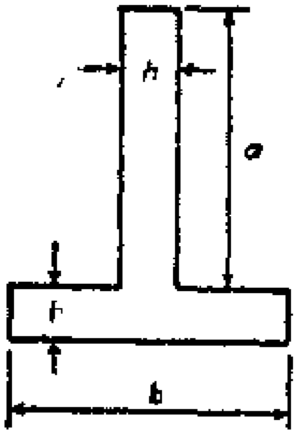


图 223

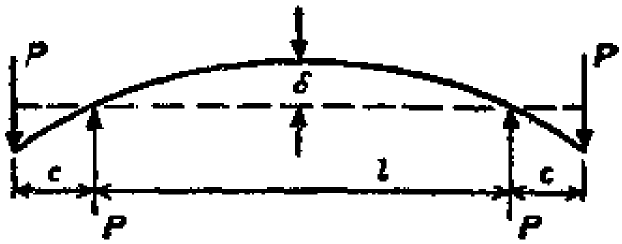


图 224

3. 試求等边三角形截面的 $M_{ult}/M_{Y.P.}$.

答. $M_{ult}/M_{Y.P.}=2.343.$

4. 試求图224所示的矩形梁中点的挠度 δ,如果 $Pc=1.4M_{Y.P.}$.

答.

$$\delta=\frac{l^2}{8r}=\frac{l^2}{8}\frac{Pc}{kEI_z},\ k=0.626.$$

5. 如果 $Pc=0.90M_{ult}$ 时,試解上面图 223 T形梁之題.

6. 試求受均布載荷的方形鋼梁(图 225)的 q_{ult},如果截面积 $A=9$ 吋^2, $l=48$ 吋,和 $\sigma_{Y.P.}=32000$ 磅/吋^2.

答. $q_{ult}=750$ 磅/吋.

7. 試作修正弯矩图,并求受均布載荷的方形梁(图 225)中点挠度的近似值,如果 $ql^2/8=1.4M_{Y.P.}$, 而尺寸与上題相同.

8. 試求图 226 所示的矩形梁中点的挠度,如果 $Pl=3.6M_{ult}$. 試示出梁中塑性区域的界綫.

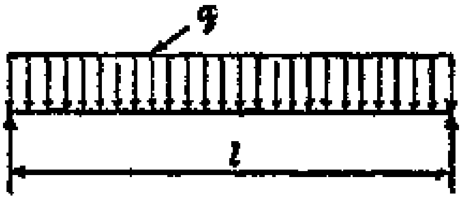


图 225

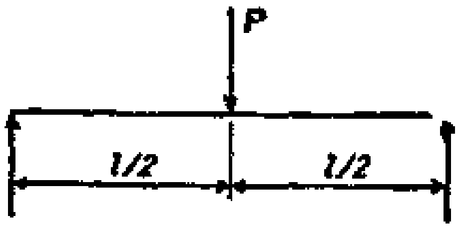


图 226

§ 65. **結构的极限强度.** 对于支承靜載荷的金屬結构，慣常这样来选择結构的安全尺寸：使工作載荷乘上安全系数后所产生的最大应力等于材料的屈服点应力[1]. 可是在大多数情形下，开始屈服并不代表完全破坏，而結构所能承受的載荷通常較开始屈服时的載荷为大. 为了利用此強度裕度，有时建議[2]在选择适当的結构尺寸时，对所假設的結构尺寸計算載荷的极限值. 于是取結构上的安全載荷作为极限載荷的一个固定部分，极限載荷即引起結构完全崩潰的載荷. 对于后面这一情形，安全系数当然要比以屈服載荷作为設計依据的情形为大. 以极限載荷作为选择結构安全尺寸的依据的設計程序称为**极限設計**. 在下面的討論中，將研究极限設計如何应用于各种結构的几个例子.

从靜定結构开始. 我們得出在这种情形下，如果变形保持很小，則作用在結构元件上的力可由靜力学方程式确定，而与材料的机械性質无关. 如果这一結构是由承受拉伸或压縮的杆件所組成(如銷接桁架的情形)，引起屈服的載荷也就是极限載荷，因为对于完全塑性材料(图 216)，屈服系在不变应力下进行的. 对于梁弯

1) 根据弹性稳定性的研究来选擇尺寸的情形本节中不予討論.

2) 确定鋼結构安全尺寸的方法是由 N. C. Kist 所提出的，*Eisenbau*, vol. 11, 1920. 确定极限載荷的实驗曾由 Maier-Leibnitz (*Bautechnik*, 1928) 及 K. Girkmann (*Bautechnik*, 1932) 所作. 梁超过屈服点弯曲的理論研討是由 J. Fritsche 所作出的，*Bauingenieur*, 1930 和 1931. 弯曲与压縮的联合情形曾由 K. Girkmann 作了討論，*Sitzungsber. Akad. Wissensch. Wien*. Abt. IIa, vol. 140, 1931. 最近几年来在这方面的重要工作已在英国劍桥大学 J. F. Clark 的指导下完成；参看 *J. Inst. Civil Engrs.*, vol. 31, p. 188, 1949, 及 B. G. Neal 和 P. S. Symonds 的論文，*Proc. Inst. Civil Engrs.*, 1952. 在美国，根据极限載荷的設計問題曾由 J. A. Van den Broek 作了討論，*Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, vol. 105, p. 638, 1940. 并参看 H. J. Greenberg 和 W. Prager 的論文，*Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, vol. 77, 1951.

曲的情形，极限載荷与引起屈服的載荷之比等于比值 $M_{ult}/M_{Y.P.}$.
如我們在前面所看到的，它与梁的截面形状有关.

在靜不定結构中，应力分布的問題較为复杂，因为这时作用在結构元件上的力不仅与外力大小有关，而且还与結构元件的弹性和塑性性質有关，分析时需要研究結构的变形. 研究弹性极限內的变形时所用的方法是与研究塑性变形时所用的不同的. 現在用一些例子来說明这两种分析的差别.

我們从討論等截面梁弯曲的靜不定情形开始. 以一端固定而另一端簡支的梁(图 227)为例. 首先研究发生在弹性极限內的弯

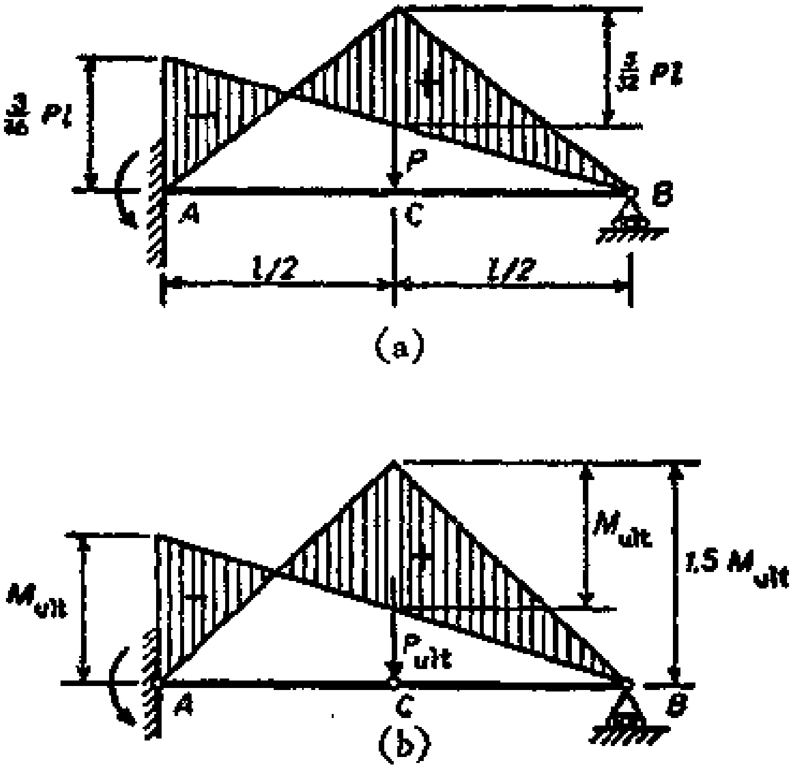


图 227

曲，考虑到梁的 A 端为固定，我們求得弯矩图如图 227a 中阴綫面积所示(参看原书上卷第 180 頁). 如我們取开始屈服时的載荷作为設計的依据，我們看出，最大弯矩发生在梁的固定端 A 处，而 $P_{Y.P.}$ 之值可由下式算得:

$$\frac{3}{16}P_{Y.P.}l = M_{Y.P.},$$

从而得

$$P_{Y.P.}=\frac{16}{3}\frac{M_{Y.P.}}{l}. \qquad (a)$$

在計算 P_{ult} 时我們看到，当載荷增加至 $P_{Y.P.}$ 以上时，在固定端 A 处开始屈服。当載荷較 $P_{Y.P.}$ 稍大时，在截面 C 处开始屈服，在弯矩图上此处为另一尖峯。継續增加载荷，在梁的 A 端便达到塑性鉸状态，但此状态不致引起梁的完全崩潰。此結构还能承受継續增加的載荷 P，直至截面 C 处的弯矩也达到 M_{ult} 值为止。于是在 A 和 C 处将为塑性鉸，而在 B 处可自由旋轉。此为相应于梁完全崩潰时的极限状态。对于此情形，A 和 C 处的弯矩其数値等于 M_{ult}，而弯矩图如图 227b 所示。由此图我們看出，相应于載荷 P_{ult} 的弯矩三角形的最大縱坐标等于 $1.5\,M_{ult}$，而 P_{ult} 可由下式計算：

$$\frac{P_{ult}l}{4}=1.5M_{ult},$$

从而得

$$P_{ult}=\frac{6M_{ult}}{l}. \qquad (b)$$

現由式(a)和(b)得

$$\frac{P_{ult}}{P_{Y.P.}}=\frac{9}{8}\frac{M_{ult}}{M_{Y.P.}}; \qquad (c)$$

即对于此静不定情形，載荷比 $P_{ult}:P_{Y.P.}$ 比对于靜定情形求得的比值 $M_{ult}:M_{Y.P.}$ 为大。

我們还可以看出，如在 A 和 C 处引用塑性鉸（图 227b），我們所具有的問題就很易用靜力学方程式解出，而此問題比起图 227a 中的靜不定問題来要簡单得多。因此在极限設計中的 P_{ult} 的計算，比起基于結构为弹性性状这一假設的設計中 $P_{Y.P.}$ 的計算来要簡单些。此外，它还較为現实，因为根据完全弹性的假設所得的結果决定于所假設的梁端点条件的准确度。固定端 A 的微轉或支点 B 的稍稍降低可以大大地改变 $P_{Y.P.}$ 的大小，而它們却并不影响对图 227b 的靜定系統算得的 P_{ult} 值。此为极限設計法的两个主要优点。

我們来研究一端固定，而另一端簡支的梁受均布載荷的情形(图 228)作为第二个例子．在弹性范圍內，弯矩图如图 228a 所示．弯矩的最大数値系在固定端，而載荷 $q_{Y.P.}$ 的大小可由下式求得：

$$\frac{q_{Y.P.}l^2}{8}=M_{Y.P.},$$

从而得

$$q_{Y.P.}=\frac{8M_{Y.P.}}{l^2}. \tag{d}$$

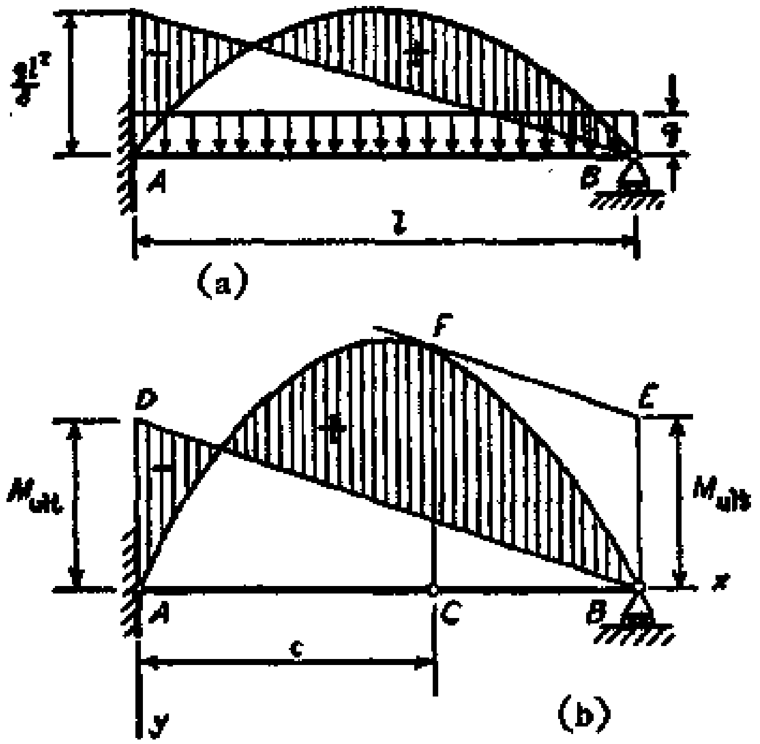


图 228

如果我們継續增加載荷使超过 $q_{Y.P.}$ 値，則在固定端 A 的屈服将継續进行，而相应的弯矩将增大至 M_{ult} 値，这时在 A 处将形成塑性鉸．为了得到梁完全崩潰的情形，我們必須継續增加載荷直至达到 q_{ult} 値为止，这时在梁的中間一个截面 C 处(图 228b)将形成塑性鉸．截面 C 的位置和 q_{ult} 之値可由 C 处的弯矩为最大而大小等于 M_{ult} 这两个条件求得．运用图 228b 中的阴綫弯矩图，我們可将这两个条件写成如下：

$$M = \frac{q_{ult} l}{2} x - \frac{q_{ult} x^2}{2} - \frac{M_{ult}(l-x)}{l} = M_{ult}, \tag{e}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_{ult} l}{2} - q_{ult} x + \frac{M_{ult}}{l} = 0. \tag{f}$$

由这些方程式得

$$x = c = l(2 - \sqrt{2}), \; q_{ult} = \frac{2M_{ult}}{l^2(3 - 2\sqrt{2})}, \tag{g}$$

由式(d)和(g)我們得出

$$\frac{q_{ult}}{q_{Y.P.}} = 1.46 \frac{M_{ult}}{M_{Y.P.}}. \tag{h}$$

在討論結构塑性变形的較普遍情形时，我們看出，在超过弹性极限时迭加原理不再适用，結构的变形不仅与載荷的最后値有关，而且还与載荷作用在結构上的次序有关．以图229a所示的情形为例．如果两个力同时作用，则相应弯矩图的形狀将如图 229b 所示，而最大弯矩为 $Pl/9$． 我們看出，如果

$$P < \frac{9M_{Y.P.}}{l}, \tag{i}$$

变形为完全弹性．我們現在来研究先在截面 B 处施加載荷 P，而后再在 C 处施加載荷的情形．在 B 处施加載荷后，相应弯矩图的形狀如图 229c 所示；最大弯矩比前面情形的大两倍． 虽然式(i)的条件可以得到满足，但还是可能引起塑性变形． 此塑性变形不能被后来再在截面 C 处施加的力 P 所消除，梁的最后变形将与同时在截面 B 和 C 处加力的情形不同．在我們以后的討論中，我們将始終假設各力为同时作用，而在加載过程中各力之比保持不变，其大小等于各力最

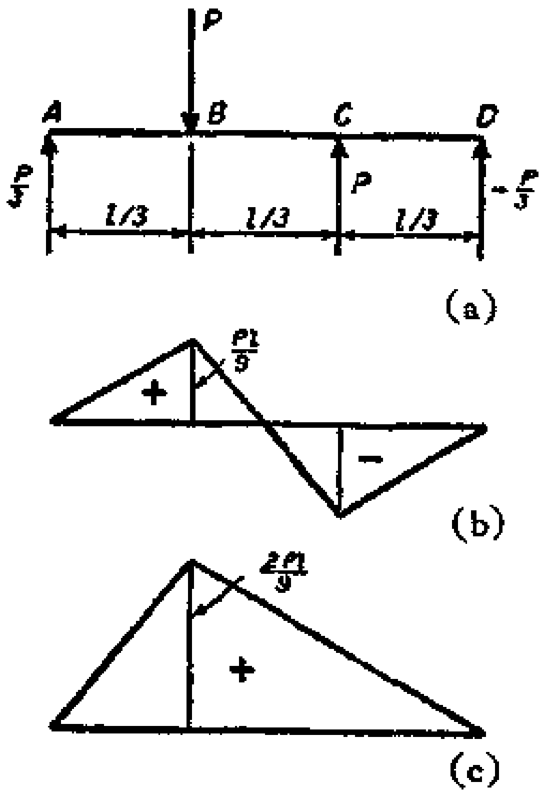


图 229

后值之比．所有各力将以同样的符号而乘以表明所需各力大小之比的数字系数来表示。

在前面所討論的问题中(如图 227 和 228 所示者)，安置塑性鉸只有一种可能的方法，而且只研究了梁的一种崩潰方式．但如果有几个力作用在梁上时．則安置塑性鉸就有几种不同的可能性，而梁就有几种可能的崩潰方式．自然，設計师必須从所有可能的崩潰方式中选出在最小載荷下发生的一种．于是这些載荷可看作是結构的极限載荷．

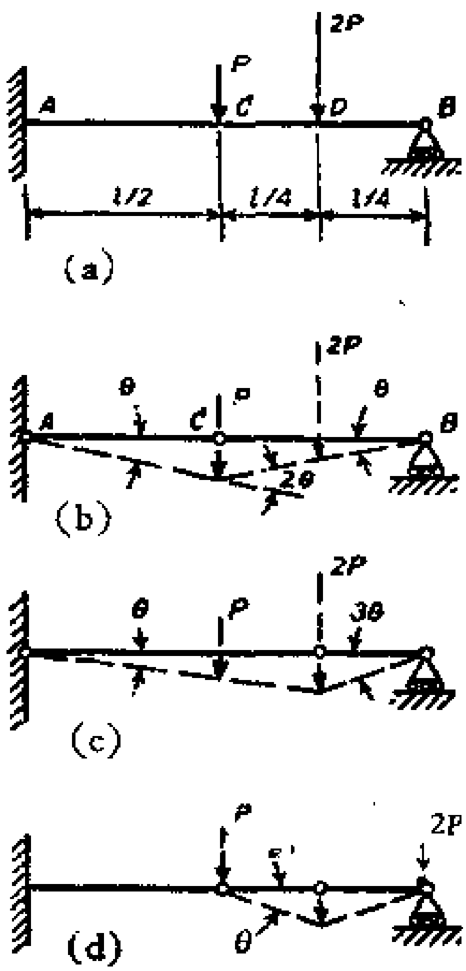


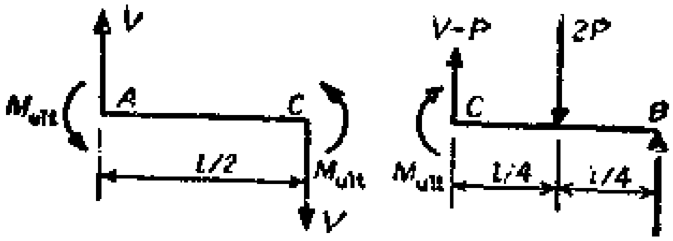
图 230

我們来研究图 230 中的梁作为选择塑性鉸适当位置的一例，此梁在 A 处固定，在 B 处簡支，并承受两个載荷 P 和 $2P$．对于此情形，弯矩图由虛綫表示，而弯矩的尖峯值位于通过截面 A, C 和 D 的鉛直綫上．在完全崩潰的状态下，塑性鉸在这三个截面中的两个截面处形成．这些塑性鉸的所有可能位置和相应的崩潰方式示于图 230b—d 中．鉴于在每个塑性鉸处力矩 M_{ult} 的作用方向均与任何相对旋轉方向相反，我們可以写出各段梁的平衡方程式，并确定相应于所假設的崩潰方式的 P 的大小．例如，对于图 230b 所示的方式，相应的力如图 231a 所示，而平衡方程式为

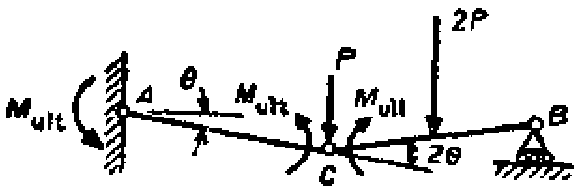
$$\frac{Vl}{2} - 2M_{ult} = 0;\quad \frac{(V-P)l}{2} + M_{ult} - \frac{Pl}{2} = 0,$$

从而得

$$P_{ult} = \frac{3M_{ult}}{l}.$$



(a)



(b)

图 231

应用虚位移原理[1]来計算 P_{ult} 較之应用如上面所示的平衡方程式有利。再研究图 230b 所示的崩潰方式，我們看出，在 A 和 C 处引用塑性鉸可得一由两鉸接杆組成的机构（图 231b）。为了写出此机构的平衡条件，我們来研究由微小的旋轉角 θ 所决定的虚位移。旋轉时，在截面 A 和 C 处反抗旋轉的力矩 M_{ult} 将分别作大小等于 $-\theta M_{ult}$ 和 $-2\theta M_{ult}$ 的功。同时，載荷 P 和 $2P$ 将分别作大小等于 $P\theta l/2$ 和 $2P\theta l/4$ 的功，因此虚位移的方程变成

$$-\theta M_{ult}-2\theta M_{ult}+\frac{P\theta l}{2}+\frac{2P\theta l}{4}=0,$$

从而得

$$P_{ult}=\frac{3M_{ult}}{l}. \tag{j}$$

对于图 230c 和 230d 所示的情形，以同样方法处理后，得下列結果：

$$P_{ult}=\frac{2.5M_{ult}}{l},\ P_{ult}=\frac{6M_{ult}}{l} \tag{k}$$

1) 此計算方法曾由 J. F. Baker 所引用，*J. Inst. Structure Engrs.*, vol. 27, p. 397, 1949.

比較式(j)和(k)的結果，我們得出，对于图 230a 所示的梁，极限載荷为 $P_{ult} = 2.5M_{ult}/l$，而相应的崩潰方式如图 230c 所示。

对于梁的上述情形所用的計算极限載荷的方法也能用于研討框架的极限強度。我們来研究图 232a 所示的框架，此框架有三个多余的量。例如，我們可取 B 处的弯矩和反力的两个分量作为这三个多余的量。如果这三个量为已知，在框架任意截面处的弯矩和反力的两个分量就容易由靜力学方程式求得。我們也可在結构中放入三个塑性鉸而使其成为靜定。例如，在 A，B 和 E 处放入塑性鉸，我們得一可作为三鉸拱来分析的結构。为使框架成为一可动的系統(或机构)，我們必須引用四个塑性鉸。为了确定这些塑性鉸的位置，我們看到，弯矩图的尖峯处在有集中力作用的截面 1，2，……5 等处(图 232)。塑性鉸必須位于这些截面处，因为弯矩在这些地方达到其最大的数值。图 232b 和 c 示出了安置这四个

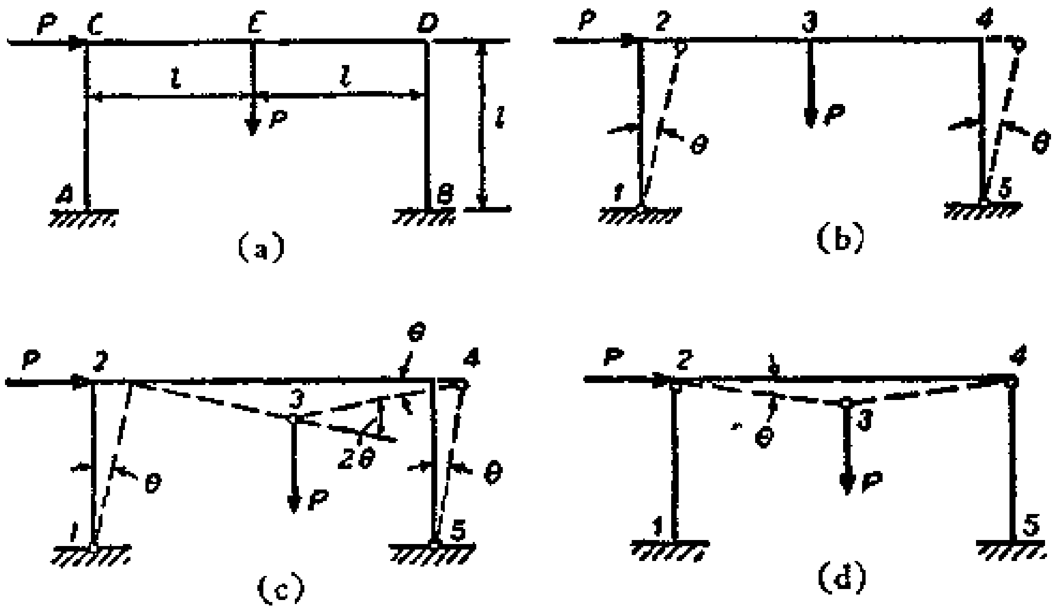


图 232

塑性鉸的两种可能方式，这两种方式相应于框架的两种不同的崩潰方式[1]。

在图 232d 中，我們得破坏的一个例外情形。如果只引用三个

1) 关于框架結构各种可能崩潰方式的选择，可参看 P. S. Symonds 和 B. G. Neal 的論文，*J. Inst. Civil Engrs.*, vol. 35, p. 21, 1950.

塑性鉸，我們当然不能获得型式与前面两种情形相同的机构． 当塑性鉸在截面 2，3 和 4 处形成后，再增加載荷 P 就不会在这些鉸接处发生无限制的相对旋轉． 这两个杆（2-3 和 3-4）在稍为旋轉后将处于受拉的位置，以支承繼續增加的載荷 P． 但是相应的位移会很大，而我們必須認为此变形也代表框架的完全崩潰．

为了計算相应于图 232 所示的三种不同崩潰方式的 P_{ult} 值，我們运用图中所示的尺寸，此外还假設水平构件 CD 的截面較鉛直构件的为大，因而 M_{ult} 代表鉛直构件的极限力矩，而 $1.5\ M_{ult}$ 代表水平构件的极限力矩[1]． 虛位移用小角 θ 表出之． 于是对于图 232b 所示的情形，平衡方程式为

$$P\theta l - 4\theta M_{ult} = 0,$$

从而得

$$P_{ult} = \frac{4M_{ult}}{l}.$$

对于图 232c 所示的情形，平衡方程式为

$$P\theta l + P\theta l - 2\theta M_{ult} - 1.5(2\theta)M_{ult} - 2\theta M_{ult} = 0.$$

从而得

$$P_{ult} = \frac{3.5\,M_{ult}}{l};$$

对于图 232d 所示的情形，同样得

$$P_{ult} = \frac{5M_{ult}}{l}.$$

由这些結果我們得出，实际的崩潰方式将如图 232c 所示，而极限載荷为

$$P_{ult} = \frac{3.5\,M_{ult}}{l}.$$

习　　題

1. 試求图 233 所示梁的 P_{ult} 和 q_{ult} 之值．

---

1) 角上的塑性鉸会在較薄弱的构件中形成，如图 232b，c 和 d 中的小圓圈位置所示．

答.

$$(a),\quad P_{ult}=\frac{8M_{ult}}{l};\quad (b),\ q_{ult}=\frac{16M_{ult}}{l^2};$$

$$(c),\quad P_{ult}=\frac{6M_{ult}}{l}.$$

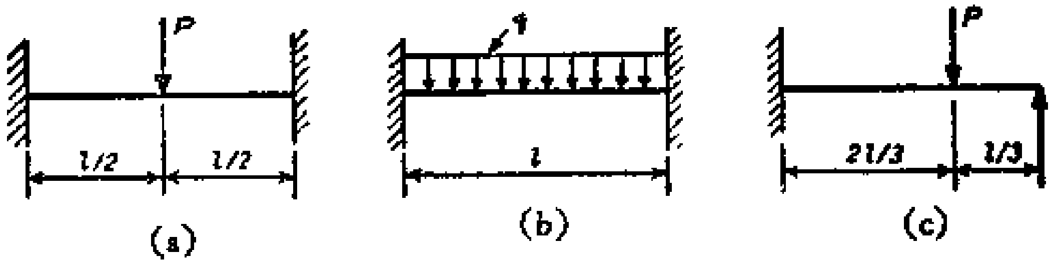


图 233

2. 有一等截面两跨度梁承受均布載荷(图 234). 如設 $l_1>l_2$, 試求 q_{ult}.

答.

$$q_{ult}=\frac{2M_{ult}}{l_1^2(3-2\sqrt{2})}.$$

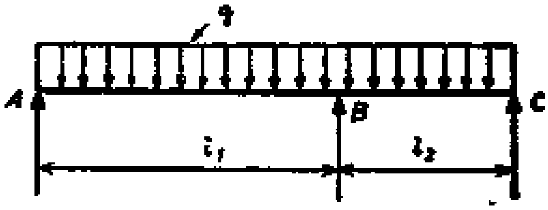


图 234

3. 試求图 235 所示等截面連續梁的 P_{ult} 值, 并示出崩潰方式.

答.

$$P_{ult}=\frac{16M_{ult}}{3l}.$$

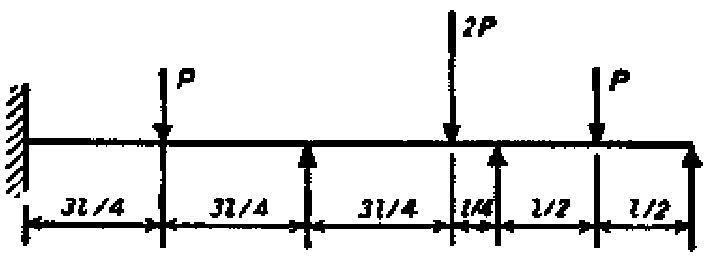


图 235

4. 有一两端固定的梁承受两个力 P 和 $2P$ 的作用 (图 236). 試求 P_{ult} 值并示出相应的崩潰方式.

答.

$$P_{ult}=\frac{4M_{ult}}{l}.$$

5. 試求图 237 中框架的 P_{ult} 和相应的崩潰方式.

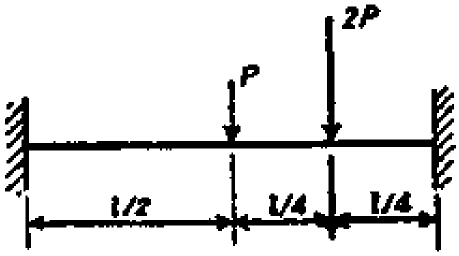


图 236

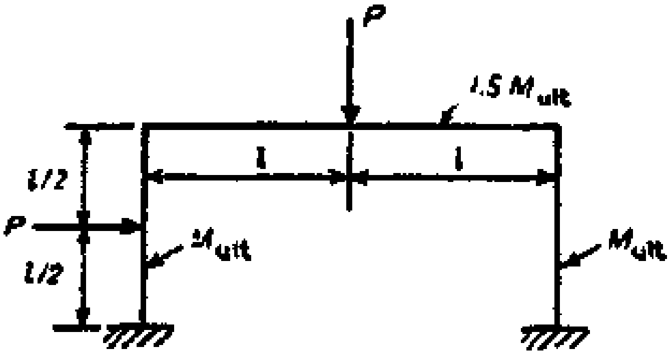


图 237

§ 66. 由不服从胡克定律的材料制成的梁的純弯曲. 在前面几节中,曾假設了梁的材料为完全塑性(图 216)的. 我們現在来研究材料的机械性質如图 239 中曲綫 AOB 所示的較普遍情形.

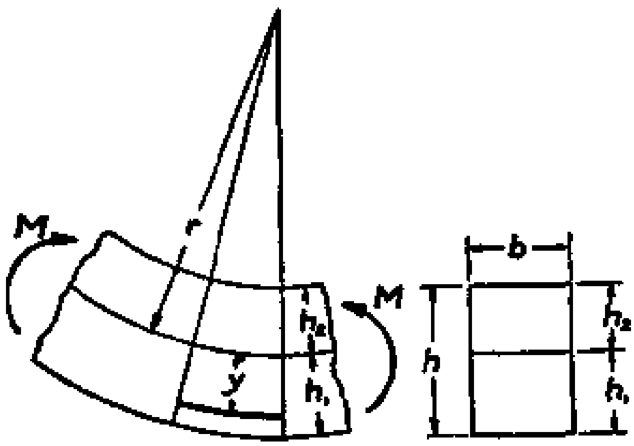


图 238

在討論这种梁的純弯曲时,同前面一样,我們假設在弯曲时梁的截面保持为平面;因此縱向纖維的伸长量和收縮量与其离中性面的距离成正比. 以此作为我們以后討論的根据,并假設在弯曲时应力与应变間的关系同在簡单拉伸和压縮的情形下一样,我們就不难求得梁中由任意給定大小的弯矩所产生的应力[1].

1) 此理論是由 St.-Venant 在他对 Navier 著作 (Résumé des leçons, 3d Ed., p. 173, 1864.)的注解中所发展出来的. 并参看 Eugen Mayer 的論文, *Phys. Z.*, 1907. 及 H. Herbert 的学位論文, Göttingen, 1909.

我們从一矩形截面梁开始（图 238），假設由于弯矩M而产生的中性面的曲率半径等于 r. 对于此情形，离中性面距离为 y 的纖維其单位伸长量为

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \tag{a}$$

以 h_1 和 h_2 分别表示中性軸至梁的上表面和下表面的距离，得最远纖維的伸长量为

$$\epsilon_1 = \frac{h_1}{r},\ \epsilon_2 = -\frac{h_2}{r}. \tag{b}$$

可以看出，如果我們知道了中性軸的位置和曲率半径 r，就很容易求得任意纖維的伸长量或收縮量. 此两值可由下列两静力学方程式求得：

$$\int_A \sigma dA = b\int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = 0, \tag{c}$$

$$\int_A \sigma y dA = b\int_{-h_2}^{h_1} \sigma y dy = M. \tag{d}$$

第一个方程式說明作用在梁任意截面上的法向力之和为零，因为这些力代表一个力偶. 第二个方程式說明这些力对中性軸的力矩等于弯矩M.

現在用式(c)来确定中性軸的位置. 由式(a)得

$$y = r\epsilon,\ dy = rd\epsilon. \tag{e}$$

代入式(c)，得

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = r\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0. \tag{f}$$

因此，中性軸的位置由积分 $\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon$ 为零而定. 为了确定此位置，我們运用图 239 中的曲綫 AOB，此曲綫代表梁的材料的拉伸-压縮試驗图，我們以Δ表示最大伸长量与最大收縮量的絕对值之和，即

$$\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r} = \frac{h}{r}. \tag{g}$$

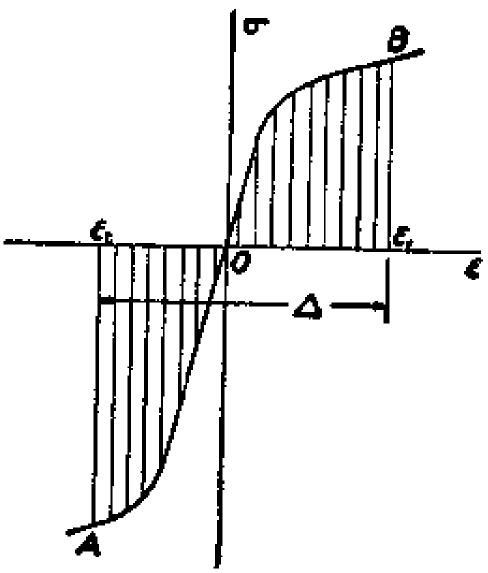


图 239

为了解式(f)，我們只要在图 239 中的水平軸上注出长度 Δ，以使图中的两阴綫面积相等. 这样，我們便求得最远纖維的应变 ϵ_1 和 ϵ_2. 于是由式(b)得

$$\frac{h_1}{h_2}=\left|\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right|, \tag{h}$$

此式定出了中性軸的位置. 鉴于伸长量 ϵ 与离中性軸的距离成正比，我們得出，如以 h 代Δ，曲綫 AOB 也可表示弯应力沿梁高度的分布.

在計算曲率半径 r 时，我們运用式(d). 以式(e)中的 y 和 dy 之值代入，可将式(d)写成下面的形式：

$$br^2\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma\epsilon d\epsilon=M. \tag{i}$$

从式(g)中看到 $r=h/\Delta$，在作一簡单的变换后，可将式(i)改写如下：

$$\frac{bh^3}{12}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{12}{\Delta^3}\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma\epsilon d\epsilon=M. \tag{j}$$

将此結果与下列用于服从胡克定律的梁弯曲的已知方程式

$$\frac{EI}{r}=M \tag{k}$$

作一比較，我們得出，在超过比例极限后，由弯矩 M 所产生的曲率可由下式算得：

$$\frac{E_rI}{r}=M, \tag{281}$$

式中 E_r 为**折合弹性模量**，它由下列表达式定义：

$$E_r=\frac{12}{\Delta^3}\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma\epsilon d\epsilon. \tag{282}$$

此表达式中的积分表示图 239 所示的阴綫面积对通过原点 O 的纵軸的力矩. 既然图中曲綫的纵坐标表示应力而横坐标表示应变.

因而此积分和 E_r 的量綱均为磅/吋^2、与弹性模量 E 的量綱相同.

对于相应于图 239 中給定曲綫的給定材料，E_r 值为 Δ 或 h/r 的函数. 取若干个 Δ 值,并按前面所述的方法运用图 239 中的曲綫,我們可确定各 Δ 值下的相应最大伸长量 ϵ_1 和 ϵ_2, 并由式(282)确定相应的 E_r 値. 这样,就可得出 E_r 表示为 $\Delta=h/r$ 的函数的曲綫. 在图 240 中示出了 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2, 而比例极限等于 30000 磅/吋^{2}的結构鋼的这种曲綫. 对于此情形,当 $\Delta<0.002$ 时，E_r 保持不变并等于 E. 有了此曲綫，相应于任意假設曲率的力矩就可由式(281)很快算出，于是我們便能繪出力矩 M 表示为 Δ 的函数的曲綫(图241).

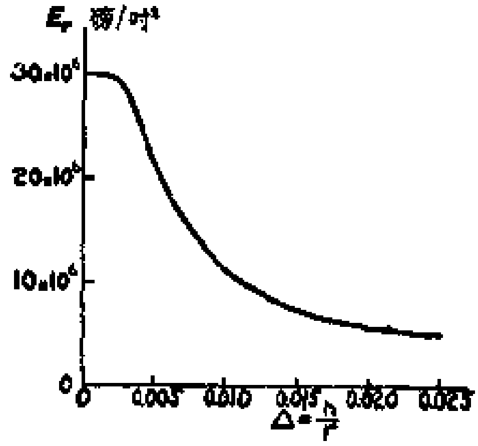


图 240

当 Δ 值很小时,材料服从胡克定律,而曲率与弯矩 M 成正比，如图 241 中直綫 OC 所示. 在超过比例极限后，曲率的变化率随弯矩的增大而增大.

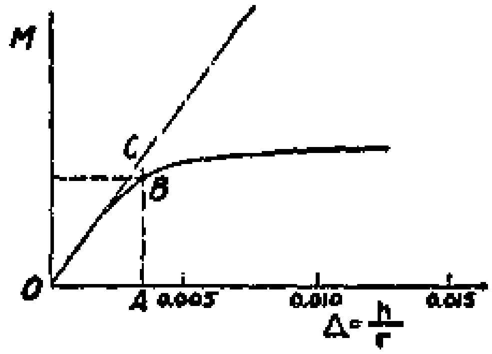


图 241

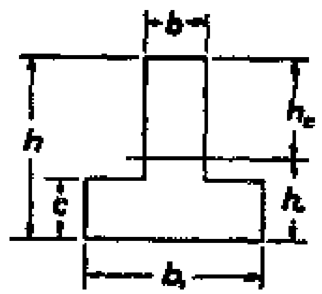


图 242

如果不是矩形而是任何其它的对称形状截面，則截面的寬度 b 为一变数,而式(c)和(d)必須写成下列形式:

$$\int_{-h_2}^{h_1} b\sigma dy = r\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} b\sigma d\epsilon = 0, \tag{l}$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} b\sigma y dy = r^2\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} b\sigma\epsilon d\epsilon = M. \tag{m}$$

以⊥形截面为例(图 242). 如果以 ϵ' 表示在腹板与凸緣連接处的縱向应变,式(l)和(m)就可写成下列形式:

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon'} \sigma d\epsilon + \int_{\epsilon'}^{\epsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma d\epsilon = 0, \tag{n}$$

$$br^2\left(\int_{\epsilon_2}^{\epsilon'} \sigma\epsilon d\epsilon + \int_{\epsilon'}^{\epsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma\epsilon d\epsilon\right) = M. \tag{o}$$

我們看出,对于此情形,拉伸試驗曲綫 AOB 的縱座标(图 243)在相应于截面凸緣的区域內必須按比值 b_1/b 放大. 在确定中性軸的位置时,我們按前面那样进行,并运用拉伸-压縮試驗图(图 243),而在水平軸上注出所假設长度 $\Delta = h/r$ 的位置,以使两阴綫面积的数值相等. 这样可得最远纖維的应变 ϵ_1 和 ϵ_2. 在腹板与凸緣連接处的应变 ϵ' 可由下式求得:

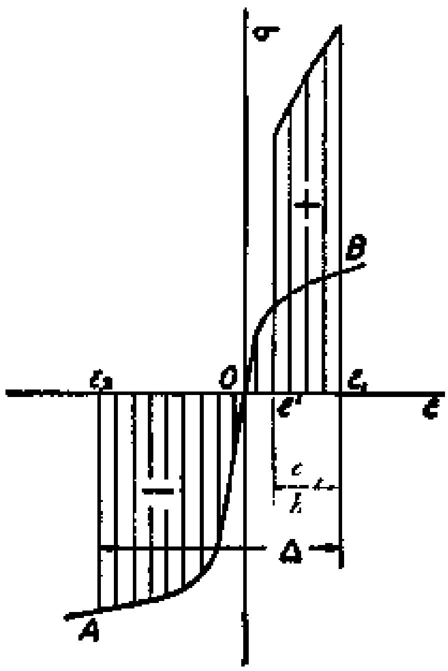


图 243

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon'}{\Delta} = \frac{c}{h},$$

式中 c 为凸緣厚度(图 242). 定出了中性軸的位置,并注意到式(o)括弧內的表达式表示图 243 中阴綫面积对通过原点 O 的縱軸的力矩,我們就可由式(o)很快算出相应于所假設的 $\Delta = h/r$ 值的力矩 M. 这样就可对⊥形截面梁作出一类似于图 241 所示的曲綫. 对于工字梁可同样处理.

在前面的例子中,曾用拉伸-压縮試驗图 AOB 来确定中性軸的位置和曲率半徑 r 的大小. 如果曲綫 AOB 有一分析表达式,上述值就可由純計算求得,而无需用图 239 和图 243 所示的图解法. 圣維南[1] (St. Venant)曾运用了应力应变曲綫的一个非常普遍的方

1) *Loc. cit.*, p. 366. 并参看 W. R. Osgood 的論文, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 11, p. 213, 1944.

程式．他假設了当弯曲超过比例极限时，拉应力和压应力沿梁高度的分布可由下列方程式表示：

$$\sigma=\sigma_0\left[1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^m\right],$$
$$\sigma'=\sigma_0'\left[1-\left(1-\frac{y_1}{b}\right)^n\right], \qquad \text{(p)}$$

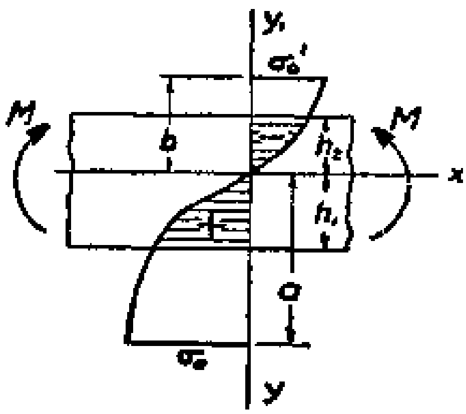


图 244

式中 σ_0 和 σ_0' 以及 a 和 b 均为一定的常数，这些常数連同指数 m 和 n 决定了图 244 所示的应力分布曲綫．当距离 y 和 y_1 非常小时，我們可假設

$$\left(1-\frac{y}{a}\right)^m\approx1-\frac{my}{a}, \text{ 和 } \left(1-\frac{y_1^n}{b}\right)\approx1-\frac{ny_1}{b},$$

而由式(p)得

$$\sigma=\frac{\sigma_0 my}{a}=\frac{\sigma_0 mr\epsilon}{a}, \text{ 和 } \sigma'=\frac{\sigma_0' ny_1}{b}=\frac{\sigma_0' nr\epsilon}{b}.$$

因此

$$\frac{\sigma_0 mr}{a}=E_1, \text{ 和 } \frac{\sigma_0' nr}{b}=E_2, \qquad \text{(q)}$$

式中 E_1 和 E_2 各为材料受非常小的拉伸和压縮时的弹性模量．如果材料的这两个弹性模量相等，則由式(p)所表示的两曲綫在中性軸处有一公切綫，而我們得

$$\frac{\sigma_0 m}{a}=\frac{\sigma_0' n}{b}. \qquad \text{(r)}$$

将式(p)用于平衡方程式(c)和(d)，就可算出每一特定情形下的中性軸的位置和曲率半径．以 $m=n=1$ 为例并运用式(q)，由式(p)得

$$\sigma=\frac{E_1y}{r}, \quad \sigma'=\frac{E_2y_1}{r}. \qquad \text{(s)}$$

此为梁的材料服从胡克定律，但拉伸弹性模量不同于压縮弹性模量的情形．以式(s)代入式(c)，并設梁的截面为矩形，得

$$E_1h_1^2=E_2h_2^2,$$

此式連同方程式 $h_1 + h_2 = h$ 給出

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}.$$

于是由式(d)得

$$\frac{E_1 h_1}{r} \cdot \frac{b h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}.$$

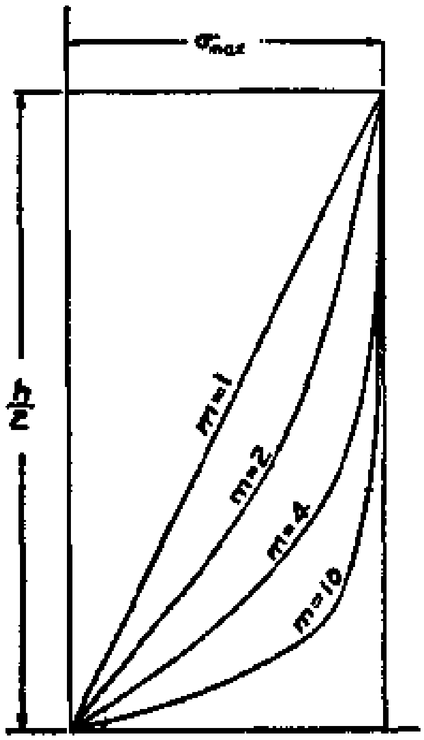


图 245

可以看出对于此情形，曲率可由式(281)用下列的折合弹性模量求得：

$$E_r = \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}. \quad (283)$$

有时用此模量来計算受压超过材料比例极限的柱的屈曲載荷（参看第158頁）.

作为另一个例子，我們假設拉伸和压縮时的应力应变曲綫相同；于是在式(p)中 $m = n$, $a = b$ 和 $\sigma_0 = \sigma_0'$. 并設 $a = b = h/2$, 对于矩形梁，由式(d)得

$$M = \sigma_{max} \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}. \quad (284)$$

对于此情形，中性軸通过截面的形心. 图 245 所示的曲綫給出了不同指数 m 下的应力分布. 隨着 m 值的增加，力矩趋近于下值：

$$M = \frac{3}{2} \cdot \sigma_{max} \cdot \frac{bh^2}{6}.$$

§67. 梁由超过弹性极限的横向載荷引起的弯曲. 对于梁受横向載荷而发生弯曲的情形，我們忽略了剪切对挠曲的影响[1]，并

1) 剪切的影响曾由 A. Eichinger 作了討論，*Final Report, 2d. Congr. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engng.*, Berlin, 1938.

假設了弯矩与曲率之間的关系可由对純弯曲导出的式(281)来表示。于是在計算超过比例极限后的撓度时，可以应用面积力矩法(参看原书上卷第147頁)。只需注意到对于此情形，弯曲刚度并非常数而随弯矩大小而变卽可。为了对矩形梁建立起此两值之間的关系，我們运用图241中的曲綫。对于任意的 $\Delta = h/r$ 值，縱坐标 AB 表示相应的弯矩值，而縱坐标 AC 則表示，如果材料服从胡克定律时应有的弯矩。于是

$$\overline{AB}:\overline{AC} = E_r:E.$$

这样，我們对每个所假設的弯矩值，求得了折合弯曲刚度与梁的初始弯曲刚度之比 E_rI/EI。以 β 表示此值，我們利用图246所示的曲綫来将它表示为弯矩 M 的函数。

为了說明此曲綫如何能用来計算撓度，我們来研究一簡支梁受中央載荷的情形(图247)。对于此情形，弯矩图为三角形 ACB。以 M_0 表示材料服从胡克定律时的最大弯矩大小。对于这一情形，梁的 mn 这一段所受应力已超过比例极限，在計算撓度时，必須用沿这段梁而变的折合弯曲刚度，而不是初始弯曲刚度。按照变截面梁的情形处理(参看原书上卷第212頁)，我們将弯矩图的縱坐标除以取自图246中的相应 β 值。这样就得到了**修正**弯矩图 $ADEFB$。将此修正的弯矩面积看作一假想載荷，并按通常方法处理，将梁任意截面处由假想載荷产生的弯矩除以 EI，我們便得梁在任意截面处的撓度。

我們在这里只討論了矩形梁的情形，但是，如果对系数 β 能得

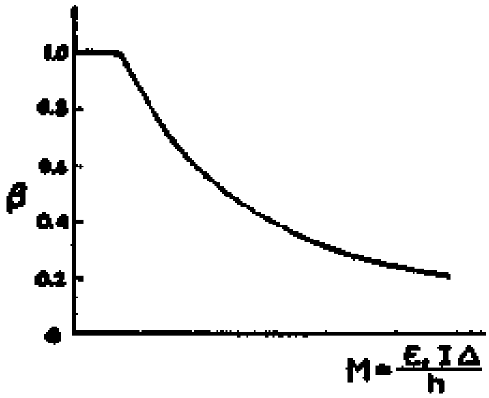


图 246

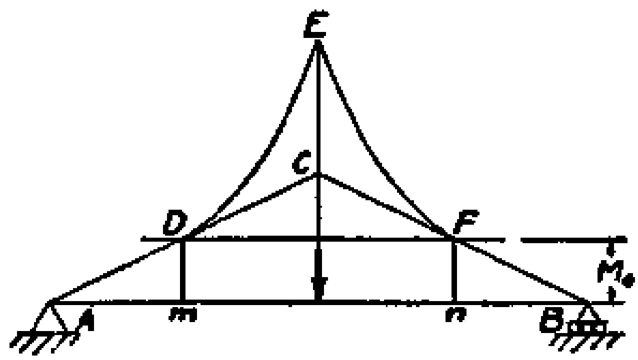


图 247

一类似于图 246 所示的曲綫，此法就可应用于其他情形. 此曲綫可以用图 243 所示的方法作出，或如果用分析法（例如 §66 中的式 (p) 給出了材料超过比例极限后的应力应变关系），就可算出此曲綫的縱坐标.

在我們討論梁由横向載荷引起的弯曲时，曾假設了問題为靜定的，因此作弯矩图时并不需要作关于撓度曲綫的任何討論. 对于靜不定的情形，問題变得較为复杂. 因为在超过比例极限时，多余的力和力矩就不再与作用的載荷成正比，因而迭加原理不能应用. 然而，此問題有时由于对称性的緣故可加以簡化. 例如，設图 247 中梁的两端为固定，我們由对称性得出，在四分之一处弯矩为零，而撓度曲綫由相同的四段所組成，它們可与一端受載荷的悬臂梁同样求得. 对于两端固定的梁承受均布載荷的情形，我們由对称性得出，两端的弯矩相等. 这些弯矩的大小可用試算法求得. 为此必須对这些弯矩假設一些値并作出修正弯矩图，如对图247中的情形所述的那样. 显然，准确的弯矩値即由修正弯矩面积所代表的总假想載荷为零时之値.

从上面的討論可以看出，对于超过比例极限的弯曲情形，計算多余力和多余弯矩时通常需要作繁复的研究. 然而，对于如結构鋼等具有显著屈服点的材料，如果我們将我們的研究局限于使結构达到极限載荷，而无需再增加載荷就开始屈服的加載期，則靜不定結构的分析就可以大大地加以簡化（参看 §65）.

§ 68. 由非弹性弯曲所产生的残余应力. 如果梁的弯曲超过了弹性极限，就会产生永久变形，移去載荷后变形并不消失. 卸去載荷后，受永久变形的纖維阻止受弹性应力的纖維恢复至其初始长度，这样就产生了一些**残余应力.** 为了确定这些应力在截面上的分布情形，我們从矩形梁这最簡单的情形开始，即此时弯曲时超过屈服点的应

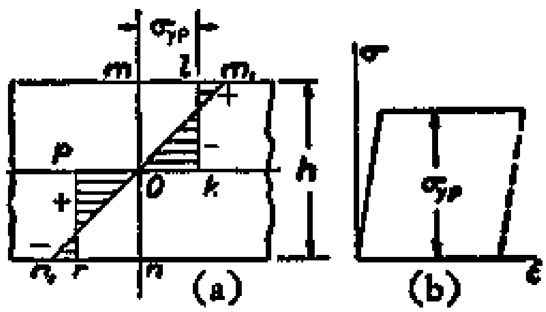


图 248

力分布可由图 248a 所示的两矩形 $Oklm$ 和 $Oprn$ 来表示. 我們还假設,如果等材料伸长到超过屈服点后卸去它的載荷,則在卸載时材料服从胡克定律(如图 248b 中虚綫所示). 由此假設可以得出,在梁卸載时要迭加上的弯曲应力按綫性規律变化,如图 248a 中直綫 m_1n_1 所示. 两种应力分布(在加載时为矩形,而在卸载时則为三角形)的迭加如图 248a 中阴綫面积所示. 它表示卸去載荷后遺留在梁內的应力. 此卽梁中由于塑性变形而产生的殘余应力[1]. 如图中所示的这些应力的符号是假設了初始弯曲时产生向下凸出的曲率而得.

由于矩形和三角形应力分布(图 248)两者表示同样大小的弯矩,因此可以得出,三角形 Omm_1 对軸綫 pOk 的力矩与矩形 $Oklm$ 对同一軸綫的力矩相等. 因此,由图中长度 mm_1 所表示的应力必定等于 $1\frac{1}{2}\sigma_{Y.P.}$,而在卸去梁的載荷后还留在最远纖維中的最大拉应力和压应力均等于 $1\frac{1}{2}\sigma_{Y.P.}$ 靠近中性面的纖維中的殘余应力高达 $\sigma_{Y.P.}$ 可以看出,由图中阴綫面积所示的应力分布,可化为两个大小相等而方向相反的处于平衡状态的力偶,其値均为 $\sigma_{Y.P.}bh^2/27$. 这些殘余应力的存在,可以将梁沿中性面鋸开通过实驗加以証明. 于是每一半梁均具有一定的曲率.

如果有一如图 248a 所示的有殘余应力的梁复为前次实驗中同样大小和同样方向的弯矩所弯曲,則直綫 m_1n_1 所表示的由这些弯矩所产生的应力将与由阴綫面积所表示的殘余应力相迭加,因此合成的应力分布将如矩形 $Oklm$ 和 $Onrp$ 所示. 最大的合成应力为 $\sigma_{Y.P.}$,而在此第二次弯曲中不再发生屈服. 因此由于第一次弯曲而产生的殘余应力具有这样一种本性,卽如果弯曲方向不变,它使杆在弹性范围內所能承受的弯矩增大. 在实践中,有时利用由預加載荷产生适当的殘余应力来改进結构弹性能力的这一現象. 一些特殊的情形将在后面討論(参看 §78).

---

1) 似乎是 A. Wöhler 首先使工程师們注意到梁由于塑性弯曲而产生的殘余应力的;参看作者的 "History of Strength of Materials", New York, p. 172, 1953.

对于矩形梁的非弹性弯曲的較普遍情形，应力分布由一曲綫表示，例如图 249a 中的曲綫 n_1Om_1. 仍假設在卸載时梁的材料服从胡克定律，我們看出，由于塑性流动而产生的殘余应力其分布情形如图中阴綫面积所示. 如果曲綫 n_1Om_1 按 §66 所述的来确定，则各纖維中殘余应力的大小就很容易求得. 如果曲綫 n_1Om_1 为未知，則殘余应力的分布可以通过实驗来研究，即将梁上平行于中性面的薄层逐层取下，并在每切下一层后测量梁內所生的弹性变形.

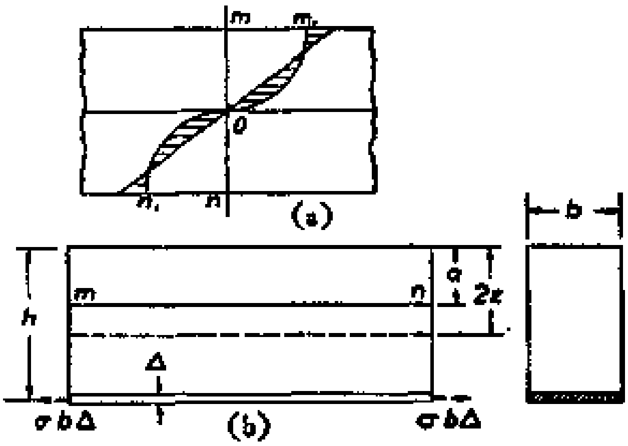


图 249

設梁下表面的殘余应力为拉应力，其大小为 σ. 于是在移去厚度为Δ的薄层后（如图 249b 所示），显而易見，在梁的其余部分所产生的变形将与由两个大小相等而方向相反的力 $\sigma b\Delta$（如图 249b 底部箭头所示）的作用所产生的变形相同. 我們将发現，在切去薄层后，梁的軸綫所具有的伸长量和曲率可由下列公式求得：

$$d(\epsilon)=\frac{\sigma b\Delta}{Ebh},\quad d\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\sigma b\Delta(h-\Delta)12}{2Eb(h-\Delta)^3}\approx\frac{\sigma b\Delta h}{2EI}. \qquad \text{(a)}$$

可以看出，如果量出了曲率 $d(1/r)$，最远纖維中的殘余拉应力 σ 的大小就可由式(a)很快算得.

要确定离梁上表面距离为 a 的纖維 mn（图 249b）中的殘余应力 σ_a 較为复杂. 在逐层取下后，我們最后得到 mn 层，我們可用一类似于式(a)的方程式来确定該层的应力. 然而此应力的大小 σ_a' 与原来的殘余应力 σ_a 不同，因为移去前面各层时会在梁的剩余部分內引起应力的变化. 显然，只有在研究这些变化后才有可能确定这所需的殘余应力 σ_a. 我們假設在逐层取下后，得到了如图 249b 中虛綫所示的纖維，此纖維离梁上表面的距离为 $2z$. 如果現

在取下厚度为Δ的一层新的薄层，此层内的应力 σ'_z 就可由下式求得：

$$d\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\sigma'_z bz\Delta}{EI_z},\text{ 式中 } I_z=\frac{b(2z)^3}{12}.$$

从而得

$$\sigma'_z=\frac{d(1/r)EI_z}{bz\Delta}. \tag{b}$$

移去此层时将在纖維 mn 中产生一直接应力，其大小为

$$\frac{\sigma'_z b\Delta}{2bz}, \tag{c}$$

和一弯曲应力，其大小为

$$\frac{\sigma'_z bz\Delta(a-z)}{I_z}. \tag{d}$$

式(c)和(d)表示由于移去了一层后而在纖維 mn 中引起的应力变化。現使 $2z$ 从 h 变到 a 以考虑所有各层，我們求得纖維 mn 中殘余应力的总变化如下：

$$\Sigma\frac{\sigma'_z\Delta}{2z}+\Sigma\frac{\sigma'_z bz\Delta(a-z)}{I_z}, \tag{e}$$

式中对于每一层的 σ'_z 均可用量得的 $d(1/r)$ 值由公式(b)算得。纖維 mn 中所需的殘余应力 σ_a 現可由应力 σ'_a 減去(e)值而得，σ'_a 可在公式(b)中以 a 代 $2z$ 而得。因此

$$\sigma_a=\sigma'_a-\Sigma\frac{\sigma'_z\Delta}{2z}-\Sigma\frac{\sigma'_z bz\Delta(a-z)}{I_z}. \tag{f}$$

由实驗来确定縱向殘余应力的这一方法不仅能应用于弯曲的情形，而且还能应用于棱柱杆承受縱向塑性变形的情形（参看§70）。例如，在測量冷拉黃銅管中的殘余应力时[1]，应用此法已奏

1) 此法是由 N. N. Davidenkov 所发展出来的，*loc. cit.*, p. 392，及 *Z. Metallkunde*, vol. 24, p. 25, 1932. 并参看 C. G. Anderson 于1935年在密歇根大学的博士論文，及 D. J. Demorest 和 D. O. Leeser 的論文，*Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 11, p. 45, 1953. 分析残余应力的几个方法在 C. S. Barrett 的論文中有說明，*ibid.*, vol. 2₁, p. 147, 1944. 并参看 M. Hetényi 編的 "Handbook of Experimental Stress Analysis" (New York, 1950.) 一书中 O. J. Horger 所著的章节。

成效．在取下金属薄层的工作中曾应用了一种特殊的化学溶液．曲率的变化曾用光测方法来测量．这样，就可得到有关冷拉黄銅管中殘余应力的完整資料．在发展管子制造中所用的适当的热处理时，这种資料具有非常实际的重要性．

§ 69. **超过弹性极限的扭轉．** 我們从圓軸的扭轉开始，假設在超过弹性极限后扭軸的截面仍保持为平面，而且其半径仍保持为直綫[1]．对于这一情形，离軸綫距离为 r 处剪应变 γ 可由适用于在弹性极限內扭轉时的公式(参看原书上卷第 282 頁)来确定，即

$$\gamma = r\theta, \tag{a}$$

式中 θ 为軸单位长度內的扭轉角．为了确定产生扭轉角 θ 所需的轉矩大小，必須知道超过比例极限后剪应变 γ 与剪应力 τ 間的关系．設图 250 中的图綫就表示所需的关系[2]．如果 a 为軸的外半径，則最大剪应变为 $a\theta$，而相应的最大剪应力可由图 250 中图綫的縱坐标 mn 表示．同样，在离軸綫为任意距离 r 处的剪应力可从图綫中很快求得．

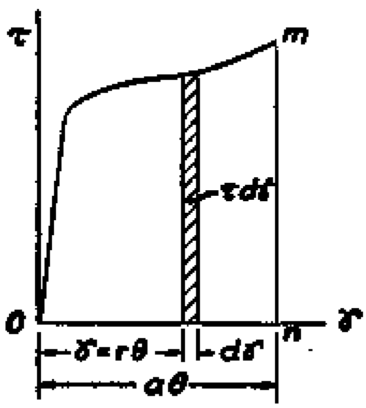


图 250

产生此假設的扭轉角 θ 所必須施加的轉矩 M_t 現在可由下列靜力学方程式求得：

$$\int_0^a 2\pi r^2 \tau dr = M_t. \tag{b}$$

将式(a)的

$$r = \frac{\gamma}{\theta}, \quad dr = \frac{d\gamma}{\theta}$$

---

1) 此理論是由 St.-Venant 所发展出来的，*J. de math.*, vol. 16, p, 373, 1871. 并参看 I. Todhunter 和 K. Pearson 的 "History of the Theory of Elasticity", vol. 2, Part I, p. 170. 关于此課題的深入討論，可参看 A. Nadai 的 "Theory of Flow and Fracture of Solids", New York, p. 347, 1950.

2) 此图綫可由薄管扭轉試驗的实驗求得．为了消除屈曲的可能性，可在一較厚的管子上作出一周向矩形槽以局部地減小壁厚．

代入此方程式，得

$$\frac{2\pi}{\theta^3}\int_0^{a\theta}\gamma^2\tau d\gamma = M_t. \tag{c}$$

此式左边的积分有一簡单的几何意义：它代表图 250 中的面积 $OmnO$ 对縱軸 $O\tau$ 的慣性矩．对任意假設的 $a\theta$ 值算得此慣性矩后，相应的轉矩就可由式(c)很快求得．因此，如果图 250 中的图綫为已知，就可繪出一表示 M_t 与 θ 間关系的曲綫．因为图 250 中的横坐标与径向距离成正比，曲綫 Om 也就按一定比例代表了剪应力沿軸半径的分布情形．如果在扭轉时材料始終服从胡克定律，我們便得 $\tau=\gamma G=r\theta G$，而由式(b)得

$$2\pi\theta G\int_0^a r^3dr=\theta GI_p=M_t, \tag{d}$$

此即熟知的圓軸在弹性极限內的扭轉方程式．

如果軸材料的屈服点非常明显，图 250 中图綫的曲綫部分就可用一縱坐标为 $\tau_{Y.P.}$ 的水平綫来代替．因此，当扭轉角很大时，剪应力沿軸半径的分布接近于均匀分布．相应轉矩的大小用 $(M_t)_{ult}$ 来表示．以 $\tau_{Y.P.}$ 代式(b)中的 τ，得 $(M_t)_{ult}$ 之值为

$$(M_t)_{ult}=\frac{2\pi a^3}{3}\tau_{Y.P.}. \tag{e}$$

当轉矩达到此値时，轉矩不再增加，但軸的扭轉繼續进行，直到材料发生显著的应变硬化为止．为比較起見，我們也計算一下开始屈服时的轉矩 $(M_t)_{Y.P.}$ 之值．于是，我們运用式(d)并将开始屈服时的 θ 值代入之．这个 θ 值可由式(a)取 $r=a$ 和 $\gamma=\gamma_{Y.P.}$ 而求得，即

$$\theta_{Y.P.}=\frac{\gamma_{Y.P.}}{a}=\frac{\tau_{Y.P.}}{aG}.$$

因此，由式(d)得

$$(M_t)_{Y.P.}=\theta_{Y.P.}GI_P=\frac{\pi a^3}{2}\tau_{Y.P.}. \tag{f}$$

从式(e)和(f)中可以看出

$$(M_t)_{ult}:(M_t)_{Y.P.}=\frac{4}{3}.$$

如果在施加轉矩 $(M_t)_{ult}$ 后我們卸去軸的載荷，則将有一些殘余应力遺留在軸内。重复前面应用于弯曲情形的同样推理(第 322 頁)，可求得这些应力的大小。以图 251 中水平綫 mn 的縱坐标表示由力矩 M_{ult} 所产生的沿軸半径均布的剪应力 $\tau_{Y.P.}$。在軸卸載时，材料服从胡克定律，而在軸卸載时被減去的扭轉应力按綫性規律变化，如图 251 中直綫 m_1n_1 所示。加載时为矩形和卸載时为三角形的这两种应力分布之差，表示在卸載后遺留在軸内的应力。

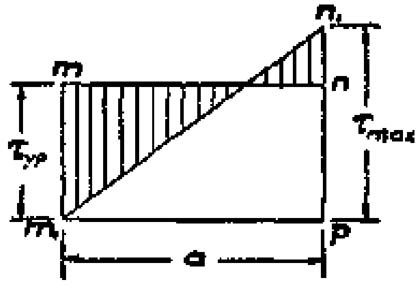


图 251

这些应力沿軸半径的分布如图 251 中的阴綫面积所示。用 τ_{max} 表示的縱坐标 m_1p 其大小可根据矩形和三角形应力分布两者表示同样大小的轉矩 M_{ult} 这一事实求得。对于矩形应力分布，此轉矩由式(e)給出。对于三角形应力分布，此轉矩的公式可由式(f)以 τ_{max} 代 $\tau_{Y.P.}$ 而求得：

$$\frac{2\pi a^3}{3}\ \tau_{Y.P.}=\frac{\pi a^3}{2}\tau_{max},$$

或

$$\tau_{max}=1\ \frac{1}{3}\tau_{Y.P.}.$$

可以看出，在軸表面上的殘余扭轉应力等于 $\frac{1}{3}\tau_{Y.P}$，而在中心附近則为 $\tau_{Y.P.}$。

殘余扭轉应力的分布也能由实験来加以研究。为此，必須从軸上逐层車去金屬薄层，并在移去每层后测量軸扭轉角的变化。

对于完全塑性材料(参看第 297 頁)，应用薄膜比拟法(第 205 頁)来研究超过屈服点的扭轉較为有利。当轉矩的大小較 $(M_t)_{Y.P.}$ 稍大时，軸的外部处于屈服状态，而内部則継續作弹性变形。为了将薄膜比拟法推广到此情形，薄膜須与一刚性圓錐 ACB (图 252) 联合应用，圓錐的斜率以适当的比例表示了屈服点应力 $\tau_{Y.P.}$。如果有一很小的压力 p 作用在薄膜上，則挠度也很小，而圓錐面并

不妨碍薄膜的自由撓曲. 因此其表面决定了弹性扭轉时的应力分布,正如前面所討論的(参看第 206 頁). 随着压力的增大,薄膜的撓度也增大,最后薄膜的外表面与此刚性圓錐相接触,如图 252 所示. 此情形表示了超过屈服点的扭轉. 与圓錐貼合的薄膜外表面有一相应于屈服点应力 $\tau_{Y.P.}$ 的等斜率. 薄膜的内部分 mn 相应于軸的内部分,它处于弹性状态. 薄膜与边緣面 AB 之間容积的两倍仍代表轉矩. 由此得出,圓錐容积的两倍必定表示 M_{ult} 之值. 由于圓錐的斜率为 $\tau_{Y.P.}$,因此其高度等于 $a\tau_{Y.P.}$,其容积的两倍为 $\frac{2}{3}\pi a^2 a\tau_{Y.P.}$,这与式(e)吻合.

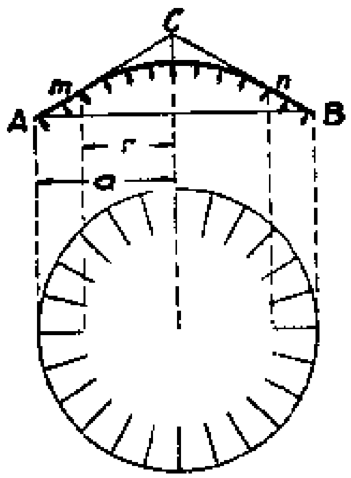


图 252

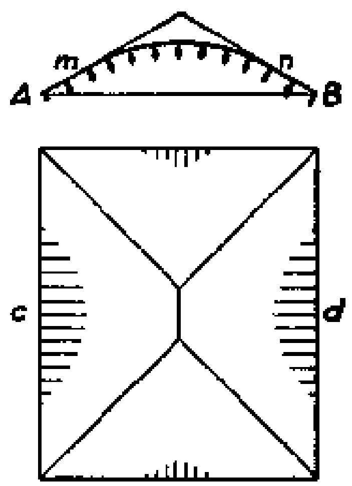


图 253

对于非圓截面軸,也可应用同样方法,在确定軸中发生屈服的部分时此法非常有效. 以一矩形軸为例. 在研究此軸超过其屈服点的扭轉时,薄膜須与一刚性頂面(图 253)联合应用,此頂面在各点有等斜率,它按一定的比例表示屈服点应力 $\tau_{Y.P.}$. 显然,随着均布压力的增加,撓曲的薄膜首先在矩形长边的中点 c 和 d 处与頂接触,在这些点上开始屈服. 而在較高的压力下,薄膜的某些部分将与頂貼合,如图中的阴綫面积所示. 这些面积定出了材料发生屈服的区域. 在軸的其余部分只有弹性变形. 再增加薄膜上的压力时,与頂接触的部分即塑性变形区域也增大. 頂与平面 AB 間容积的两倍显然表示矩形軸的 M_{ult} 之值.

如果有一熟鉄矩形杆承受超过屈服点的扭轉，使截面适当地腐蝕就可显出塑性流动区域．經腐蝕后，在截面的塑性区域內会出現黑色平行綫，其方向如图 253 所示．这些綫表明金屬沿着平行于軸綫的各层滑移，滑移是由屈服点应力引起的[1]．

§ 70. 厚壁圓筒在內压作用下的塑性变形[2]． 在討論厚壁圓筒在內压 p 作用下的弹性变形时，我們巳經知道（参看第 181 頁），在离圓筒軸綫的径向距离为 r 处的径向和切向应力可由下式表示：

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \tag{a}$$

式中 a 和 b 各为圓筒的內半径和外半径．最大的切向拉应力和最大的径向压应力发生在圓筒的內表面上．在該表面上还作用有最大剪应力，其大小为

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)_{r=a} = \frac{pb^2}{b^2 - a^2}. \tag{b}$$

逐漸增加內压，終致內表面上的材料开始屈服．此情形发生在最大剪应力[式(b)]与屈服点应力 $\tau_{Y.P.}$ 相等之时[3]．将此值代入公式(b)，得开始屈服时的压力为

$$p_{Y.P.} = \tau_{Y.P.}\frac{b^2 - a^2}{b^2}. \tag{c}$$

例如，設 $b = 2a$，我們对于此特定情形求得 $p_{Y.P.} = 0.750\tau_{Y.P.}$．随着压力的継續增加，塑性变形越来越深入筒壁，最后，在我們称之为 p_{ult} 的一定压力下，整个筒壁处于屈服状态．如果我們假設

1) 对各种不同形状的扭杆获得的这些綫的有趣的相片示于 A. Nadai 的論文中，*Trans. A. S. M. E.*, vol. 53, p. 29, 1931；并参看他的著作，Theory of Flow and Fracture of Solids, p. 494, 1950.

2) 在承受內压的厚壁圓筒中的塑性流动曾由 St.-Venant 作了研究，参看 *Compt. rend.*, vol., 24, p. 1009, 1872；并参看 I. Todhunter 和 K. Pearson 的 "History of the Theory of Elasticity", vol. 2, Part I, p. 172；及 L. B. Turner 的論文，*Cambridge Phil, Soc. Trans.*, vol. 21, p. 377, 1913.

3) 关于材料在各种应力状态下的屈服問題在 §82 中有討論．这里我們假設 $\tau_{Y.P.}$ 之値与扭轉的情形相同（参看第 326 頁）．

材料为完全塑性的，即屈服在大小为 $\tau_{Y.P.}$ 的不变剪应力作用下发生，则在此屈服状态下，筒壁内的应力分布不难加以研究。由此得出，对于塑性变形区域内的每一点，有方程式

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \tau_{Y.P.} \tag{d}$$

用以确定主应力 σ_r 和 σ_t 的另一方程式可由研究图 127 所示的筒壁上体元的平衡而得。根据我們前面的討論(参看第 180 頁)，平衡方程式为

$$\sigma_t - \sigma_r - r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \tag{e}$$

将式(d)中两主应力之差代入，得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\tau_{Y.P.}}{r}. \tag{f}$$

将此方程式积分得

$$\sigma_r = 2\tau_{Y.P.}\ln r + C. \tag{g}$$

积分常数 C 可由圓筒外表面上即 $r = b$ 处的径向应力 σ_r 为零这一条件求得。由此得

$$0 = 2\tau_{Y.P.}\ln b + C, \quad C = -2\tau_{Y.P.}\ln b.$$

将此积分常数 C 之値代入式(g)，得

$$\sigma_r = 2\tau_{Y.P.}\ln\frac{r}{b}. \tag{285}$$

对于圓筒的內表面，由此得

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2\tau_{Y.P.}\ln\frac{a}{b}, \tag{286}$$

使整个筒壁处于塑性流动状态所需的压力为

$$P_{ult} = -(\sigma_r)_{r=a} = -2\tau_{Y.P.}\ln\frac{a}{b}.$$

仍取 $b = 2a$，得

$$P_{ult} = 2\tau_{Y.P.}\ln 2 = 0.693(2\tau_{Y.P.}).$$

有了径向应力的式(285)后，我們由式(d)求得切向应力为

$$\sigma_t = 2\tau_{Y.P.}\left(1 + \ln\frac{r}{b}\right). \tag{287}$$

如果 $b=2a$，此表达式就变成

$$(\sigma_t)_{r=a}=2\tau_{Y.P.}\left(1+\ln\frac{a}{b}\right)=0.307(2\tau_{Y.P.}),$$

$$(\sigma_t)_{r=b}=2\tau_{Y.P.}.$$

对于 $b=2a$ 的特定情形，应力 σ_r 和 σ_t 沿筒壁厚度的分布在图 254 中分别用曲綫 mln 和 st 表示．如果使圓筒的材料处于屈服状态后，我們去除內压，就有一些殘余应力遺留在筒壁內．如果我們假設在卸載时圓筒的材料服从胡克定律，则这些应力就不难算得．对于此情形，在圓筒卸載时要減去的应力可由式 (a) 求得，只需在这些表达式中以 p_{ult} 代 p 即可．对于 $b=2a$ 的特定情形，这些应力在图 254 中由曲綫 s_1t_1 和 mkn 表示．于是阴綫面

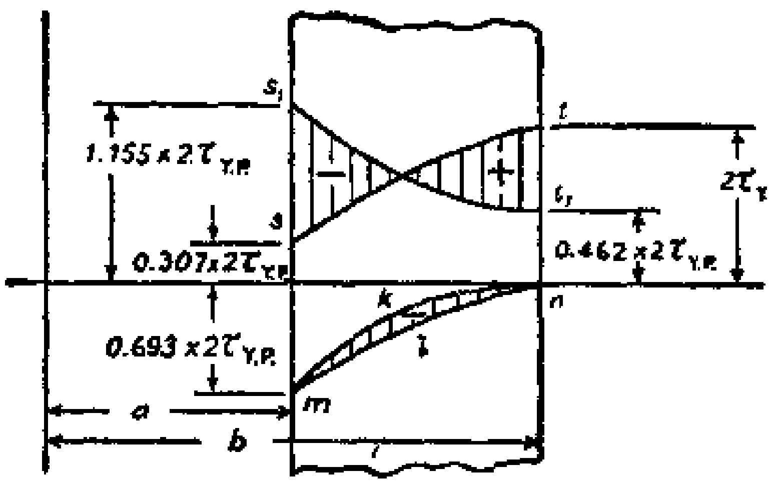


图 254

积便表示筒壁中的殘余应力．可以看出，由于塑性变形之故，在筒壁部分中产生了相当大的切向压应力[1]．如使具有这种殘余应力的圓筒再承受大小为 p_{ult} 的內压，則由此压力所产生的，如曲綫 s_1t_1 所示的切向应力将与由阴綫面积所表示的殘余应力相迭加，因此合成应力分布将如曲綫 st 所示．最大合成应力为 $2\tau_{Y.P.}$，而在此第二次施加內压时将不再发生屈服．因此，由圓筒的塑性膨胀所产生的殘余应力具有这样一种本性，就是使圓筒在弹性范围內

1) 設此压縮应力較屈服点应力为小，并在卸載时不发生屈服．卸載时的屈服情形曾由 L. B. Turner 作了研究，*loc. cit.*, p. 386.

所能承受的压力增加． 在制造必须承受巨大的气体內压的枪炮时，有时用到这一事实[1]．

在討論中曾假設了，所作用的內压使整个圓筒处于屈服状态，但此法也能毫无困难地应用于筒壁只有內层部分处于屈服状态，而外层部分則处于弹性状态的情形．設所作用的压力 p' 大于 $p_{Y.P.}$ 但小于 p_{ult}，并令 c 为筒壁的塑性区域与弹性区域的分界圓柱面半径．在此两区域間将有径向压力作用，我們将称之为 X． 此压力的大小可由研究筒壁的弹性外层部分而求得．此部分的最大剪应力 τ_{max} 可由式(b)中以 c 代 a 和以 X 代 p 而求得，即

$$\tau_{max} = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}.$$

既然圓柱面 $r = c$ 分开了弹性与塑性区域，因此在此面上的材料恰好达到屈服点．因此 $\tau_{max} = \tau_{Y.P.}$． 于是，用以确定压力 X 的方程式为

$$\tau_{Y.P.} = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}, \tag{h}$$

从而我們得

$$X = \frac{\tau_{Y.P.}(b^2 - c^2)}{b^2}. \tag{i}$$

有了此压力，我們就可用类似于式(a)的方程式很快地算出弹性区域內任意点的应力[2]．

为了計算筒壁塑性区域內的应力，我們运用式(g)．积分常数 C 可由 $r = c$ 时 $\sigma_r = -X$ 这一条件求得，即

$$-X = 2\tau_{Y.P.}\ln c + C, \quad C = -X - 2\tau_{Y.P.}\ln c.$$

将此 C 值代入式(g)并运用式(i)，得

$$\sigma_r = 2\tau_{Y.P.}\ln\frac{r}{c} - \frac{\tau_{Y.P.}(b^2 - c^2)}{b^2}. \tag{288}$$

---

1) 关于初塑性变形的这种用途的說明可在 L. Jacob 的著作中見到，Résistance et construction des bouches à feu: Autofretage, Paris. 并参看 S. J. Brown, *U. S. Naval Inst. Proc.*, vol., 46, p. 1941, 1920.

2) 在这些方程式中，必須用半径 c 而不用 a，用 X 而不用 p.

取 r 等于圆筒的內半径 a，我們便求得必須用来使筒壁中产生的塑性流动达到相应于半径 $r=c$ 的深度时的压力 p'. 其大小为

$$p'=-2\tau_{Y.P.}\ln\frac{a}{c}+\frac{\tau_{Y.P.}(b^2-c^2)}{b^2}. \qquad (289)$$

取前面 $b=2a$ 的这一例子并設 $c=1.5a$，由式(289)得 $p'=0.624(2\tau_{Y.P.})$.

切向应力 σ_t 的分布可由式(d)求得，即

$$\sigma_t=2\tau_{Y.P.}+\sigma_r=2\tau_{Y.P.}\ln\frac{r}{c}+\tau_{Y.P.}\frac{b^2+c^2}{b^2}. \qquad (290)$$

当 $r=c$ 时，右边第一項为零，而 σ_t 之値变成与压力 X 在筒壁的相邻弹性区域內所产生的切向应力相等. 式(289)和(290)給出了在承受塑性变形的筒壁內层部分产生的应力. 对于保持为弹性的外层部分，必須运用类似于式(a)的方程式. 这样就可完全解决圆筒只有一部分承受塑性变形的应力分布問題.

如果在筒壁发生局部屈服后去除內压 p'，則将有一些殘余应力遺留在筒壁內. 发生塑性变形的筒壁內层部分并不恢复至其初始直径，它受到从筒壁的弹性外层部分这方面传来的压力. 这样产生的应力分布，与組合圆筒中由于冷縮装配而产生的类似(参看§41). 为了計算这些应力，我們可以按前面所述的，并在图 254 中举例說明的完全一样地处理.

所有这些計算均基于材料在超过屈服点而屈服时，应力并不增加这一假設. 如果不是如此，殘余应力就不能如上面所述那样簡单地来計算，而必須依靠殘余应力的实驗来确定. 对于这种情形，可应用一类似于在确定殘余弯曲应力时所用的方法. 我們从圆筒內表面着手，逐层切去金属薄层[1]，并在每切一次后，就測量产生在圆筒外表面上的軸向和周向应变. 这种測量对計算殘余应力提供了足够的資料.

---

1) 从外表面上切削的一些实驗也曾做过，参看 H. Bühler 和 W. Schreiber, *Metallwissensch. u. Tech.*, 1954 年 9 月；及 "Residual Stresses in Metals and Metal Construction" (1954 年版)一书中 Bühler 所著的章节.

圆筒中的殘余应力不仅能由于上面所述的塑性变形而产生，而且也能在各种热处理过程中，由于冷却不均匀和再結晶时金属体积的变化而产生. 有时这种应力变得头等重要，例如在大型鍛件中，为了确定这些应力，已发展了若干方法[1].

1) 这种研究首先是由 N. Kalakoutzky 所作的，St. Petersburg, 1887. 并参看 N. Kalakoutzky, Investigation into the Internal Stress in Cast Iron and Steel, London, 1888. 此問題的完整解是由 G. Sachs 所給出的，*Z. Metallkunde*, vol. 19, p. 352, 1927; 及 *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 71, p. 1511, 1927. 这两篇論文載有此課題的全部参考书目. 測量管子中残余应力的方法曾由 N. N. Davidenkov 作了进一步的改进，*J. Tech. Phys.* (Leningrad), vol. 1, 1931, 并参看 G. Sachs, *Trans. A. S. M. E.*, p. 821, 1939. 关于金屬塑性变形和残余应力的参考书目載于 G. Sachs 的著作中，Handbuch der Metallphysik, Leipzig, vol. 3, Part I, 1937. 并参看 O. J. Horger 的論文，*loc. cit.*, p. 381. 油矿泵杆中的残余应力在 R. E. Hanslip 的論文中有討論，*Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 10_1, p. 97, 1952.

第十章　材料的机械性質

§ 71. **总論.** 前面几章研究了分析結构上由各种力引起的应力分布的方法. 知道了应力后，設計师必定这样来选择結构的材料和尺寸，以使其在使用中能安全地維持各种負荷状态. 为此就需要有关于結构材料在各种应力状态下的弹性性質和強度特性的知識. 在分析应力时，通常假設材料服从胡克定律，于是在解題时，只要知道了材料的弹性模量就够了. 但是在选择結构的安全尺寸时，这一知識尙嫌不足. 設計师还須知道一些极限，在这些极限內材料在各种应力状态下均可当作完全弹性处理；以及在超过这些极限后材料的性状. 这种資料只能由实驗研究得来. 材料实驗室均备有使試样产生如拉伸、压縮、扭轉和弯曲等典型变形的試驗机[1].

为使試驗結果可相互比較，对試样定出了一定的尺寸，而且被公認为标准. 在結构材料的各种机械試驗中，最常用的无疑是拉伸試驗. 在美国，标准的拉伸試样是圓形的，其直径为 1/2 吋，而标距长度为 2 吋，于是

$$\frac{l}{d}=4 \quad 或 \quad l=4.51\sqrt{A},$$

式中 $A=\pi d^2/4$ 为試样的截面积[2]. 如用矩形試样，其长度与截面积間的关系最好取得与圓形試样的相同.

試样圓柱部分的长度总是比标距 l 稍大，通常至少是 $l+d$.

---

1) 关于材料試驗机的叙述和該論題的参考书目，可参看 M. Hetényi 所編的 "Handbook of Experimental Stress Analysis" (New York, 1950) 一书中 J. Marin 所著的章节. 并参看 E. Siebel 所編的 "Handbuch der Werkstoffprüfung" (Stuttgart, 1940) 一书中 A. Eichinger 所著的章节.

2) 在中欧，圓形試样采用两种不同的尺寸：
(1) 长型試样，$l=10d=11.3\sqrt{A}$，和(2)短型試样，$l=5d=5.65\sqrt{A}$.

試样的两端通常做成具有較大的截面，以防止試样在試验机的軋头內破裂，因該处由于应力分布的局部不規則性，其应力状态較为严重．图 255a 表示一个 $l=10d$ 的圓柱形試样，图中还示出了試驗机軋头內的球形座，它用以保証載荷作用点位于中心．图 255b 表示一扁平的矩形試样．

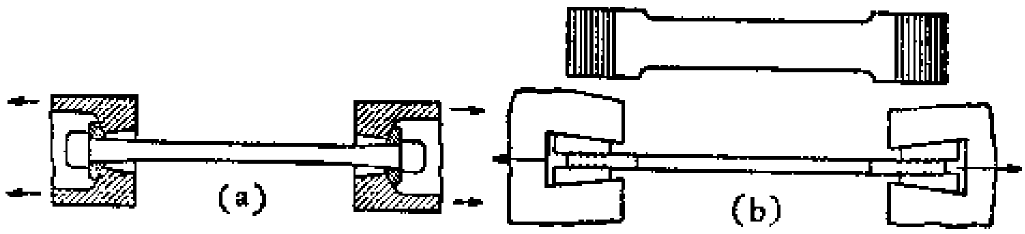


图 255

拉伸試驗机通常备有一套能自动繪制拉伸試驗图的裝置，拉伸試驗图表示載荷 P 与試样伸长量 δ 之間的关系．該图显示了材料的重要特性．例如，图 256 表示一組含碳量不同的碳鋼的拉伸試驗图．可以看出，当含碳量增加时，鋼的极限強度也增加，但同时断裂前的伸长量却減少，因而材料的延性較差．高碳鋼是比較脆的，直到应力达到一个很高的数值为止，它一直服从胡克定律，然后在伸长量非常小的情况下断裂．另一方面，含碳量少的軟鋼是可以延展的，它在断裂前伸长很多．在下面的討論中，我們将从研究脆性材料的拉伸試驗开始．

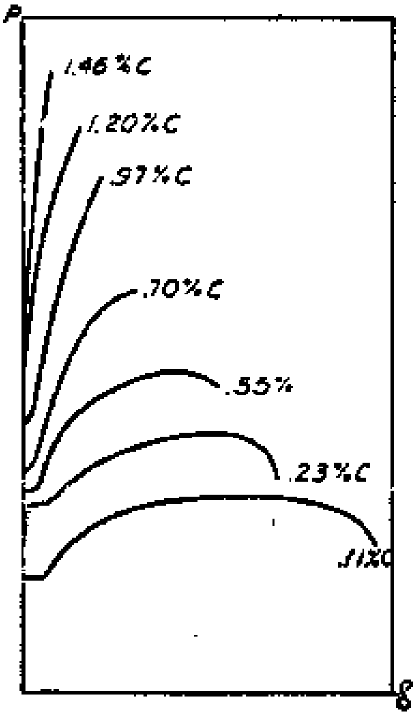


图 256

§ 72. **脆性材料的拉伸試驗．** 作为脆性材料的一例，我們从研究玻璃开始．玻璃服从胡克定律实际上直到断裂时为止，其拉伸試驗图可近似地用直綫 OA 表示（图 257）．玻璃的普通拉伸試驗常得出非常低的极限強度，而引起断裂所需的相应的功（如图

257 中阴綫面积 OAB 所示)比起分离分子时理論上所需的能量来是非常小的．后者可由使玻璃熔化而后蒸发的实验得到．于是分离分子所需的功将与蒸发时所需的热量同数量級．实验指出，这一数量比拉伸試驗时所需的功(图 257)大几千倍．

为了說明这一差异，格里菲斯(Griffith)提出了这样的理論[1]：引起玻璃試样断裂所需的能量在体积内不是均匀地分布的，而在体积内有促使应力提高的显微裂縫所引起的能量集中的区域．把这些显微裂縫之一看作是受均匀拉伸的板上的一狹窄椭圓孔(图 258)，并运用椭圓孔周围应力的已知表达式(参看 §57)，我們就可看出板(单位厚度)的应变能由于孔的存在而減小了[2]

$$\frac{\pi l^2\sigma^2}{4E}. \tag{a}$$

在此表达式中 l 为裂縫长度，σ 为均布的拉应力，而 E 为材料的弹性模量．

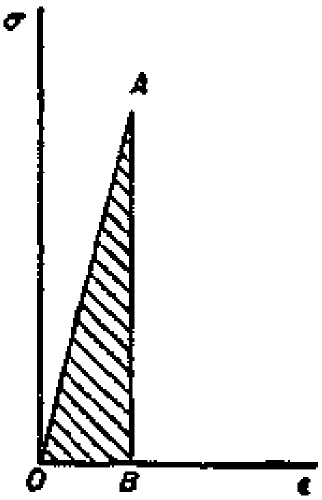


图 257

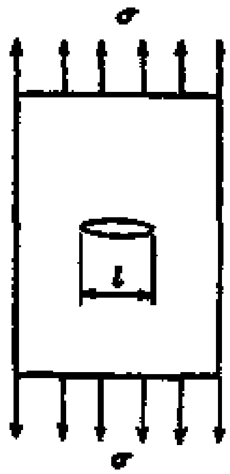


图 258

我們再来研究在裂縫开始沿板扩展，因而引起断裂之处的应力大小．只有在裂縫长度增量 dl 所引起的**表面能**的增加为板应

1) A. A. Griffith, *Trans. Roy. Soc.* (London), A, vol. 221, pp. 163—198, 1921. 并参看 *Proc. Internat. Congr. Appl. Mech.*, Delft, pp. 55—63, 1924.

2) 設裂縫之間的距离較大，以致由于裂縫而引起的应力分布的扰动可看作彼此无关．于是完全可以只把一个垂直于应力的裂縫看作是最不利的情况．

变能的相应減小所补償时，裂縫的这种扩展才可能在不作任何附加功时发生．以 S 表示表面张力，于是极限应力的方程式为

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{\pi l^2\sigma_{ult}^2}{4E}\right)dl = 2S \tag{b}$$

或

$$l = \frac{4SE}{\pi\sigma_{ult}^2}. \tag{c}$$

为了确定表面张力 S，格里菲斯对不同温度下的熔化玻璃作了一系列試驗．在这些温度下玻璃保持为粘性液体．設 S 随温度作綫性变化，于是在室温下的 S 值可用外推法求得．玻璃的极限強度 σ_{ult} 由通常的拉伸試驗求得后，裂縫长度 l 就可由式(c)算得[1]．从式(c)中还可以看出，极限拉伸強度与 l 的平方根成反比．

为了証实这一理論，格里菲斯用承受內压的薄玻璃管作了实驗．用一金鋼鉆刀做出与圓柱軸綫平行但长度不同的一些人造裂縫，由此实驗他求得了极限应力 σ_{ult}．它与式(c)的理論推算值相当符合．格里菲斯用細的玻璃纖維作了进一步的实驗，对于直径为 3.3×10^{-3} 毫米的纖維，求得极限拉伸強度为 3.5×10^4 公斤/厘米^2(約 5×10^5 磅/吋^2)．此值比以前对粗試样求得的大 20 倍左右．如果注意到在細纖維的拉拔过程中，并沒有最初垂直于纖維长度的任何裂縫，則細纖維的这个相当大的強度也就可根据格里菲斯的理論来解释．格里菲斯指出，在过了一段时間后，纖維会失去一部分強度．在纖維被拉拔后立刻将其作实驗，对于 0.5 毫米的直径，他成功地获得了 6.3×10^4 公斤/厘米^2 (約 9×10^5 磅/吋^2) 这么高的极限強度．此值为考慮了分子力而推算出的理論強度的一半左右．

曾用从大的岩盐立方晶体上切下的单晶体試样作了脆性材料拉伸強度的其他研究[2]．由这些实驗知，于室温下在空气中試驗

1) 格里菲斯的实驗得出了 l 的数值，其数量級是 1×10^{-3} 厘米．

2) 参看 A. Joffe 的論文，*Z. Phys.*, vol. 22, p. 286, 1924. 并参看 *Proc. Internat. Congr. Appl. Mech.*, Delft, p. 64, 1924. 对 Joffe 著作的进一步討論載于 E. Schmid 和 W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, p. 271, 1935.

时，該材料的极限強度只有 45 公斤/厘米^2. 当同一試样浸在热水中試驗时，它在 80 公斤/厘米^{2}的应力下达到了屈服点，然后作塑性伸长，直到在 16000 公斤/厘米^{2}的应力下发生最后断裂时为止. 极限应力的这一数值同兹維基(F. Zwicky)算得的 20000 公斤/厘米^{2}的理論強度相差不大[1]. 这些实驗証实了，試样表面的光滑性对試样的拉伸強度有很大的影响.

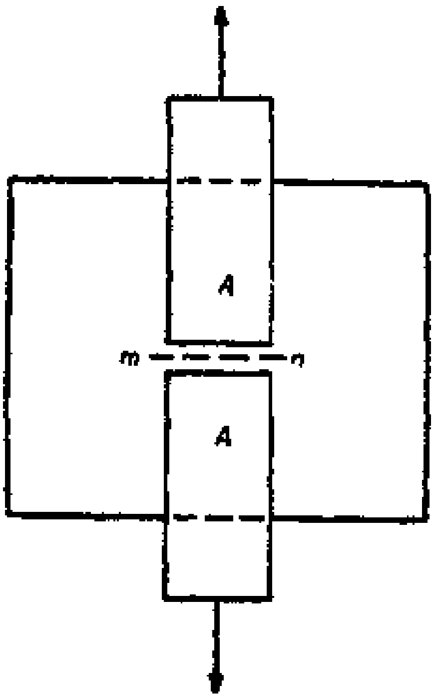


图 259

奥罗万(E. Orowan)作了关于云母片拉伸強度的有趣实驗[2]. 他不用从云母片上切下的标准拉伸試样(图 255b)，而用通过夹板 A 在 mn 区域承受拉伸的云母片(图 259). 用了这一装置，极限強度就比标准拉伸試样的大十倍左右. 这表明在标准試样(图 259)边緣处的缺陷会大大地降低強度，而用了图 259 所示的装置就消除了缺陷的影响，因此能获得較高的极限強度. 所有以前的实驗均支持格里菲斯的假設，即脆性材料的拉伸強度所以低是由于在試样的表面上具有显微裂縫和伤痕等缺陷所致.

如果缺陷的存在对脆性材料的強度影响很大，則极限強度与試样的大小有关，并随着尺寸的增加而降低的推測似乎是合乎邏輯的，因为这时具有瑕疵的概率增加了. **尺寸效应**是在由冲击試驗[3]或疲劳試驗[4]所产生的那种脆性断裂的情形下被引起注意的，而魏伯尔(Weibull)在統計的基础上作了解释[5]. 他指出，对于一

1) 参看 *Z. Phys.*, vol. 24, p. 131, 1923.
2) 参看 *Z. Phys.*, vol. 82, p. 235, 1933.
3) M. Charpy, *Assoc. internat. essai matériaux, 6th Congr.*. New York, vol. 4, p. 5, 1912.
4) R. E. Peterson, *J. Appl. Mech.*, vol. 1, p. 79, 1933.
5) W. Weibull, *Proc. Roy. Swed. Inst. Engrg. Research* (Stockholm), No. 151, 1939.

給定材料．如用体积各为 V_1 和 V_2 的两个几何相似的試样，則由拉伸試驗所确定的极限強度将成比例：

$$\frac{(\sigma_{ult})_1}{(\sigma_{ult})_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/m}, \tag{d}$$

式中 m 为材料的常数．由式(d)确定 m 后，任意大小的試样的 σ_{ult} 値就可推算得到．达維靖科夫(N. Davidenkov) 用高磷鋼作了这种实驗[1]．他用两个不同直径($d = 10$ 毫米和 $d = 4$ 毫米)和不同长度($l = 50$ 毫米和 $l = 20$ 毫米)的試样作了实驗，求得了相应的 σ_{ult} 値 (57.6 公斤/毫米^{2}和 65.0 公斤/毫米^2)．然后由式(d)定出 $m = 23.5$．对于此値，算得 $d = 1$ 毫米和 $l = 5$ 毫米的試样的极限強度为 77.7 公斤/毫米^2．实驗得出的数值为 75.0 公斤/毫米^2，因此理論与实驗相当符合．

用了同一統計方法，魏伯尔还算出了[2]矩形杆受純弯曲时的极限強度，并求得比値

$$\frac{(\sigma_{ult})_{弯}}{(\sigma_{ult})_{拉}} = (2m + 2)^{1/m}. \tag{e}$$

此公式也为达維靖科夫的实驗所証实．他的試驗求得此比值为 1.40，而对 $m = 24$ 算得的理論数值則为 1.41．

在魏伯尔的論文中討論了其他几种一般形式的应力分布．他还談到了与統計理論相当符合的各种实驗研究．这一理論只能应用于脆性断裂的材料，而不能应用于断裂前有显著塑性变形的材料．塑性变形将緩和缺陷点处的局部应力集中，因而在确定破坏时重要的只是平均应力．

§ 73. 延性材料的拉伸試驗． 結构中所用的鋼和其他金属等延性材料，其机械性質通常由拉伸試驗获得．图 260 表示結构軟鋼的拉伸試驗图．根据此图可以获得**屈服点**、**极限强度**和**塑性伸长量**等重要特性．

1) 对于他的論文的英譯文，可參看 *J. Appl. Mech.*, vol. 14, p. 63, 1947.

2) W. Weibull, op. cit.

在确定**比例极限**时，需要用灵敏的伸长計来探察对拉伸試験图中的直綫的微小偏差. 显然，所求得的此极限的位置同仪器的灵敏度大有关系. 为使获得的結果較为一致，常以一个指定的永久变形量，或对比例性的某一偏差作为确定比例极限的依据. 国际材料試験会議在布魯塞尔（1906）决定，以产生0.001% 永久变形的拉伸应力作为比例极限. 此后，曾有将这限定的永久变形量增至 0.01% 的趋势[1].

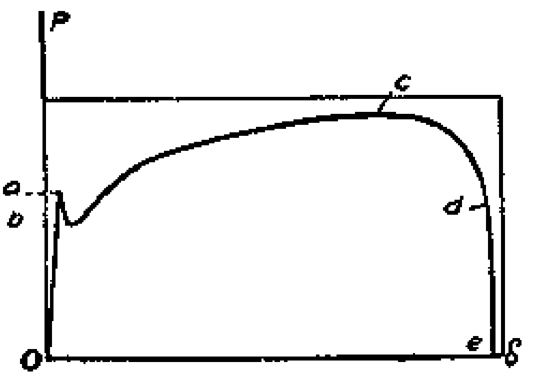


图 260

对于結构鋼等材料，**屈服点**是非常重要的特性. 在屈服点应力下，載荷并未增加而試样則伸长很多. 对于軟鋼，伸长可达 2% 以上. 有时，达到屈服点时載荷突然减小，拉伸試験图的形状如图 260 所示. 在这种情形下，如将載荷在点 a 和点 b 处的上限和下限除以原来截面积，則此两点可分别称为**上屈服点**和**下屈服点**. 上屈服点的位置随試験的速率、試样的形式和截面的形状而变. 下屈服点通常看作是材料的眞正特性，因此用作确定資用应力的根据.

由于材料在屈服点的伸长較大，因此无需用灵敏的伸长計来确定此点. 而可用最簡单的仪器来确定，或者可以直接取自拉伸試験图. 对于結构碳鋼，屈服点应力約为极限強度的 55—60%. 含硅 1% 左右的結构鋼，其屈服点应力約为极限強度的70—80%. 硅鋼的极限強度同碳鋼的大致相同. 这样高的屈服点証明了对硅鋼之所以慣常取較高的資用应力.

有严格确定的屈服点不但是結构鋼而且还是青銅和黄銅等材料的一个特性. 然而有些材料并无明显的屈服点. 对于这些材

1) 参看 P. Ludwik 的論文 "Bruchgefahr und Materialprüfung", *Schweiz Verband f. Materialprüf. d. Technik* (Zürich) *Ber.*, No. 13, 1928.

料，有时将永久变形(塑性伸长)达到 0.2% 时的应力作为屈服点。必須記住，这样规定的屈服点并不代表材料的一个确定的物理特性，而与任意选定的永久变形有关。对于有明显屈服点的結构鋼，在屈服点的伸长量通常比 0.2% 大得多，因此实际屈服点与用 0.2% 永久变形的界限所規定的屈服点一致。

极限强度通常定义为試样上的最大載荷（图 260 中的点 c）除以**原**截面积而得的应力。此值常被用作确定容許应力的依据。

拉伸試驗图上曲綫 $Oacde$ 下的面积（图 260）代表引起断裂所需的功。此値也可作为材料的一个特性，它不但同強度有关，而且还同材料的延性有关。

拉伸試驗中試样标距的**伸长**和断口截面积的**縮小**通常看作金属**延性**的特征。在塑性伸长的初期（图 260 中从 a 至 c），試样沿长度作均匀伸长。这种均匀伸长与均匀的横向收縮同时进行，因此試样的体积实际上保持不变[1]。在点 c 拉力达到最大值；在載荷減小的同时，試样継續伸长。在塑性伸长的这一阶段中，变形成局部化且开始**頸縮**，試样的外形如图 261 所示。何时开始頸縮很难准确确定，因而均匀伸长量和因頸縮而引起的伸长量各为多少也很难分别确定。所以慣常在試样断裂时測量其标距的总增量。于是**伸长**可定义为标距的总伸长量与其原长度之比。实用中，断裂时的伸长通常以百分数表示。如果 l 为原标距长度而 δ 为总伸长量，則断裂时伸长的百分数为

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \cdot 100. \qquad (a)$$

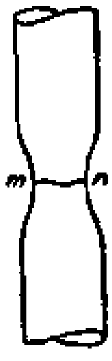


图 261

此伸长通常用以衡量材料的延性。这样获得的伸长同試样的尺寸有关。但由于頸縮而引起的标距的增量占总增量的大部分，因而对于短的标距长度和长的标距长度而言实际上是相同的。因此

1) 使体积改变的微小弹性变形，比起較大的塑性变形来可忽略不計。

由式(a)定出的伸长随标距长度的減小而增加． 对于鋼而言，用 $l=5d$ 的試样所得的伸长約为用 $l=10d$ 的同材料試样所得的伸长的1.22倍． 此外，由实驗还知，截面的形状会影响頸部的局部变形，从而也影响試样的伸长． 这説明了，如要比較关于伸长的結果，只能采用几何相似的試样．

断口截面**面积的收縮**由下式表示：

$$q=\frac{A_0-A_1}{A_0}, \tag{b}$$

式中 A_0 为原截面积，而 A_1 为断口处最后的截面积．

本章末了給出了一表，表中列出了各种鋼的許多靜力拉伸試驗的結果．

§74. 单晶体試样在弹性范圍內的試驗． 我們在工程应用中所遇到的金属通常均具有晶体結构． 一片金属材料是由无数微小的晶体所組成的，如果首先研究了单晶体的性質，就能較深入地了解材料的机械性質．

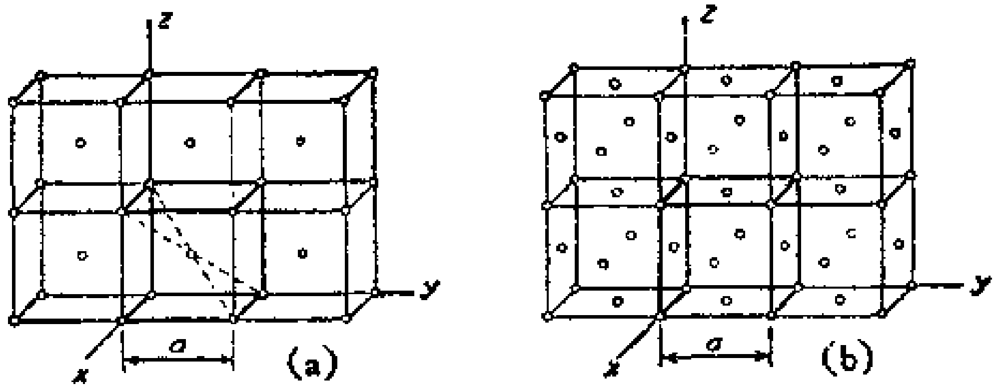


图 262

由 X 光分析知，一特定材料的每一晶体均由列成特殊几何型式的无数原子所組成． 其型式是由**单位晶胞**的重复而形成的，图262表示单位晶胞的两种型式． 图262a表示一**体心立方晶胞**，即鉄在室温下的晶体結构；而图262b則表示一**面心立方晶胞**，即鋁、銅及其他一些金属的晶体結构． **晶格尺寸**(如图262中的距离a)对于每种材料而言均为常数，且其数量級为 1×10^{-8} 厘米．

为了使机械試驗用的試样可以从一单晶体上切下，曾发展了

获得大尺寸金属晶体的各种方法[1]. 图 263 說明了用再結晶的方法获得鋁的单晶体試样的过程[2]. 如果使照片中上图所示的細晶

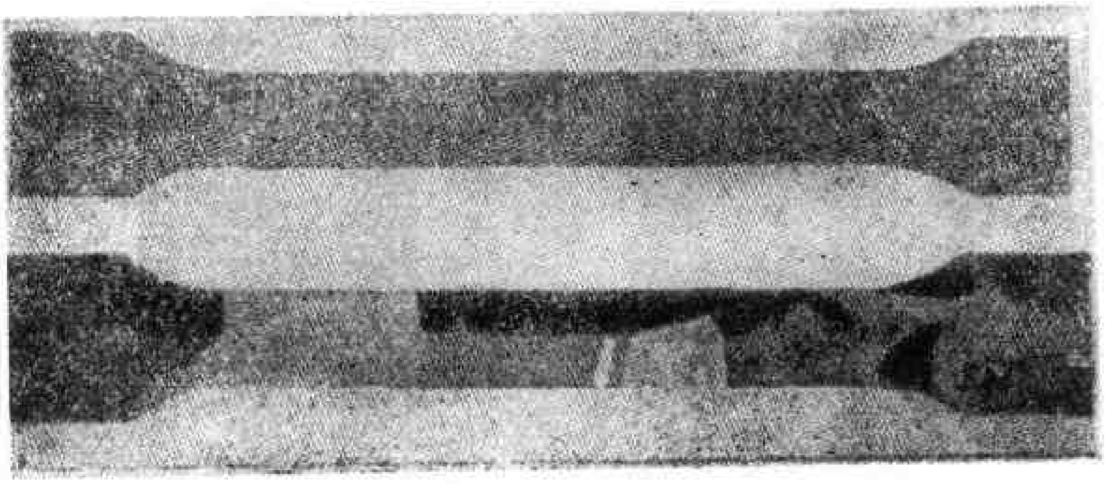


图 263

粒鋁試样均匀地伸长 1—2%，然后慢慢地增加溫度（每天 20—50°F）将其退火和随后慢慢地冷却，我們通常就获得一仅由少数晶体所組成的試样，如照片中下图所示. 如仔細选择晶粒大小很均匀的材料，并由实驗来規定适当的伸长量和适当的加热、冷却过程，就有可能在退火后获得单晶体試样. 晶体相对于試样軸綫的定向无法加以控制，而且对于各种不同的試样而言，晶体的主軸綫（图 262 中的 x, y, z 軸）通常与試样的軸綫交成不同的角度.

单晶体試样在弹性范围内的試驗通常表明弹性性質有很大的变化，这与晶体的定向有关. 图 264 示出了弹性模量 E 和 G 因定向不同而不同的鉄晶体的样式. 借助于单晶体的这种知識，可使計算多晶体試样平均模量的方法发展到能較准确地預測实驗結果的程度[3].

用了灵敏的伸长計，就可在单晶体試样的拉伸試驗中看出，即使在弹性范围内，对胡克定律也有一些偏差. 对伸长計的讀数还有**时間效应**. 为了說明这些現象，必須研究热效应.

---

1) 参看 C. F. Elam, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, 1936.

2) 图 263 和 264 取自 E. Schmid 和 W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, 1935; 并由 F. A. Hughes 譯成英文, London, 1950.

3) 参看 Boas 和 Schmid, *Helv. phys. acta*, vol. 7, p. 628, 1934.

如果在拉伸試驗中非常緩慢地增加載荷[1]，則試样的温度就与其周圍环境的温度保持相等，而应力应变关系就可用直綫 OA 表

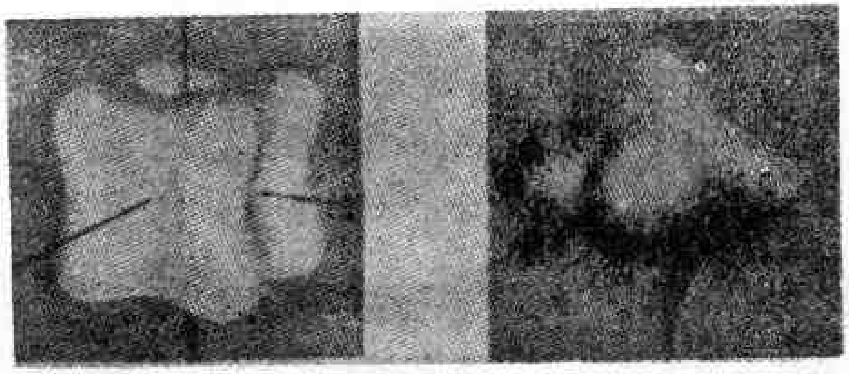


图 264

示(图 265a)，此綫的斜率表示**等温**状态下模量 E 的大小．如果迅速施加拉伸載荷使无足够时間进行热交换，則所得的不是直綫 OA 而是 OB，在**絕热**状态下的模量 E 通常較等温时获得的为大．由于其突然伸长，因此試样冷却至室温以下[2]．如果試样在固定載荷下維持足够长的时間，則它的温度将逐漸回升一直到室温为止．結果試样发生附加伸长（如图中水平綫 BA 所示）．此即**弹性后效**，它是由材料的热弹性性質引起的．如果在温度完全均等后突

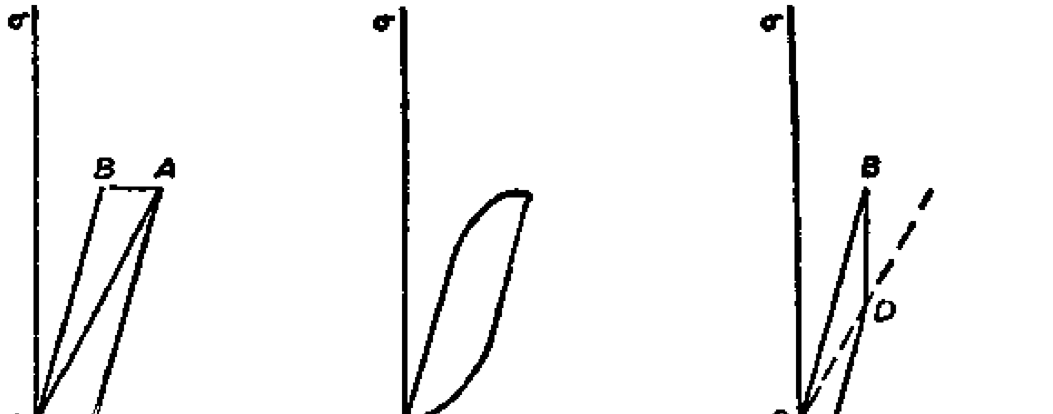


图 265

1) 参看 Lord Kelvin, Elasticity and Heat, Edinburgh, p. 18, 1880.

2) 温度变化可在試样上連接一热电偶量得.

然卸去試样的載荷，則它的絕热收縮將如图 265a 中平行于 OB 的直綫 AC 所示. 由于此突然縮短，試样的温度升高，而随后的冷却至室温的过程將引起进一步的收縮，如长度 CO 所示. 可以看出，使試样作絕热变形而后給以足够时間使温度均等，可画出用平行四边形 $OBAC$ 表示的完整循环. 此平行四边形的面积表示每一循环內的机械能損失. 在我們的推理中曾假設了变形为絕热的，但实际上在循环中总会有一些热交換. 因此所获得的不是平行四边形，而是如图 265b 所示的迴綫.

絕热模量与等温模量之差通常很小[1]，而每一循环內的机械能損失也非常小. 但是如果許多循环相繼产生，例如在振动中，則机械能損失就变得重要了，而必須加以考虑. 它們相当于所謂**內摩擦**，而可以阻尼振动. 如图 265b 所示的迴綫称为**迟滯迴綫**. 由于經一完整循环后試样恢复到它的原来状态. 因此有时也用**弹性迟滯**这一名詞.

前面假設了，試样在突然伸长后仍承受不变載荷的作用. 反之，伸长的試样也可保持其长度不变，于是試样温度的升高將使原加的力有所減小. 这种**松弛**过程由图 265c 中的鉛直綫 BD 表示. 在这种情形下，如突然放松試样，就获得綫段 DC，而后由于冷却之故，获得循环 $OBDC$ 的封閉綫 CO.

前面的討論与拉伸試驗有关，但实际上，我們关于对胡克定律的偏差的大部分資料以及在弹性范围內的时間效应，是根据从

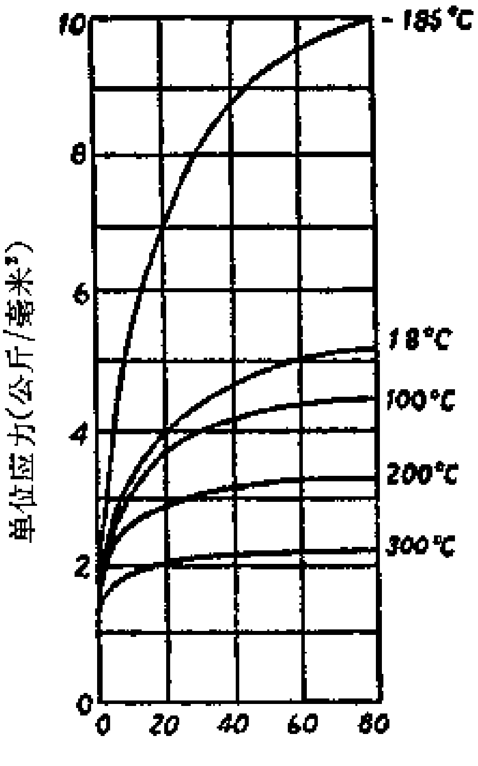


图 266

1) 对于鋼，約为 0.33%.

石英晶体上切下的小条的弯曲試驗获得的．在这方面可指出，对完全弹性的一切偏差均可由材料热弹性和压电性质的研究来加以充分說明[1]．

§ 75. **单晶体試样的塑性伸长．** 在拉伸試样上增加載荷，最后可使試样开始屈服并作塑性伸长．图 266 表示在不同溫度下作拉伸試驗的鋁单晶体試样的图綫[2]．可以看出，比例极限非常低，而超过此极限后試样作塑性伸长．由于塑性变形之故，材料发生硬化，而継續变形所需的应力随着伸长的增加而变大．**此应变硬化**現象在低温下特别明显．随着温度的增加，应变硬化的影响减小，在 300℃ 时曲綫趋近于一水平綫，試样实际上在不变的应力下継續伸长．

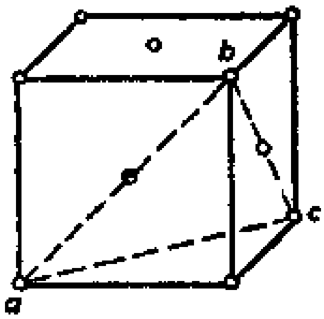


图 267

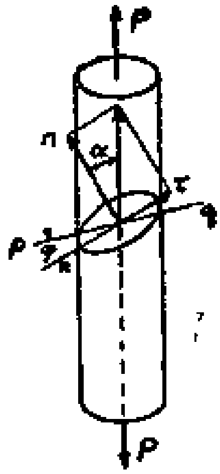


图 268

观察塑性变形时在单晶体試样表面上出現的綫条(滑移带)可揭示出，此变形是由于材料在某些晶面上沿一定方向的滑移而造成的．例如，在試驗具有面心立方晶格結构(图 267)的鋁单晶体試样时，滑移平行于八面体的一个平面(例如平面 *abc*)发生，而滑移的方向平行于三角形 *abc* 的一边．在受拉試样中，滑移将发生在定向最不利的八面体平面上，而不是发生在作用着最大剪应力的 45° 平面上．这說明了为什么在試驗单晶体試样时，对于开始

1) 参看 A. Joffe 的論文，*Ann. Phys.* (Ser. 4), vol. 20, 1906.

2) 图 266 取自 Schmid 和 Boas, *loc. cit.*, p. 404.

屈服时的拉伸載荷值我們获得不統一的結果. 这些数值不但与材料的机械性質有关，而且还与晶体軸綫相对于試样軸綫的定向有关.

例如，假設在截面积为 A 的单晶体試样（图 268）的拉伸試驗中，由法綫 n 确定定向最不利的八面体滑移面的方向，而以直綫 pq 表示滑移方向. 作用在滑移面上的剪应力为

$$\tau = \frac{P}{A}\cos\alpha\sin\alpha. \tag{a}$$

由实驗知，滑移并非由于 τ 而是由于此应力在滑移方向 pq 的分量 $\tau\cos\varphi$ 所引起的. 当此分量达到一确定值 τ_{cr} 时，滑移开始. 于是我們由式(a)得

$$\tau_{cr} = \tau\cos\varphi = \frac{P}{A}\cos\alpha\sin\alpha\cos\varphi. \tag{b}$$

可以看出，虽则对于給定的材料 τ_{cr} 为常数，但試样开始屈服时的載荷 P 却与角 α 和 φ 之值有关.

图 269 表示試样由于沿晶面的滑移而伸长的过程. 我們可假設伸长分两个阶段发生：(1)沿滑移面平移(图 269b) 和(2)試样轉过角 β 回到其原来方向(图 269c). 从这伸长的机理中显而易見，拉力 P 的方向与滑移面之間的夹角在拉伸时是变化的. 此外，試样原来的圓截面变成椭圓形，椭圓两主軸之比等于 $1:\cos\beta$. 单晶体的許多实驗的結果均支持这些結論. 例如，图 270 表示一被拉伸后的銅-鋁单晶体[1]試样.

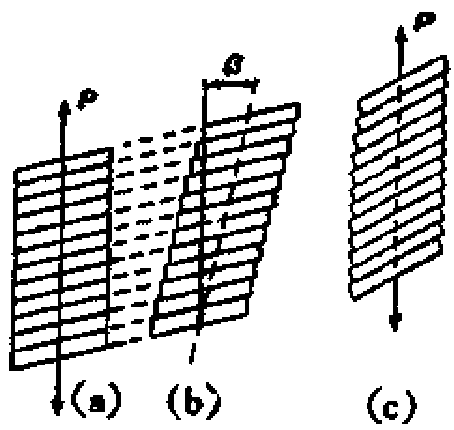


图 269

实驗还指出，滑移开始时的 τ_{cr} 通常非常小[2]. 然而，根据考虑分子力来計算 τ_{cr} 值时[3]，得出数量級为 $G/30$ 这样大的数值. 这

1) 参看 C. F. Elam, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, p. 182, 1936.
2) *Ibid.*
3)参看 J. Frenkel, Z. Phys., vol. 37, p. 572, 1926.

說明滑移过程并非仅由原子平面相互間的刚性移动所造成. 必须假設有局部缺陷存在,它使滑移可以在很小的力的作用下开始,然后扩展至整个滑移面. 普朗特(L. Prandtl)曾描述了一个模型以表

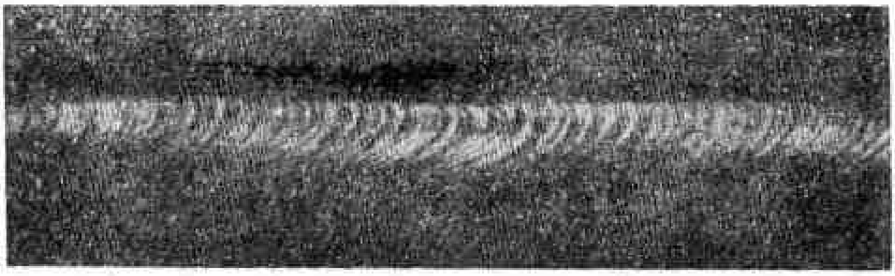


图 270

明有从瑕疵点开始滑移的可能性[1]. 泰勒(G. I. Taylor)提出了另一个力学模型[2]. 假設原子的分布是局部不規則的,称为**位錯**,他指出,在微小应力 τ_{cr} 的影响下,这种不規則性将沿着晶体中的滑移面移动,并引起晶体的一部分对另一部分作相对位移. 用了他这个模型,泰勒不但可以解释滑移在 τ_{cr} 值非常小时就开始,而且还可以解释应变硬化現象[3].

§ 76. 軟鋼在弹性范围内的拉伸試驗. 結束单晶体机械性质的这种簡略討論,接下来我們来研究如結构鋼試样之类的多晶体試样的拉伸試驗. 图 260 示出了鋼的典型的拉伸試驗图. 当应力較低时,图綫的相应部分可足够精确地用一直綫表示,而此綫的斜率就表示弹性模量 E 之值. 由于定向的不同,从而在試样的軸綫方向单个晶体的模量将不相同. 但由于晶粒很小,我們可忽略这一事实而将材料看作是各向同性的. 于是 E 值为由多晶体試样的拉伸試驗得到的一个平均值.

用一灵敏的伸长計,就可在拉伸試驗的弹性范围内看出对胡

---

1) 此模型曾由普朗特于 1909 年在哥廷根召开弹性理論研究会上作了討論,其說明載于 *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 8, pp. 85—106, 1928.

2) G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 145, pp. 362—404, 1934.

3) 泰勒的工作吸引了物理学家的兴趣,关于位錯目前有了大量的文献. 关于这一課題的最近参考书目,可参看 A. H. Cottrell, Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Oxford, 1953.

克定律的一些偏差和后效. 这可用热弹性效应来解释，如同单晶体試样的情形那样(参看第 345 頁). 然而必須指出，晶体的热弹性性質与晶体的定向有关，因此，由于多晶体試样的伸长而引起的温度变化每粒均不相同. 这就是說，我們不但須研究試样与周围环境之間的热交换，而且还須研究各个晶体之間的热流动. 由于晶粒中所生的热与其体积成正比，而热交换与其表面大小有关，显而易見，这就有助于温度的均化，且机械能的損失随晶粒尺寸的減小而增加. 这在实际上非常重要，因为在某些情形下，弹性系統振动的阻尼主要与材料的內摩擦有关. 为了在这种系統中增加阻尼作用，必須使用小尺寸晶粒的材料.

在此討論中曾假設了試样的变形是完全弹性的，如同在很小的应力下所能做到的那样. 当应力較大时，內摩擦現象变得更加复杂，因为我們不但須研究由于热交换而引起的机械能損失(如上面所討論的)，而且还須研究由于单个晶粒內的塑性变形而引起的損失[1].

如将一多晶体試样的表面磨光并加以蝕鏤，就能用显微鏡观察到此材料的晶体結构. 可以看出，当載荷小于屈服点載荷时，在一些晶粒的表面上出現滑移带. 这些滑移带表明，滑移是沿着这些晶粒中的一定晶面发生的，其型式与前面对单晶体的試驗所討論的相同. 由于单晶体的弹性性質在不同方向是不同的，并且晶体的定向是无規則的，因此拉伸試样中的应力不均匀地分布，从而在平均拉伸应力达到屈服点值以前，就可能在定向最不利的个别晶体內发生滑移. 如果卸去此試样的載荷，则受到滑移的晶体不能自由地恢复至其原来形状，結果将有一些殘余应力遺留在卸去

1) 关于測量各种不同材料阻尼能力的大量研究工作是由 Rowett [*Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 89, p. 528, 1913] 和 O. Föppl 及其合作者在 Wöhler-Institut, Braunschweig 所作的；参看 *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 70, p. 1291, 1926; vol. 72, p. 1293, 1928; vol. 73, p. 766, 1929. 引起內摩擦的热弹性原因的重要性是由 C. Zener 及其同事們的研究所指出的，参看 *Phys. Rev.*, vol. 52, p. 230, 1937; vol. 53, p. 90, 1938; vol. 60, p. 455, 1941. 这些研究的成果发表于 C. Zener, Elasticity and Inelasticity of Metals, 1948.

了载荷的試样内．个别晶体的这种屈服是因为在加載和卸載过程中有能量損失，迟滞迴綫的面积(参看图 265b)亦将增大．

如果在卸載后，使試样受第二次的拉伸試驗，則在第一次試驗时内部发生滑移的晶粒，在拉伸載荷尙未达到第一次加載所施加之值时不会发生屈服．只有当載荷超过此值时才重新开始滑移．如果試样先承受拉伸而后承受压縮，則作用的压应力就与先前的拉伸試驗所引起的殘余应力相結合，在平均压应力尙未达到使原来状态的試样中产生滑移带之值时，就会引起定向最不利的晶体的屈服．因此，拉伸試驗循环提高了拉伸的弹性极限，但降低了压縮的弹性极限．此現象由包辛謌(Bauschinger)[1]首先作了研究，因此称为**包辛謌效应**．我們看出，研究了单个晶体内的滑移和由此滑移引起的殘余应力，就可解释包辛謌效应．

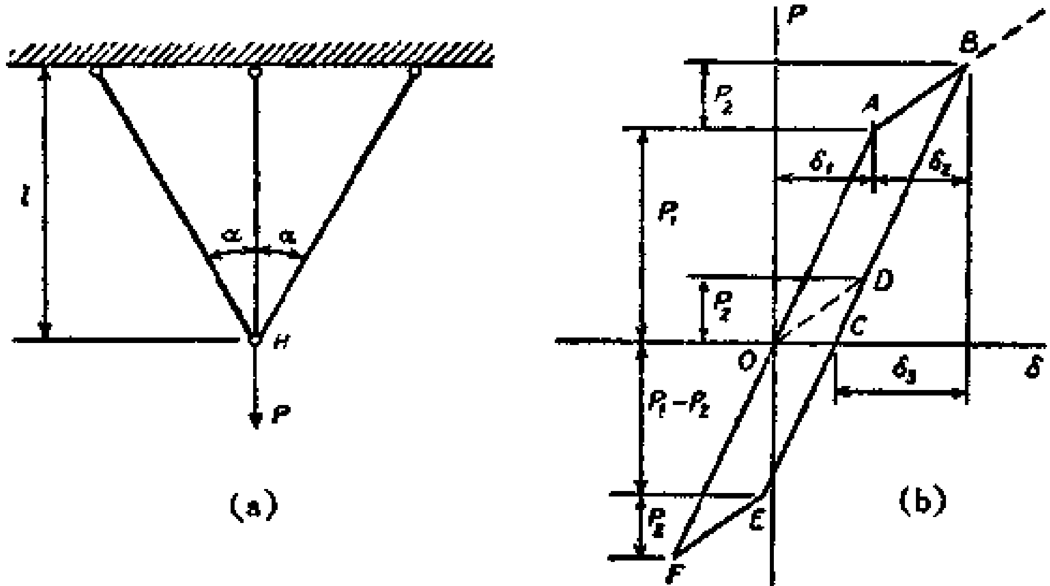


图 271

材料中由于定向最不利的晶粒的屈服而引起的殘余应力以及包辛謌效应，可用图 271 所示的模型来加以說明．此模型是由相同材料和相同截面积 A 的三杆組成．拉伸和压縮时此材料具有相同的屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$．如果有一鉛直載荷 P 作用在模型上时，在

1) 参看 *Mitt. Mech.-tech. Lab. München*, 1886. 幷参看 *Dinglers Polytech. J.*, vol. 266, 1886.

竖杆和斜杆内将分别产生拉力 S_1 和 S_2. 在弹性范围内，这些力为（参看原书上卷第 21 頁）

$$S_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}, \ S_2 = \frac{P\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha}. \tag{a}$$

由于弹性变形,模型的鉸接点 H 鉛直向下移动了距离

$$\delta = \frac{Pl}{AE(1 + 2\cos^3\alpha)}. \tag{b}$$

載荷与位移之間的关系用图 271b 中的直綫 OA 表示. 从式(a)我們看出,竖杆中的应力較任一个斜杆中的应力为大. 模型的竖杆相当于多晶体試样中定向最不利的晶体. 逐渐增加載荷，我們得到竖杆开始屈服而斜杆継續作弹性变形的状态. 相应的載荷 P_1 和相应的位移 δ_1 可由下式求得:

$$S_1' = A\sigma_{Y.P.} = \frac{P_1}{1 + 2\cos^3\alpha}, \ \delta_1 = \frac{P_1 l}{AE(1 + 2\cos^3\alpha)}, \tag{c}$$

从而得

$$P_1 = A\sigma_{Y.P.}(1 + 2\cos^3\alpha), \quad \delta_1 = \frac{\sigma_{Y.P.} l}{E}. \tag{d}$$

此状态相当于图 271b 中的点 A.

如果我們継續增加載荷,则竖杆将在不变应力 $\sigma_{Y.P.}$ 下作塑性伸长[1],而附加載荷 P_2 将由弹性斜杆承受. 这些杆中的附加力 S_2' 和附加的鉛直位移 δ_2 将为

$$S_2' = \frac{P_2}{2\cos\alpha}, \quad \delta_2 = \frac{P_2 l}{2AE\cos^3\alpha}. \tag{e}$$

P_2 与 δ_2 之間的关系用图 271b 中的斜綫 AB 表示. 如果在达到图綫上的点 B 后我們开始卸去模型的載荷，則所有三杆均将具有弹性性状,而移去的載荷与向上位移之間的关系可由式(b)表示. 所以在图綫中我們获得平行于 OA 的直綫 BC，而在卸載时向上的总鉛直位移为

$$\delta_3 = \frac{(P_1 + P_2)l}{AE(1 + 2\cos^3\alpha)}. \tag{f}$$

---

1) 在此討論中,应变硬化忽略不計.

我們看出，由于竖杆的塑性伸长，模型不能恢复至其原始状态，而产生了永久变形 OC. 永久变形的大小可由下式求得：

$$\overline{OC}=\delta_1+\delta_2-\delta_3=\frac{P_2 l}{2AE\cos^3\alpha(1+2\cos^3\alpha)}. \tag{g}$$

由于此永久变形，在斜杆内将有拉力 S_2''，而这些力将为竖杆内的压縮力 S_1'' 所平衡. 这就是在完全卸去模型的載荷后遺留在系統內的殘余力，它們說明了在經过拉伸試驗的一个循环后多晶体試样內的殘余应力.

为了求得模型內殘余力之值，我們首先指出，斜杆在整个載荷循环內始終处在弹性范围內. 因此斜杆內的力 S_2 与撓度 δ 之間的关系可結合式(a)和(b)而求得，即

$$S_2=\frac{\delta AE\cos^2\alpha}{l}. \tag{h}$$

以永久变形之値[式(g)]代 δ，得斜杆內的殘余拉力 S_2'' 为

$$S_2''=\frac{P_2}{2\cos\alpha(1+2\cos^3\alpha)}. \tag{i}$$

将鉸接点 H 处的鉛直力相加，竖杆內的殘余压縮力 S_1'' 为

$$S_1''=2S_2''\cos\alpha=\frac{P_2}{1+2\cos^3\alpha}. \tag{j}$$

为了說明包辛謌效应，我們来研究第二个載荷循环. 当載荷很小时，所有三杆均作弹性变形，在图 271b 中第二个加載过程将在点 C 开始而沿直綫 CB 进行. 当我們达到点 D 时，竖杆的殘余压縮力 S_1'' 被解除，而在再加載时将受拉伸. 在点 B，此杆內的拉应力将达到 $\sigma_{Y.P.}$ 值，而杆将开始塑性屈服. 可以看出，模型的比例极限由于存在殘余应力而有所提高. 比例极限在第一个循环內是在載荷 P_1 下达到，而在第二个循环內是在載荷 P_1+P_2 下达到. 在第二个循环內，卸載过程是完全弹性的，它沿直綫 BC 进行.

我們現在将力的方向倒轉而施加一向上的載荷 P. 于是变形将沿直綫 CE 进行，CE 即直綫 BC 的延长綫. 竖杆內的压縮力是由向上的載荷 P 和殘余压縮力 S_1'' 引起的. 在点 E，向上的合力

为 P_1-P_2，竪杆內的压縮力等于屈服点之值．当載荷增加时，变形沿直綫 EF 进行．如果达到点 F 后卸去模型的載荷，則模型将恢复至以点 O 表示的原始狀态．可以看出，如使模型受拉伸載荷直至点 B 为止，它的拉伸比例极限便从 P_1 增至 P_1+P_2，同时，压縮比例极限便从 P_1 減至 P_1-P_2．这就說明了包辛謂效应．

如果使模型承受周期力，即在拉力 P_1+P_2 与压縮力 P_1 間变化，我們就得到图 271b 中平行四边形 $OABCEFO$ 所示的迟滯迴綫．此平行四边形的面积表示每一循环內損失的机械能[1]．

这一节討論了軟鋼試样的拉伸試驗，軟鋼試样的变形很小，要用一灵敏的伸長計来測量．在下一节中我們将研究較大的变形，这种变形不仅促使定向最不利的单个晶体，而且还促使整个試样的材料作塑性变形．

§ 77. **屈服点．** 在研究結构鋼的拉伸強度时，工程师們对試样在屈服点突然伸長的現象特別感到兴趣．众所周知，当拉应力达到一定数值时，拉伸載荷突然下降，而金属随之在一稍低的应力下大大地伸長．对于图 272 中点 A 和 B 所表示的这两个应力值，巴赫（C. Bach）引用了上屈服点和下屈服点这两个名詞[2]．由进一步的实驗知，下屈服点受試样形狀的影响較上屈服点为小．因此下屈服点的实用意义較大．

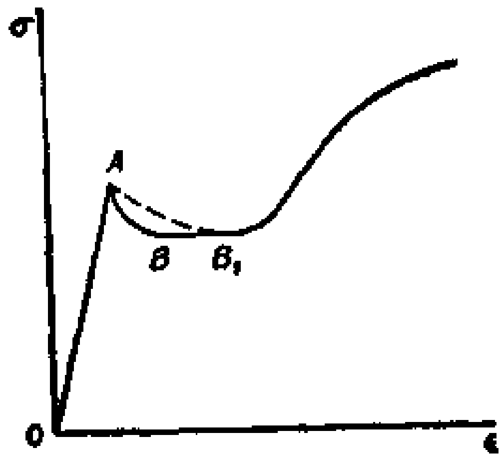


图 272

应力应变图在屈服点的形狀（图 272）显著地取决于試驗机的机械性能．如果試样的伸長是由于試驗机上作等速移动的两軋头間距离的增加而引起的，則突然的塑性伸長将使試样中

1) 說明迟滯迴綫和包辛謂效应的另一个模型是由 C. F. Jenkin 設計的；参看 *Engineering*, vol. 114, p. 603, 1922.

2) *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 58, p. 1040, 1904; vol. 59, p. 615, 1905.

的拉力略为减小，而在图上将获得一尖峯 A. 如果将一弹簧插入使与試样串联，則图形上曲綫 AB 的斜率就能減小到如虛綫 AB_1 所示者. 另一方面，如果拉伸載荷本身直接作用在試样上，則屈服时的拉力将由于突然伸长时載荷的微小移动而受到影响，因而在图綫上可能出現微小的擺动.

为了較詳細地研究在屈服点发生的变形. 采用表面抛光的試样. 由这种实驗知，当拉应力从点 A 徐徐下降至点 B 时（图 272），在試样的表面上开始出現一些模糊的綫. 这些綫与拉伸方向成 45°角左右，它們称为**呂德斯綫**[1]（参看图 205）. 当再伸长时，这些綫的寬度和数量均增加，而当从 B 伸长至 B_1 时（图 272），它們遍及試样的整个表面. 最先出現的綫通常发生在应力集中之处. 例如，图 206 示出了一发生在圓角上最大应力集中之处的呂德斯綫. 有时不用抛光而用特种的漆（称为应力层）来显示呂德斯綫. 漆是脆性的，不能承受大的变形；因此它們在受載荷时破裂，从而示出了呂德斯綫的型式.

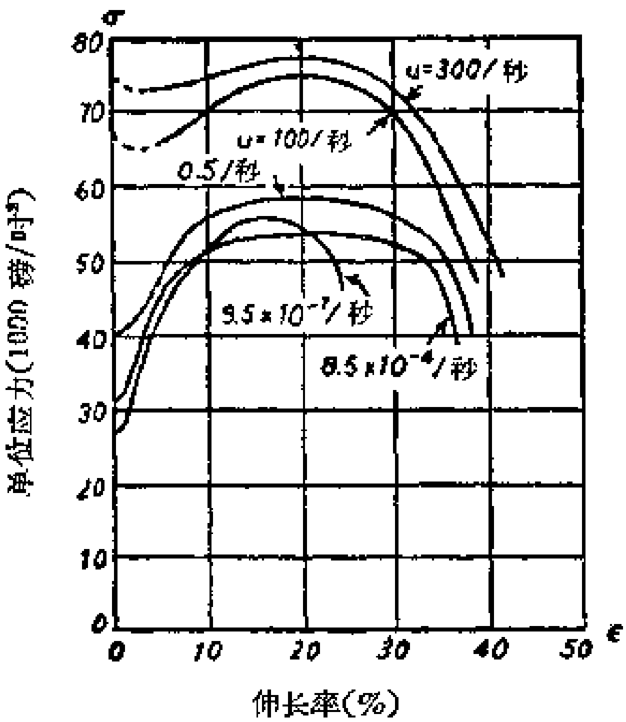


图 273

用显微鏡的研究指出，呂德斯綫表示当材料的相邻部分保持为完全弹性时，材料中已发生塑性变形的薄层与試样側面之交綫. 将試样切开，并运用特殊的蝕鏤术[2]，就可显示出試样內部的薄塑性层. 在显微鏡下看出，这

1) 这些綫是由 W. Lueders 首先描述的，*Dinglers Polytech. J.*, 1854. 并参看 L. Hartmann, Distribution des déformations, etc., Paris, 1896, 和 A. Nadai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, 1950.

2) 参看 A. Fry 的論文，*loc. cit.*, p. 333.

些薄层是由如前面所述的(参看 §75) 因滑移而发生畸变的晶体組成的.

由实験知,屈服点应力和屈服点应变之值取决于应变率[1]. 图 273 中的曲綫表示在大范围的应变率 ($u = d\varepsilon/dt = 9.5\times10^{-7}$/秒至 $u = 300$/秒) 下軟鋼的应力应变图. 可以看出,不仅屈服点而且极限強度和总伸長量均与应变率大有关系. 一般而言, 这些量随应变率的增加而增加.

为了說明鋼在其屈服点的突然伸長,提出了[2]晶粒的境界是由脆性材料所組成, 它們构成一剛性骨架以阻止晶粒在低应力下发生塑性变形. 如无此骨架,拉伸試験图似将如图 274 中虛綫所示者. 由于存在剛性骨架,材料保持为完全弹性,并服从胡克定律直至点 A 为止,在点 A 骨架遭到破坏. 于是塑性晶粒材料突然获得永久应变 AB, 此后材料服从塑性材料的通常的曲綫 BC. 此理論說明了材料在上屈服点的不穩定状态. 此理論还說明了小尺寸晶粒的材料通常显示較高的屈服应力值这一事实. 結果,这种材料在屈服点受到額外的伸長,如图 274 中水平綫 AB 的长度所示. 此外, 此理論还說明了,在快速試験中随着屈服点应力的增加,屈服时的伸長量也同时增加,如图 273 中的曲綫所示.

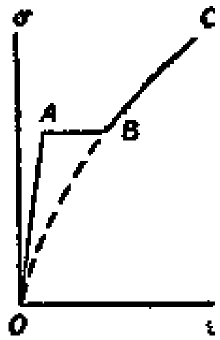


图 274

呂德斯綫出現在作压縮試験的鋼块內, 正如同拉伸时一样. 此外,由弯曲和扭轉实験知, 呂德斯綫在这些情形下也会出現,不过要在应力远較均布应力为高时才行. 根据在脆性骨架(由晶粒境界所构成) 遭到破坏时开始屈服这一假設, 此理論被发展了一

---

1) M. J. Manjoine, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. 211, 1944. 并参看 R. C. Smith, T. E. Pardue 和 I. Vigness, *U. S. Naval Research Lab. Rept.* 4468, 1954.

2) 参看 P. Ludwik 和 Scheu, *Werkstoffanschuss*, *Ver. deut. Ing. Ber.*, No. 70, 1925; W. Köster, *Archiv Eisenhüttenw.*, No. 47, 1929. 并参看 N. N. Davidenkov, Some Problems of Mechanics of Materials, Leningrad, 1943 (俄文版).

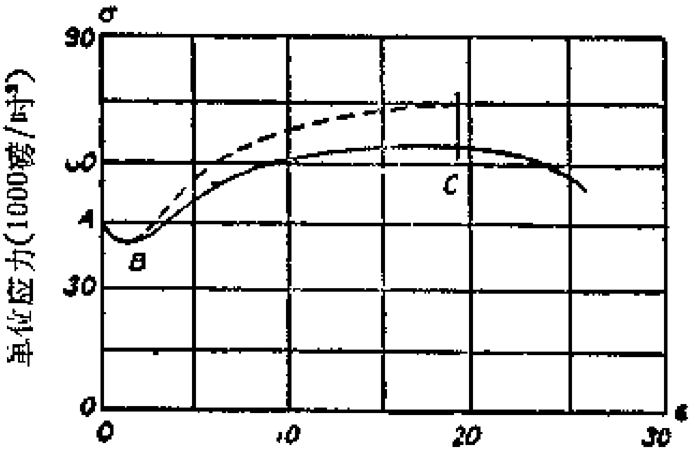


图 275

步[1]，即屈服点应力与试样的尺寸有关。对小试样的实验指出，屈服应力较之对一般尺寸的试样求得的为高。

§78. 鋼在超过屈服点后的伸长. 当鋼試样在超过屈服点后伸长时，材料发生硬化，同时使杆伸长所需的应力也增加，如应力应变图的 BC 綫段所示(图 275)。試样的伸长与截面积的均匀收縮同时发生，因此試样的体积实际上保持不变。拉伸时所作的功大部分轉化为热，試样因而发热。由热的测量知，无論如何，并非所有机械能均轉化为热；一部分机械能以应变能的形式遺留在試样內。由于晶体定向的不同，应力在截面上不均匀地分布，在卸載后，一些殘余应力和一定数量的应变能遺留在試样內。

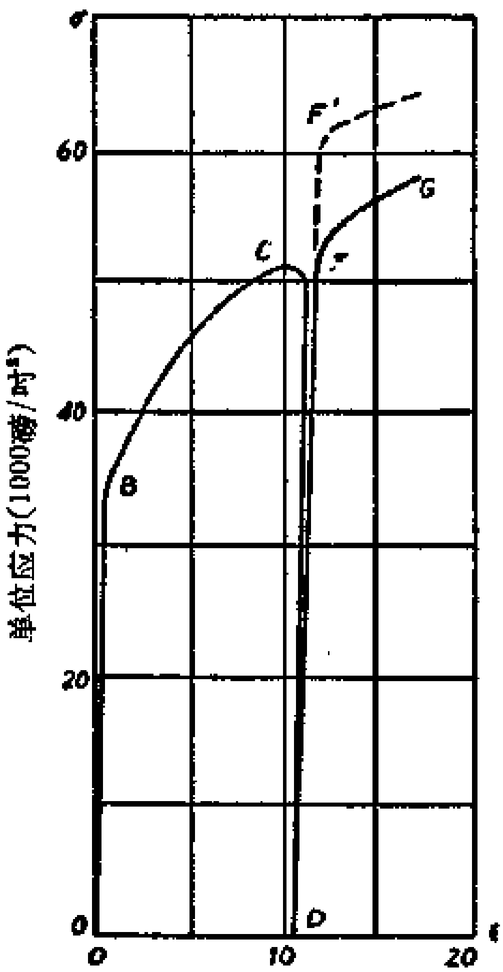


图 276

如果在卸載后我們第二次加載于試样，我們将发現它的屈服点应力有所提高。这一特性如图 276 所示，該图表示一軟鋼的拉伸試驗图[2]。待杆伸长至点 C 后，

1) C. W. Richards 在 1954 年美国材料試驗协会第 57 次年会上发表的論文。
2) 参看 Ewing, Strength of Materials, p. 35, 1914.

將其載荷卸去．卸載时，材料近似地服从綫性規律，如图上 CD 綫所示．当第二次加載于杆时，材料再次近似地服从胡克定律．得 DF 綫．在点 F（該点与前次加載时的点 C 相对应）曲綫的特性突然改变，改循 FG 綫段，該綫段可看作曲綫 BC 的延长綫．这表示，由于前次的拉伸，材料的**屈服点升高了**．如果在第一次卸載后允許有数天的間隔，則重加載荷时可得一更加高的屈服点，如虛綫上点 F' 所示（图 276）．图 277 示出了压鑄鋁的拉伸試驗結果[1]．材料的原来比例极限为 5600 磅/吋^2．待試样伸长 2% 后重加載荷，得比例极限为 20000 磅/吋^2，而屈服点則为 21000 磅/吋^{2}左右．

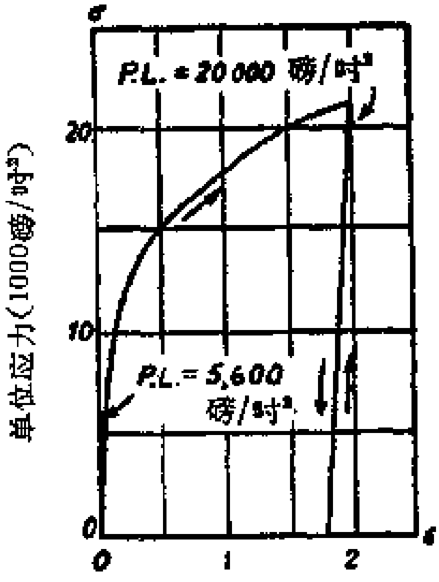


图 277

更完备的研究指出，卸去載荷与重加載荷所隔的时間对重加載荷时的应力应变曲綫有很大的影响．如果在卸載后立刻重加載荷，則由精确的測量知，当应力非常低时对綫性律就有一些偏差，而比例极限大大地降低．但是如果卸去載荷与重加載荷隔开相当一段时間，材料就完全恢复其弹性性質．图 278 表示对軟鋼求得的一些曲綫[2]，由图可知，如果在产生过应变后十分鈡时重加載荷，材料并不服从胡克定律；但是如果在五天后重加載荷，材料的弹性可部分恢复；如果在二十一天后重加載荷，材料的弹性就几乎完全恢复了．

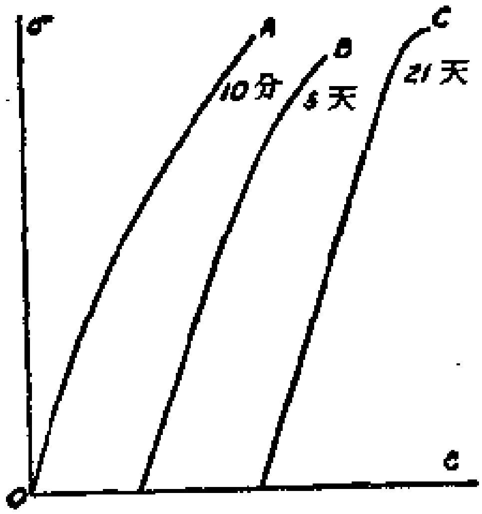


图 278

1) 西屋(Westinghouse)电气公司研究实驗室．

2) 参看 Ewing, *loc. cit.*, p. 421.

由实验还知，如果在卸載后将材料加以温和的热处理，例如放在 100°C 的热处理槽內，则弹性性质便可在更加短的时間內恢复。图 279 示出了对一鋼杆所作的試驗結果[1]。曲綫 A 代表原来的拉伸試驗曲綫。曲綫 B 代表同一杆在卸載十分鐘后重加載荷所得的曲綫，可以看出，它对胡克定律有显著的偏差。曲綫 C 为同一杆在第二次卸載后，并在 100°C 下作四分鐘的热处理后所得的曲綫。在此情形下，材料的弹性性质已完全恢复了。

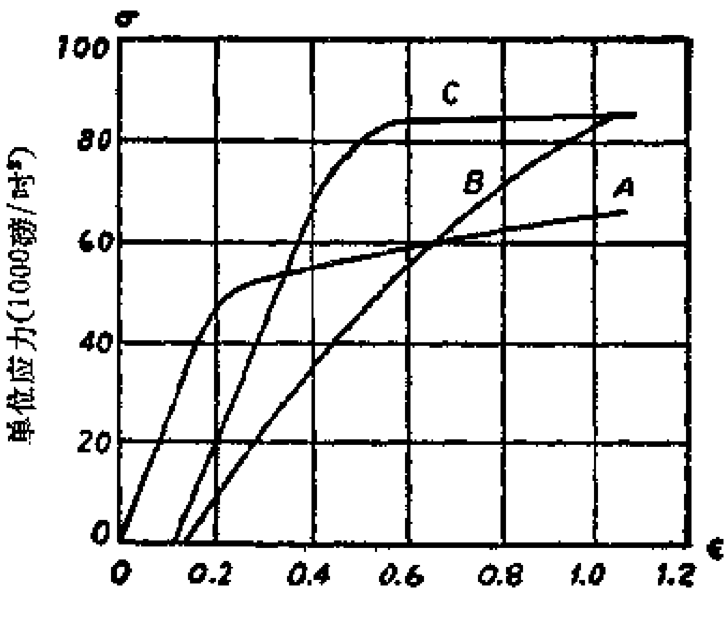


图 279

由于塑性变形而产生的应变硬化現象在許多工艺过程中（如低温輾压杆件，低温拉管和拉綫，剪切金属鈑片，冲孔等）均可遇到，在所有这些情形下，材料发生塑性变形的一部分变得較硬，而其延性大为降低[2]。为了消除此不希望有的应变硬化效应，惯常将材料加以退火处理，以恢复其原有的延性[3]。

延性材料的应变硬化有时在生产中有实际应用。起重机的鏈

---

1) I. Muir, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), *A*, 1899.

2) 关于冷作金属性质的一般討論，可参看 Z. Jeffries 和 R. S. Archer 的論文，*Chem. and Metallurg. Engrg.*, vol. 27, p. 747, 1922. 并参看 G. Masing 和 M. Polanyi, Kaltreckung und Verfestigung, Berlin, 1923.

3) 参看 Rees 的論文，*Iron and Steel Inst. J.*, 1923.

与纜索，慣常使其承受一定数量的过应变，以消除这些零件在使用中所不希望有的伸长．水压机的汽缸，有时使其承受初内压力，以使缸壁产生永久变形．由此压力所产生的应变硬化和殘余应力可防止在使用中产生任何永久变形．金属的过应变有时用于枪炮制造(参看 333 頁)．使炮筒壁上的金属伸长超过初屈服点，然后使其經受温和的热处理，就可以改善材料的弹性性質．同时，預应力与爆炸所产生的应力相結合，因而产生較有利的应力分布． 渦輪机的圓盘和轉子有时也可类似地处理．如使这些零件超速运轉，在中心孔周围就会产生永久变形，它使材料的屈服点升高，并产生有利的預应力[1]．压鑄鋁扇，有时使其鏜孔承受过应变，以避免其使用中在軸上松脫的任何可能性．机車車輪，有时将其輪轂紧压在車軸上，以使金属产生显著的塑性流动，这一方法已被証实具有很大的效果．电机整流器中的銅杆，使其承受很多次的抽拉冷作，以使其具有所需的強度．

象这样利用过应变来提高屈服点和改善結构的弹性性質时，必須記住下列两点：(1)如果使結构經受退火温度，硬化便消失，及(2)将金属沿一定方向拉伸，以使其沿該方向拉伸时強度提高时，則并不成比例地改善沿同方向压縮时的机械性質．此現象可在图 280 中清楚地看出，該图表示用电解銅所作的試驗[2]． 曲綫(a)表示銅在退火状态下的机械性質．在此状态下，比例极限和屈服強度[3]均非常低． 这种材料不能用于承受很大应力作用的結构中．曲綫(b)表示同材料的杆在塑性伸长达 15% 后的拉伸和压縮試驗曲綫．比例极限和屈服点均已大大提高，特别是对拉伸．曲綫(c)和(d)表示在塑性伸长达 20% 和 25% 后所作的試驗結果． 此附加伸长使机械性質获得进一步的改善，特别是对拉伸． 同时压縮比例极限稍有降低． 曲綫(e)表示一通过拉模拉制的杆的拉伸和压縮試驗曲綫，拉模使杆的截面积縮小了15%．在拉制的过程中，

1) 参看 A. Nadai 和 L. H. Donnell, *Trans. A.S.M.E.*, vol. 51, p. 173, 1929.

2) 西屋电气公司研究实驗室．

3) 屈服強度的定义是单位伸长或单位压縮为 0.2% 时的应力．

材料不仅承受纵向拉伸，而且还承受横向压縮；这說明了曲綫(b)和(c)之間的差别。虽然在两种情形下杆截面积的縮小大致相同，但通过拉模拉制的材料，其关于压縮的机械性质較之在試驗机中承受均匀縱向伸长的材料为佳。

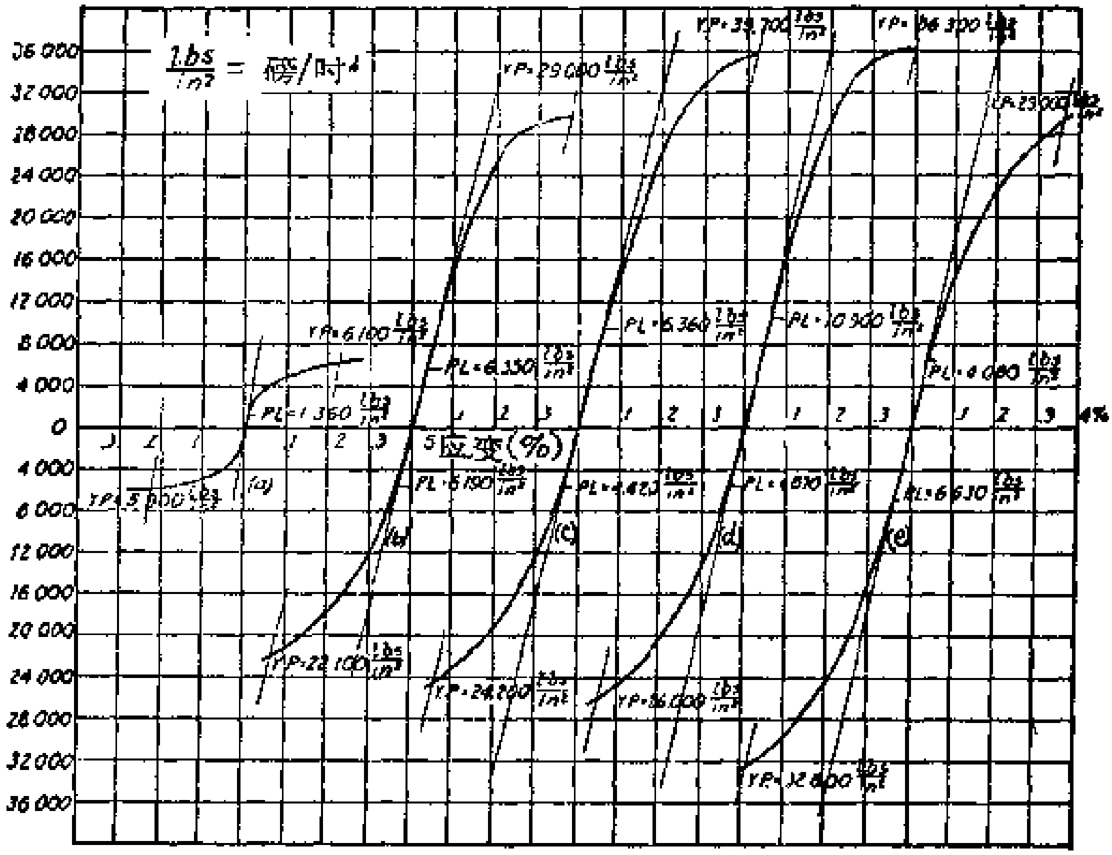


图 280

使金属沿一定方向拉伸并不能使压縮时的机械性质获得与拉伸时同比例地改善这一事实，在材料承受反复应力的情形下不可予以忽視(参看 §84)。此外，必須指出有这种迹象[1)]：在一特定区域内已发生屈服的材料，在該区域内对化学作用較为敏感，而且腐蝕有沿滑移面深入金属的趋势。此現象对鍋炉和同时承受应力和化学作用的其他容器特别重要。

作图 275 中曲綫 *ABC* 此类的拉伸試驗图时，通常将拉伸載

1) 参看 F. Körber 和 A. Pomp, *Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch.* (Düsseldorf), vol. 8, p. 135, 1926; 并参看 S. W. Parr 和 F. C. Straub, *Engineering*, vol. 124, p. 216, 1927.

荷除以試样的原截面积 A_0，以便获得惯用的单位应力．但当伸长很多时，截面积将大大縮小；为了获得**眞实应力**，須以实际面积 A 代 A_0．由試样体积不变，我們得

$$l_0A_0 = lA, \quad A = \frac{A_0l_0}{l} = \frac{A_0}{1+\varepsilon}, \tag{a}$$

而眞实应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0}(1+\varepsilon). \tag{b}$$

为了获得眞实应力图，須将惯用的应力图上的縱座标乘以 $1+\varepsilon$．在图 275 中，用虛綫表示了这种应力图．它伸展到通过点 C 的竪綫为止，在点 C 載荷达到最大値．当試样再伸长时，截面开始局部縮小（頸縮），ε 便不再沿試样保持不变了．于是不再能用式(b)，因为最小截面上的应力不均匀地分布（参看第 367 頁）．在这种情形下，式(b)給出 σ 的平均値．最小截面处的平均单位伸长 ε 可由式(a)求得，即

$$\varepsilon = \frac{A_0}{A} - 1. \tag{c}$$

用符号 q 表示截面积的单位收縮（参看第 344 頁），得

$$\frac{A_0 - A}{A_0} = q, \; A = A_0(1-q);$$

由式(c)得

$$\varepsilon = \frac{q}{1-q}, \tag{d}$$

如果量出了該截面的面积收縮量，就可很快算出最小截面处的单位伸长．此値称为**有效伸长**[1]，它比由标距的总伸长量 δ 求得的伸长 $\varepsilon = \delta/l$ 要大得多．

我們現在来較詳細地研究单位伸长 ε 的概念．我們通常用方程式 $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$ 来計算它，因此单位伸长的增量可由下式定义：

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l_0}, \tag{e}$$

1) 参看 P. Ludwik, Elemente der technologischen Mechanik, Berlin, 1909.

式中将长度增量除以初始长度 l_0. 单位伸长的增量如用下式来定义,在許多情形下似乎更为合理,即

$$d\varepsilon' = \frac{dl}{l}, \qquad \text{(f)}$$

式中 l 为加有增量 dl 的长度. 于是总的单位伸长变为

$$\varepsilon' = \int_{l_0}^{l} d\varepsilon' = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln\frac{l}{l_0} = \ln(1+\varepsilon) = \ln\frac{A_0}{A}. \qquad \text{(g)}$$

此称为**自然应变**[1]. 当伸长很小时,自然应变 ε' 非常接近于 ε. 但是当变形很大时,例如橡皮或鋼試样作塑性伸长时,ε' 与 ε 之差很大,用自然应变的概念就方便些.

我們来研究一立方体材料的体积变化作为一例, 材料的原体积为 1 立方时,沿其各边的方向承受均匀伸长 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. 变形后,立方体的体积为

$$(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z).$$

如果变形时体积保持不变(例如对于金属的塑性变形), 体积不变的条件为

$$(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) = 1. \qquad \text{(h)}$$

如果应变 ε_x, ε_y, ε_z 均不很小, 因而其冪不能忽略不計时, 則式(h)的条件将非常复杂. 但是,如果我們运用自然应变的概念,同一条件就取得非常簡单的形式. 为此,我們在式 (h) 的两面取对数,得

$$\ln(1+\varepsilon_x) + \ln(1+\varepsilon_y) + \ln(1+\varepsilon_z) = 0.$$

运用自然应变的定义[式(g)],我們得体积不变条件之簡单形式为

$$\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = 0. \qquad \text{(i)}$$

以自然应变 ε' 为横坐标,以眞实应力[式(b)]为纵坐标, 可作出拉伸試样頸部最小截面的拉伸試驗图[2]. 这些图綫的形式如

1) 它是由 Mesnager 首先提出的; 参看 *Proc. Congr. Internat. Phys.*, Paris, vol. 1, p. 348, 1900.

2) 这种图綫曾由 C. W. MacGregor 所用过, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 40, p. 508, 1940; 并参看 M. Hetényi 所編的 "Handbook of Experimental Stress Analysis" (1950) 一书中他所著的章节.

图 281 所示，由图可知，在超过开始頸縮时的应力后，眞实应力与自然应变之間的关系实际上是綫性的.

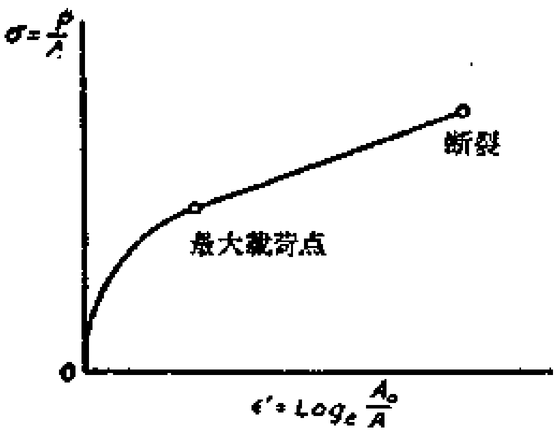


图 281

图 282 說明了慣常用的应变 ε 和眞实应变 ε' 的测量方法. 在图 282a 中，伸长計在两固定点 A 和 B 与試样相接触. 当試样伸长时，A 和 B 間的距离改变，即从原来的距离 l_0 变到最終的距离 l. 在图 282b 中，伸长計(称为**包辛髜伸长計**)在点 A 与試样固接，而在点 B 有一滚子，因此长度 AB 保持与 l_0 相等. 如果使两相同試样(图 282)从 l_0 伸长至 l，然后施加两相等的載荷增量，显然两伸长計讀数的变化幷不相等，但两者之比将为 $l/l_0=1+\varepsilon$. 但此比值[由式(e)和(f)]与比值 $d\varepsilon/d\varepsilon'$ 相等. 因此图 282a 中的伸长計給出慣常用的单位伸长 ε，而包辛髜伸长計則給出自然应变 ε'.

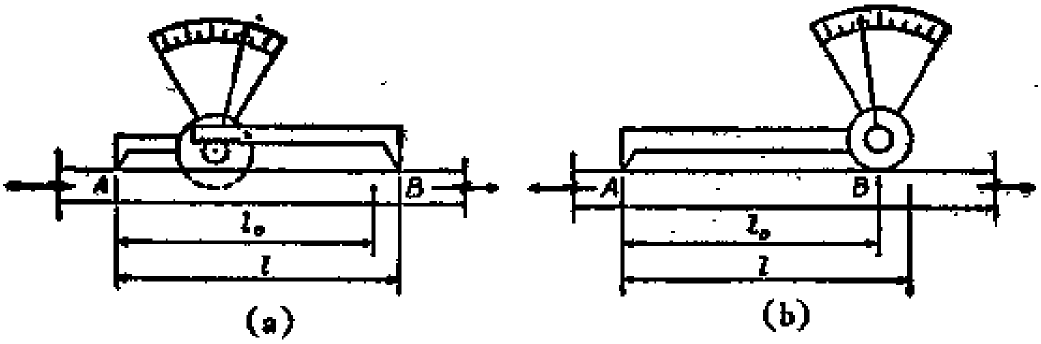


图 282

§ 79. 拉伸断裂的型式[1]. 在单晶体試样的拉伸試驗中有两种不同的断裂. 例如，对于岩盐之类的材料，我們可得塑性变形不大的脆性断裂，当晶体的一个主平面上的正应力达到临界值时就

1) 关于这一課題的完备参考书目載于 P. Ludwik 的論文中，*Eidg. Materialprüfungsanstalt* (Zürich) *Ber.*, No. 35, 1928. 并参看 *Forschungsarb.*, No 295, 1927.

发生破坏. 此称为**內聚断裂**. 单晶体金属試样在断裂前通常有較大的塑性变形,此塑性变形是由于沿一定晶面的滑移而造成的.这种型式的断裂称为**剪切断裂**.

內聚断裂中对**分离**的抗力与剪切断裂中对**滑移**的抗力两者間的关系,对同样材料而言并不保持不变. 它与試样的温度及进行試驗的速度有关.显然,对滑移的抗力随着温度的降低和变形速度的增加而增加. 然而,对于分离的抗力,这两个因素的影响程度較小. 这說明了,在室温下呈脆性的岩盐如果在温水中試驗时,所以出現剪切断裂是因为对滑移的抗力由于温度較高而降低了. 它还說明了,为什么如鋅等金屬杆在变形很慢时能如延性材料般地弯曲,而如果突然施加載荷时,此杆就呈現脆性断裂而无塑性变形[1].

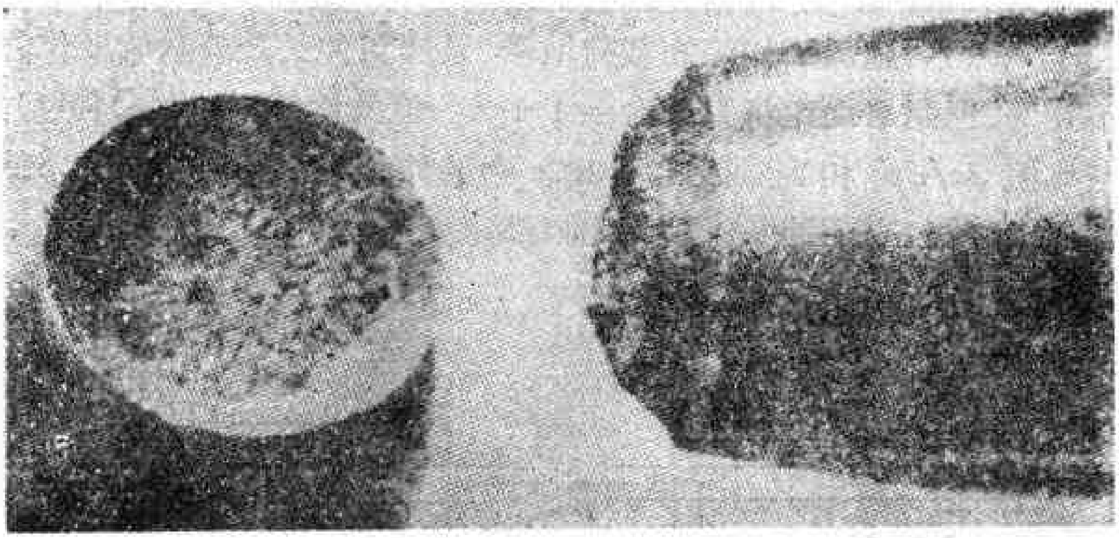


图 283

对于多晶体材料,也須研究两种断裂:(1)**脆性断裂**,如对于鑄鉄或玻璃;及(2)**剪切断裂**,如对于軟鋼、鋁及其他金屬. 对于第一种情形,发生断裂时在垂直于試样軸綫的截面上实际上无塑性变形. 对于第二种情形,在作了显著的塑性伸长之后才发生断裂,而断口的形状为熟知的**杯錐状**(图 283). 在討論这两种断裂时,理論又发展了一步,即材料的強度可用材料对**分离**的抗力和对**滑移**

1) P. Ludwik, *Stahl. u. Eisen*, vol. 43, p. 1427, 1923.

的抗力这两特性来説明．如果对滑移的抗力大于对分离的抗力，我們便得脆性材料，而断裂为克服內聚力的結果，发生断裂时将无任何明显的变形．如果对分离的抗力大于对滑移的抗力，我們便得塑性材料．于是，首先沿斜面开始滑移，而只有在試样作显著的均匀伸长，和随之其截面积作局部收縮(頸縮)之后，才发生杯錐状断裂．

对于杯錐状的断裂型式，曾研究了頸部最小截面处的应力分布[1)]，得知在頸部附近，縱向纖維內的拉力具有如图 284a 中箭头所示的方向．在頸部，这些力的水平分量产生了径向和切向应力，因此在最小截面的平面內，每个无限小的体元均处于图 284b 所示的三維应力状态．假設塑性流动需要有一不变的最大剪应力，我們

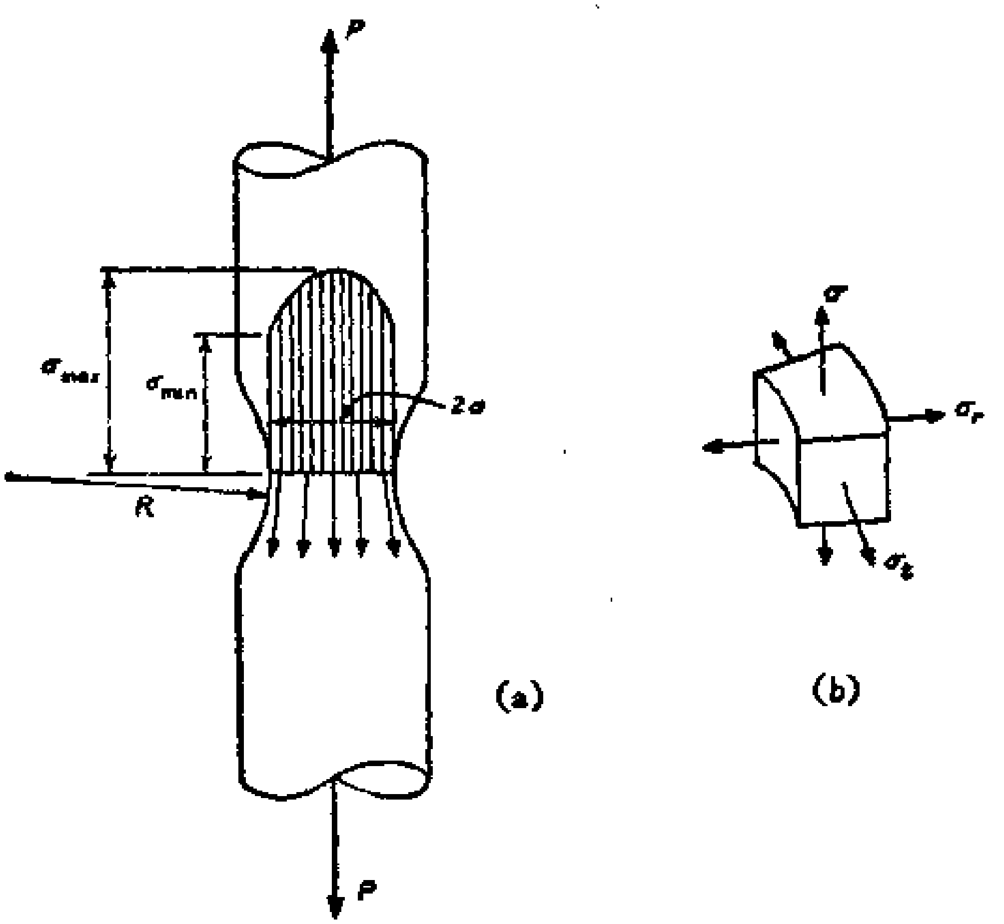


图 284

1) 参看 N. N. Davidenkov 的論文，英譯文，*Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, 1946，并参看 P. Bridgman, *Trans. Am. Soc. Metals*, vol. 32, p. 553, 1944.

得出,軸向拉应力在試样的最小截面上不均匀地分布,而在截面的中心具有一最大值,該处 σ_r 和 σ_t 也均为最大. 軸向应力的分布如图 284a 中的阴綫面积所示. σ_{max} 和 σ_{min} 的大小与最小截面的半径 a 及頸部的曲率半径 R 有关,它們可用下式表示:

$$\sigma_{max} = \sigma_a \frac{1 + \frac{a}{2R}}{1 + \frac{a}{4R}}, \sigma_{min} = \sigma_a \frac{1}{1 + \frac{a}{4R}},$$

式中 $\sigma_a = P/\pi a^2$ 为平均应力.

因为是三維应力狀态,在最小截面中心附近的材料,其延性減低,因此在伸長时,裂縫发生在該区域[1](图 285),而在表面附近的材料則繼續作塑性伸長. 这一事实說明了,为什么杯錐狀断口的中央部分具有脆性性質,而在表面附近断裂为延性型式.

由于应力在頸部区域內非均匀分布,所以如果在发生裂縫前卸去載荷,殘余应力將遺留在試样內. 这些应力可用对厚壁圓筒所用的方法[2](参看第 344 頁)来加以研究. 在卸去試样載荷前的应力分布用此法作了計算,发現它与达維蒳科夫理論(图 284)的結果

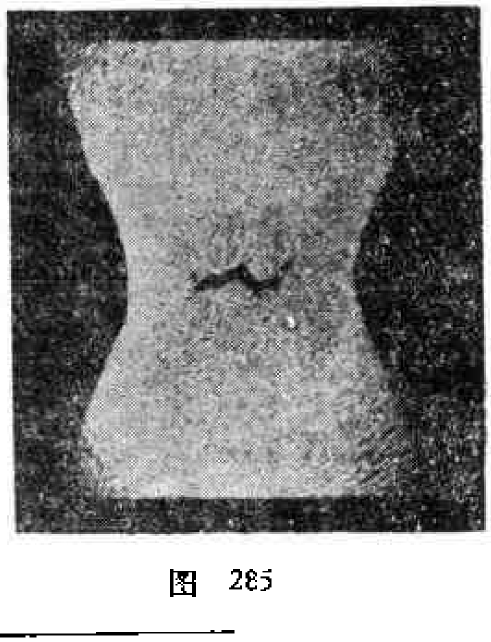


图 285

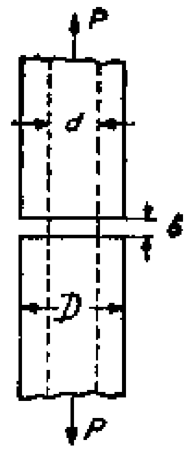


图 286

1) 参看 P. Ludwik, Z. *Ver. deut. Ing.*, vol. 71, 1927.
2) 参看 E. R. Parker, H. E. Davis 和 A. E. Flanigan 的論文, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 46, pp. 1159–74, 1946.

相当符合．此外，由显微鏡对断口的观察发现，在杯锥状断口的内部和外部，断裂均穿过晶粒而发生，且均为剪切断裂．

前面的討論系针对标准圓柱試样的拉伸試驗而作的．用其他形状的試样所得的結果甚为不同，可用图 286 所示的带槽試样[1]說明之．在进行拉伸試驗时，由于有較大直径 D 这部分的存在，因此部分地阻止了凹槽截面处截面积的收縮．当然，此作用将随着槽寛 δ 的減小而增加．在表 21 中列出了用下列两种不同材料得出的試驗結果[2]：(1)比例极限为 56000 磅/吋^2，屈服点为 64500 磅/吋^2，极限強度为 102000 磅/吋^2，伸长率为 $26\frac{1}{2}\%$，面积收縮率为 55% 的**碳鋼**；和(2)比例极限为 80000 磅/吋^2，屈服点为 85000 磅/吋^2，极限強度为 108000 磅/吋^2，伸长率为 27%，面积收縮率为 69% 的**鎳鉻鋼**．这些数据均由对 1/2 吋直径和 2 吋标距的标准圓柱試样所作的普通拉伸試驗得来．計算应力时用了原截面积．图 286 所示的带槽試样具有 $d=\frac{1}{2}$ 吋和 $D=1\frac{1}{2}$ 吋．

表 21 圓柱試样和带槽試样的极限強度

δ (吋)	极限強度 (磅/吋^2)			
	碳鋼		鎳鉻鋼	
	根据原面积計算	根据縮小后的面积計算	根据原面积計算	根据縮小后的面积計算
1/32	163000	176000	193000	237000
1/16	164000	177000	184000	232000
1/8	143000	158000	154000	199000
标准試样	102000	227000	108000	348000

由表知，在各种情形下，带槽試样的破坏載荷均較相应圓柱試样的破坏載荷为大．对于带槽試样，面积只有少量的縮小，断口的

1) 用带槽試样的第一个实驗，似乎是由 D. Kirkaldy 所作的．用此方法他指出了在延性材料中可产生脆性形式的断裂．参看他的著作，Results of an Experimental Inquiry, etc., Glasgow, 1862.

2) 这些試驗是在西屋电气公司研究实驗室所作的．并参看 P. Ludwik 和 R. Scheu 所作的試驗，*Stahl u. Eisen*, vol. 43, p. 999, 1923.

外表頗似脆性材料. 圓柱試样的真实极限強度所以較带槽試样的为大是因为圓柱試样的断裂是在具有显著的塑性流动之后发生之故. 这引起了应变硬化,它不但增加了对滑移的抗力,而且还增加了对分离的抗力.

在工程实践中有时遇到类似的情形. 如渦輪机轉子等大型鍛件的內部孔穴可产生与图 286 中狹槽类似的效应. 热应力和殘余应力可能与孔穴处的应力集中效应相結合而产生裂縫. 虽然在普通的拉伸試驗中材料确为延性的,但最終的断裂将具有脆性破坏的特性而无可观的塑性流动.

由于大多数带槽試样(图286)在拉伸破坏試驗中保持为弹性,它的伸長将非常之小,因此引起断裂只需小量的功. 一个很小的冲击力就不难供給引起破坏所需的功. 試样由于其形状而不是由于材料的任何机械性質而呈脆性. 在承受冲击的机器零件中,截面的任何突变均很危險,因此应当避免.

§ 80. 压縮試驗. 压縮試驗通常用于試驗石块、混凝土和鑄鉄等脆性材料. 試驗用的試样通常做成立方形或圓柱形. 試样在試驗机两平面間受压縮时,通常假設压縮力在截面上均匀分布. 即使是表面完全接触而且載荷施加在中央时,实际的应力分布仍极为复杂. 由于試样与試驗机两压板之間的接触面上有摩擦力,因此随压縮而生的横向膨涨在这些表面上被阻止,因而在此区域內的材料处于較有利的应力状态. 結果在混凝土立方体試样的压縮試驗中所得的断裂形式如图 287 所示[1]. 与試驗机接触的材料不受影响,而四面的材料則被压碎.



图 287

1) 参看 C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6th Ed., Berlin, p. 160, 1911

为了获得混凝土等材料对压縮的真实抗力，必须消除或減小接触面上摩擦力的影响。因此菲普尔(A. Föppl)将接触面涂上石蜡[1]，于是发現所得的极限強度大为降低。破坏的型式完全不同，立方体試样分裂为与側面之一相平行的碎片。消除摩擦力影响的另一方法是用稜柱体試样，稜柱体在压縮方向的长度比横向尺寸大若干倍。于是稜柱体的中部接近于均匀压縮的情形[2]。图 288 表示凱撒·威廉研究院所发展的使圓柱試样均匀受压的非常有趣方法[3]。試驗机的两压板和圓柱試样的两端均加工成具有角 α 的圓錐面，角 α 与摩擦角相等。于是摩擦力的影响由于楔入作用和均匀压縮的結果而得到补償。

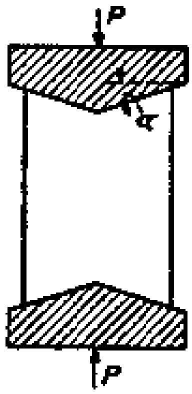


图 288



图 289

由混凝土、石块和鑄鉄等材料的压縮試驗知，这些材料均具有一非常低的比例极限[4]。超过比例极限后，变形較載荷增加得快。压縮試驗图具有图 289 所示的形状。有时希望这一图綫有一分析表达式。对于这些情形，巴赫提出了[5]一指数定律，用下式表示之：

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E}, \tag{a}$$

---

1) A. Föppl, *Mitt. Mech,-tech. Lab.* München, No. 27, 1900.

2) 参看 Prandtl 和 Rinne, Neu. Jahrb. Mineral., 1907. 并参看 W. Gehler, *Bauingenieur*, vol. 9, p. 21, 1928. 試驗混凝土時用高度为直径两倍的圓柱試样。

3) *Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch.* (Düsseldorf), vol. 9, p. 157, 1927.

4) 鑄鉄的拉伸比例极限是由 Grüneisen 所确定的，参看 Ber. deut. physik. Ges., 1906.

5) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5th Ed., Berlin, p. 67, 1905.

式中 n 为决定于材料性质的数值.巴赫求得純水泥的 n 值为 1.09，而花崗石的 n 值为 1.13.

由延性材料的压縮試驗知，图綫的形状与試样的尺寸有关.沿压縮方向的尺寸愈減小，則两端摩擦力的影响愈大，而压縮試驗图愈陡. 例如，图 290 示出了各种不同直径和高度比 d/h 的銅圓柱試样的压縮試驗結果[1]. 如銅等延性材料，在压縮試驗中很少断裂. 压縮与横向膨涨同时发生，受压的圓柱体最后成为一扁平圓片.

为了減小接触面上摩擦力的影响，以便获得一令人滿意的压縮試驗图，有时采用分期压縮的方法[2]. 在試样由于横向膨涨而变成桶形后，将它加工至其原来直径. 然后再加以压縮，在每一阶段均将过程重复. 这样，随着試驗的进行，試样的尺寸不断減小.

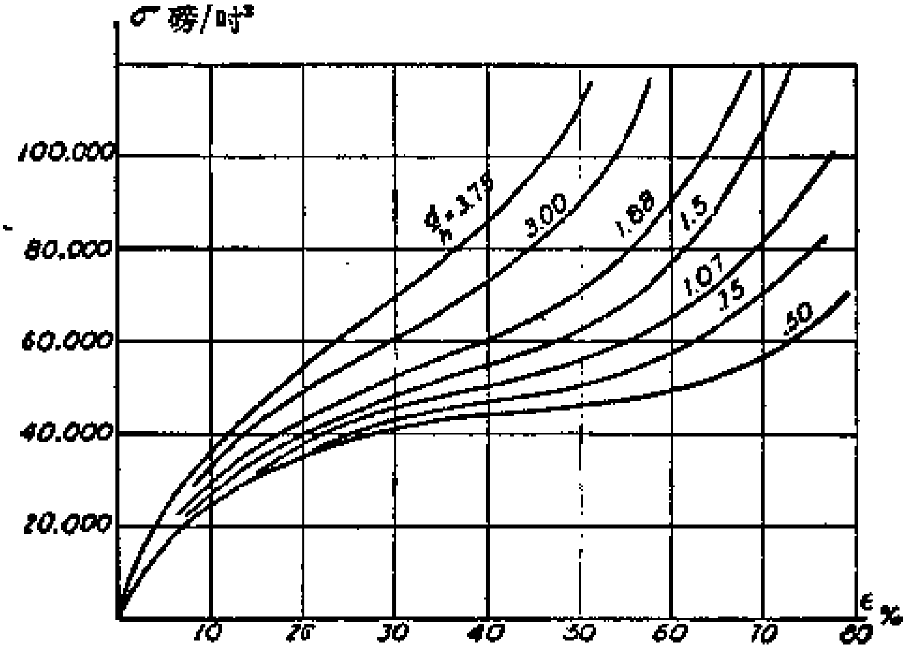


图 290

§ 81. 复合应力下的材料試驗. 結束簡单拉伸和压縮試驗的討論，我們現在来研究材料在复合应力下的試驗情形. 我們以討

1) 参看 G. Sachs, Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig, p. 36, 1925.

2) 参看 G. I. Taylor 和 H. Quinney, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 143, pp. 307—326, 1933—1934.

验材料在**均匀流体静压**下的試驗开始[1]. 由这种試驗知,在均匀压力下,均质材料能承受巨大的压縮应力而仍保持为弹性. 由試驗还知,在流体静压 p 下,单位体积变化可用下式表示[2]:

$$\frac{\Delta V}{V_0}=ap+bp^2.$$

表 22 列出了几种材料的常数 a 和 b 的数值（p 以公斤/厘米^{2}計）. 可以看出,巨大的压力只使体积发生很小的变化.

表 22

材　料	$a\times10^7$	$b\times10^{12}$
鉄	5.87	−2.10
鋼	7.32	−2.70
铝	13.34	−3.50
硅石	27.74	+7.17
硫化玻璃	30.08	+4.86

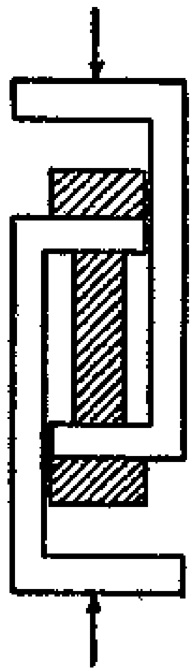


图 291

为了使材料受**均匀拉伸**,曾作了数次尝試, 但对于这一重要問題,至今还未获得满意的解决.

曾由同时受横向压力的各种鋼的拉伸試驗知[3], 压力对頸部的形状及最小截面处的面积的收縮影响很大. 图 291 表示一使压力容器內的試样承受拉伸的軛状装置. 图 292a 和 b 各表示中碳鋼(含碳量为 0.45%)在大气压下和在 145000 磅/吋^{2}的横向压力下的断口. 对于第一种情形,自然伸长为 $\ln\frac{A_0}{A}=0.92$, 而平均眞实应力为 114000 磅/吋^2. 对于第二种情形, 相应的数値为 2.37 和

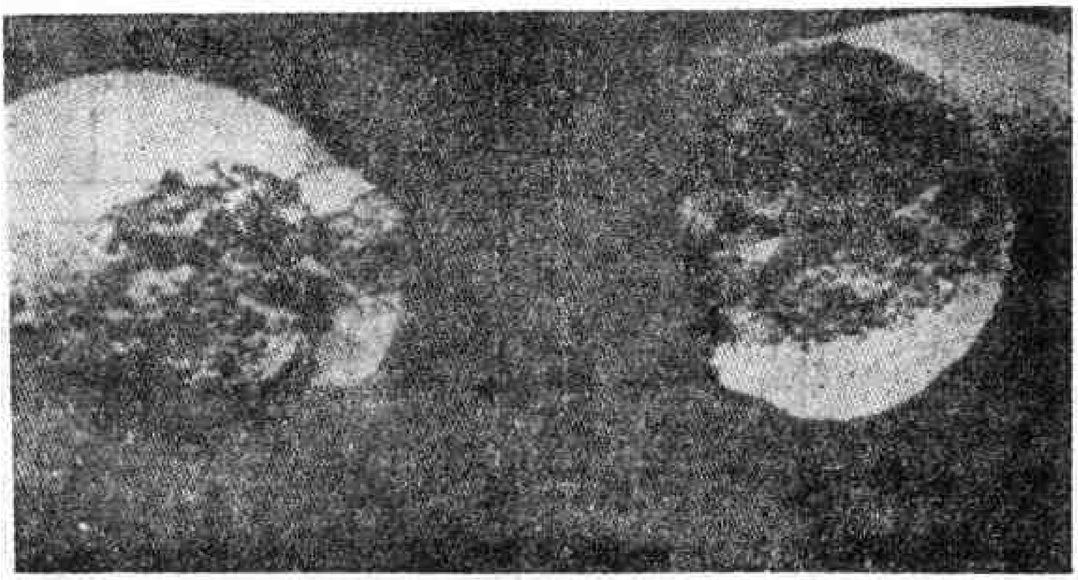
1) 用这种方法时,最能令人理解的試驗是由 P. W. Bridgman 所作的,他发展了一个能获得巨大压力的工艺方法;参看他的著作, The Physics of High Pressure, New York, 1931, 和 Studies in Large Plastic Flow and Fracture, New York, 1952. 一个新型的三軸应力試驗机曾由 H. A. B. Wiseman 和 Joseph Marin 作了說明, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 54, 1954.

2) Bridgman, Studies in Large Plastic Flow and Fracture.

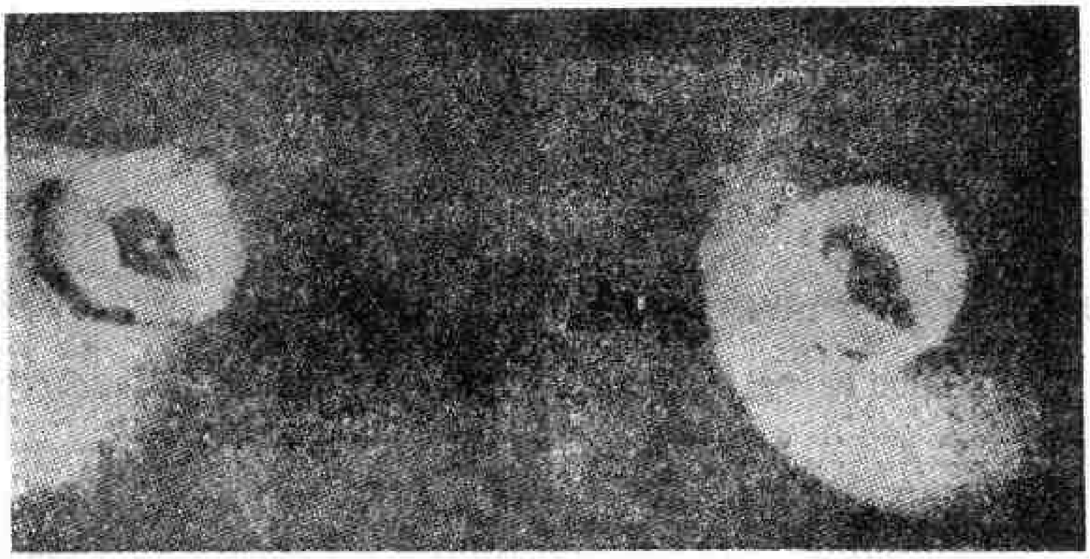
3) Bridgman, *ibid.*

474000 磅/吋^2. 此外还知，随着横向压力的增加、杯錐状断口底部平坦部分的相对范围減小；达到某一压力时它完全消失，而断裂完全变成剪切断裂.

軸向压縮和横向压力的联合曾为卡門(Th. v. Kármán)[1] 在大理石的压縮試驗中所用到. 由这些試驗知，随着横向压力的增加，大理石的塑性愈来愈大，起先为圓柱形的試样可变成桶形，如图



(a)



(b)

图 292

---

1) *Z. Ver. deut. Ing.*, p. 1749, 1911.

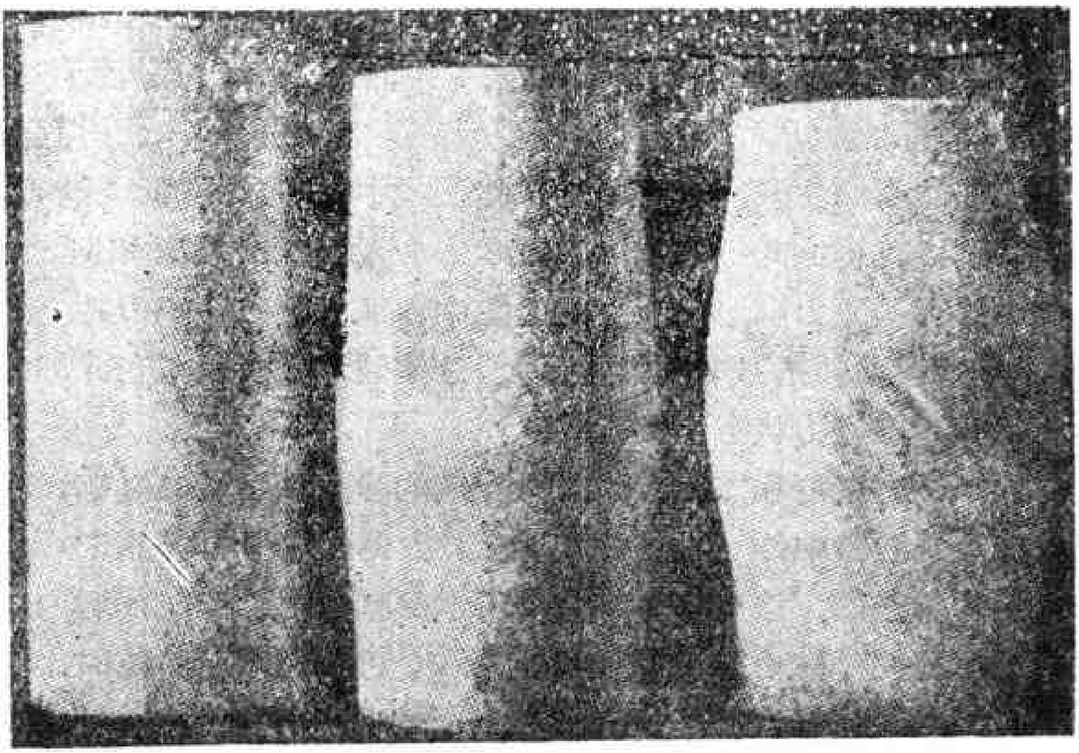


图 293

293 所示.

在研究二維应力状态时,曾对薄壁圓柱管作了試驗. 使管子同时承受軸向拉伸和內压, 就能对包括鉄、銅和鎳在內的几种材料,确定两主应力比为各种值时的屈服点应力[1]. 用此方法所得的結果与最大变形能理論(参看第 383 頁)相当符合. 用同时承受內压和拉伸、压縮或扭轉的軟鋼薄管所作的进一步的实驗[2], 也能得出与上述理論相符的結果. 由鋼、銅和鋁等薄管的拉伸和扭轉联合試驗知[3],屈服的开始可用下式很准确地算出:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_{Y.P.}^2,$$

式中 σ 为軸向拉应力, τ 为扭轉剪应力而 $\sigma_{Y.P.}$ 为簡单拉伸时的屈服点应力. 此式也是最大变形能理論的結果.

1) 这种試驗是由 W. Lode 在 A. Nadai 的指导下所作的;参看 *Forschungsarb.*, No. 303, 1928. 并参看 *Z. Phys.*, vol. 36, pp. 913—939, 1926.

2) 参看 M. Roš 和 A. Eichinger, *Proc. Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, 1926.

3) G. I. Taylor 和 H. Quinney, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), A, vol. 230, pp. 323—362, 1931.

在实际应用中，对于复合应力的情形，不但屈服点应力非常重要，而且延性和应变硬化也非常重要．不平常的破坏情形，例如大型球形貯桶的爆炸[1]和焊接的貨船船壳的突然破裂，近来已引起人們对这些課题的注意．在这两种破坏型式中，都是用了低碳鋼板，因低碳鋼板在普通的拉伸試驗中显示出令人满意的強度和延性．但在爆炸后的压力容器和損坏的船舶中，鋼板的破裂表面并不显示出塑性变形，而是具有脆性性質．这些破坏大多数是在低的大气温度和二維应力状态下发生的．

为了确定温度和二維应力对低炭鋼的強度和延性的影响，近来曾在各試驗室中作了大量的实驗工作．薄壁管子都是用来产生二維应力状态的．这些管子都是同时承受軸向拉伸和流体靜内压的，因此周向拉应力 σ_t 和軸向拉应力 σ_a 可按任何所希望的比值 $n=\sigma_t/\sigma_a$ 产生．台維斯(E. A. Davis)曾用外径为 1.450 吋和壁厚为 0.100 吋的中碳鋼（含碳量为 0.23％）管以五种不同比值 n 作了試驗[2]．图 294 表示所得的断裂型式．当比值 n 的数值較小时，裂縫都是周向的；而当 n 較大时，則裂縫都是縱向的．如作一系列的补充試驗就可証实，从一种破坏型式到另一种型式的过渡发生在 $n=0.76$ 时．可以看出，对于周向裂縫，在真实应力的大小与扁平試样的情形大致相同时，沿最大剪应力的平面发生断裂，扁平試样是用管子的同样材料制成的．对于縱向裂縫，断裂似乎較脆．通常沿最大剪应力的平面发生破坏，但由于裂縫两端有高度的应力集中，它在軸向平面内保持为脆性断裂，而无很大的塑性变形．縱向裂縫开始发生时的最大剪应力始終比周向裂縫的情形小得多．这两种断裂的差异似乎大部分是由于試样形状的不同所致．周向裂縫比起縱向裂縫来，材料頗易于頸縮，所以产生縱向裂縫时，局部变形較小，而超过极限強度后載荷的降低也較小．

在加利福尼亚大学的实驗中[3]，曾用低碳鋼的薄壁管子在两种

1) 参看 A. L. Brown 和 J. B. Smith, *Mech. Engr.*, vol. 66, p. 392, 1944.

2) 参看 E. A. Davis (Westinghouse Research Laboratories), *J. Appl. Mech.*, vol. 12, p. 13, 1945, 和 vol. 15, p. 216, 1948.

3) 参看 H. E. Davis 和 E. R. Parker, *J. Appl. Mech.*, vol. 15, p. 201, 1948.

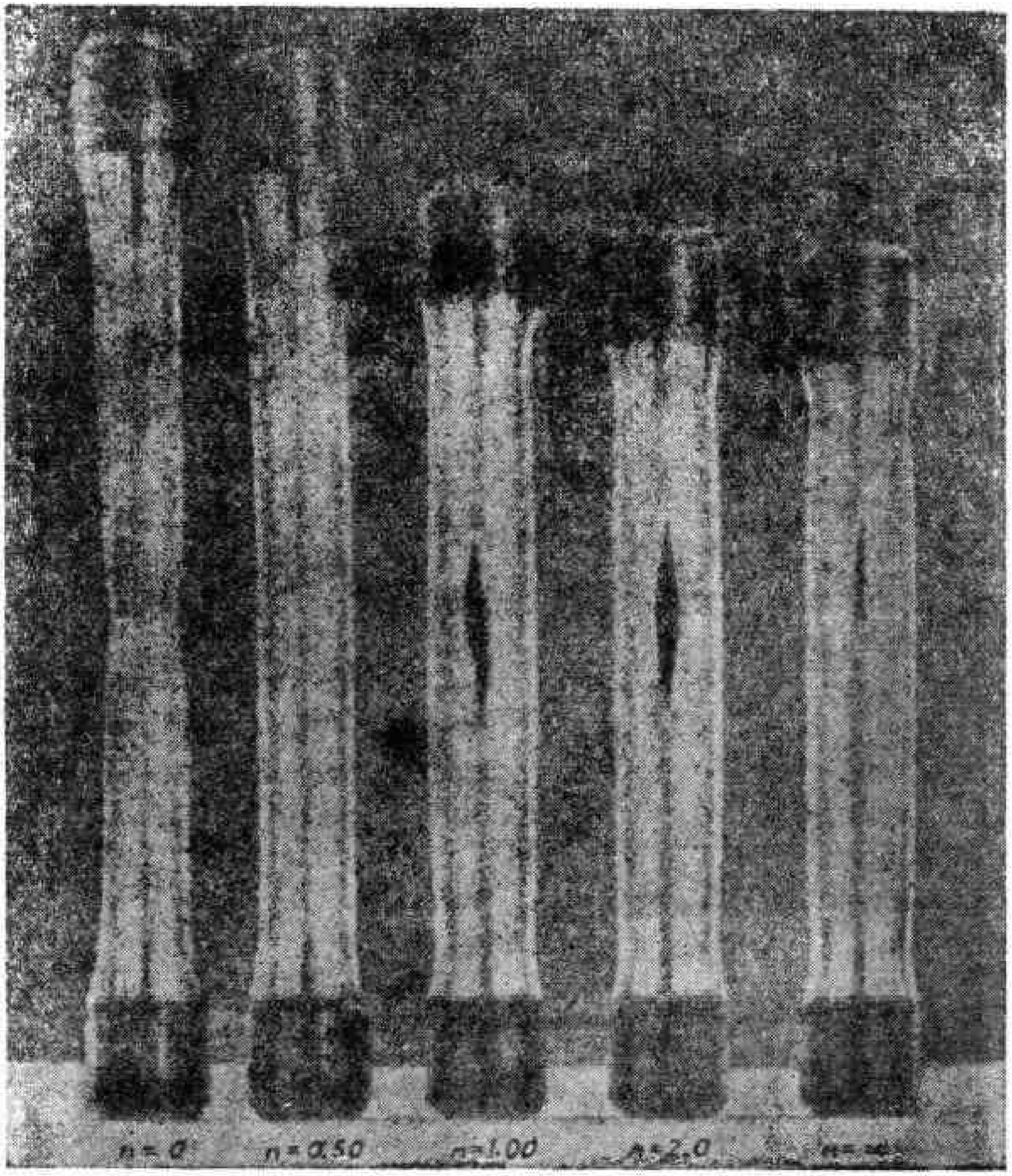


图 294

不同的温度下作了試驗．管子的直径为 $5\frac{1}{4}$ 吋，而温度为 70°F 和 −138°F．室温下的試驗始終得出塑性变形很大的剪切断裂．低温下的試驗（用 $n=1$ 时）显示出塑性变形非常小的脆性断裂．这种脆性是由于端接管子的焊接接头处的局部应力所致．

在用小尺寸管子作这些試驗后，在 70°F 和 −40°F 下对外径为 20 吋、长度为 10 呎、由 $\frac{3}{4}$ 吋船壳鋼板制成的大尺寸管件試样

作了試驗[1]. 低温試驗,特別是用比值 $n=1$ 时,当应力远較同材料制成的普通圓柱試样的拉伸試驗所获得的为小时，就发生脆性断裂.

§ 82. 强度理論[2]. 結构材料的机械性質通常是由使試样承受較簡单的应力状态的試驗来确定的. 例如,我們关于金属強度的資料大多数由拉伸試驗得来. 类似地，研究石块和混凝土等脆性材料时則用压縮試驗. 此外,关于材料的剪切強度,也有一小部分資料可予应用. 然而,在較复杂应力状态下的材料強度只在少数特殊情形下作了研究,如前节所討論的.

为了确定适合于实际設計中所遇到的复杂应力状态的許用应力,曾发展了各种強度理論. 这些理論的目的是,在簡单拉伸或压縮試驗中的性状假設为已知时,預測在复合应力下将于何时破坏. 材料的破坏是指屈服或实际断裂,視何者先发生而定.

物体內可能存在的最一般的应力状态，总是通过規定其三个主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3（图 295）而被完全确定的.在以后的討論中,以拉伸为正,以压縮为負,且选择图 295 中的軸綫时証主应力的代数值具有下列关系:

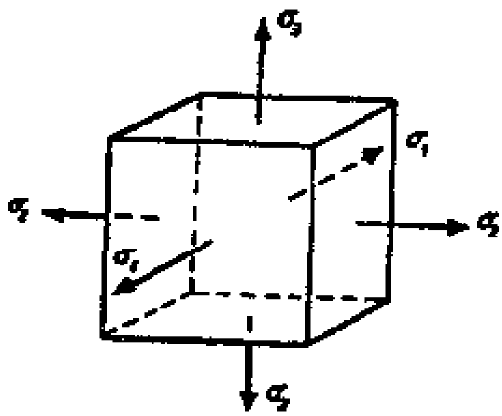


图 295

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \qquad \text{(a)}$$

最大应力理論[3]以最大或最小主应力作为衡量強度的准則. 对于延性材料是指，当最大应力达到材料受簡单拉伸时的屈服点应力或最小应力达到受簡单压縮时的屈服点应力时，在一受力物体的体元(图 295)內便开始屈服. 因

---

1) 参看 *Welding J.*, vol. 27, p. 34_s, 1948.

2) 这些理論的説明可在 H. M. Westergaard 的論文中見到, *J. Franklin Inst.* 1920; A. J. Becker, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 85; F. Schleicher, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 5, p. 199, 1925; A. Nadai, *J. Appl. Mech.*, vol. 1, p. 111, 1933.

3) 这是最古老的破坏理論,它有时称为兰金(Rankine)理論.

此屈服的条件为

$$(\sigma_1)_{Y.P.}=\sigma_{Y.P.},\quad 或\quad |(\sigma_3)_{Y.P.}|=\sigma'_{Y.P.} \tag{291}$$

式中 $\sigma_{Y.P.}$ 和 $\sigma'_{Y.P.}$ 各为簡单拉伸时和簡单压縮时的屈服点应力。許多例子均和最大应力理論相矛盾，前已指出(参看第 356 頁)，在簡单拉伸中，沿与試样軸綫成 45° 角的斜面发生滑移。对于这些斜面，拉伸和压縮应力均非最大值，破坏是由于剪切应力而并非由于拉伸和压縮应力所致。前面还指出了(参看第 373 頁)，一均質而各向同性的材料，虽在簡单压縮时强度頗低，但能承受非常大的流体靜压而不致屈服。这說明了，最大应力的大小不足以决定材料的屈服或断裂状态。

第二个强度理論为通常归功于圣維南的**最大应变理論**。此理論假設：延性材料在最大应变(伸长)等于簡单拉伸中的屈服点应变时，或在最小应变(縮短)等于簡单压縮中的屈服点应变时开始屈服。最大和最小应变[参看原书上卷第66頁式(43)]各为：

$$\frac{\sigma_1}{E}-\frac{\mu}{E}(\sigma_2+\sigma_3)=\varepsilon_1,$$

$$\frac{\sigma_3}{E}-\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)=\varepsilon_3.$$

以拉伸时的屈服点应变 $\sigma_{Y.P.}/E$ 和压縮时的屈服点应变 $\sigma'_{Y.P.}/E$ 代 ε_1 和 ε_3，則按照最大应变理論，破坏准則变为

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_{Y.P.}$$

或

$$|\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)|=\sigma'_{Y.P.} \tag{292}$$

有許多情形可以說明，最大应变理論也是有毛病的。例如，如果使一块板在两垂直方向承受相等的拉伸，則最大应变理論指出，屈服时的拉应力将較簡单拉伸时的应力为高。因为在任一方向的伸长必被垂直方向的拉伸所減小，所以得此結果。然而，实驗并不支持此理論[1]。材料在均匀流体靜压下的試驗結果也与此理論相违背。对于此情形，由方程組(292)的第二式得出

---

1) 参看 Wehage, *Mitt. Tech. Versuchsanstalt.* (Berlin), 1888, p. 89.

$$|\sigma_3|_{Y.P.}=\frac{\sigma'_{Y.P.}}{1-2\mu},$$

式中 σ_3 表示流体静压. 由实驗知，承受均匀压縮的均質材料能承受很高的应力而仍保持为弹性(参看第 373 頁).

最大剪应力理論与实驗結果較为符合，至少对 $\sigma_{Y.P.}=\sigma'_{Y.P.}$ 的延性材料是如此。此理論假設：当材料中的最大剪应力等于簡单拉伸試驗中屈服点的最大剪应力时开始屈服. 由于材料中的最大剪应力等于最大与最小主应力两者之差的一半[1]，以及在拉伸試驗中最大剪应力等于正应力的一半，因此屈服条件为

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_{Y.P.}\tag{293}$$

在机器設計中，对延性材料通常采用最大剪应力理論[2]. 此理論与实驗頗为符合[3]，并且应用簡单.

最大能量理論以材料单位体积內所儲的应变能作为决定破坏的依据[4]. 运用应变能的通式[原书上卷第 327 頁式(195)]，并使图 295 所示情形的能量与簡单拉伸中屈服时的能量相等，則屈服的准則变为

$$w_{Y.P.}=\frac{1}{2E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\frac{\mu}{E}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)=$$

$$=\frac{\sigma_{Y.P.}^2}{2E}.\tag{294}$$

为了比較上述各強度理論，我們来研究純剪切的情形. 对于此二維应力的特殊情形，最大的拉伸、压縮和剪切应力在数值上均

---

1) 参看原书上卷第 66 頁.

2) J. Marin 对机器設計中所用到的各种強度理論作了比較，*Product Engrg.*, May 1937.

3) J. J. Guest 的实驗支持此理論，*Phil. Mag.*, vol. 50, p. 69, 1900. 并参看 L. B. Turner, *Engineering*, vol. 86, p. 169; W. A. Scoble, *Phil. Mag.*, Dec. 1906, 和 Jan. 1910; C. A. Smith, *Engineering*, vol. 88. p. 238.

4) 此理論是由 Beltrami 首先提出的，*Rendiconti*, p. 704, 1885; *Math. Ann.*, p. 94, 1903. 并参看 Girtler, *Sitzungsber. Wiener Akad.*, vol. 116, II_a, p. 509, 1907; B. P. Haigh, *Engineering*, vol. 109, p. 158, 1920, 和 *Brit. Assoc. Adv. Sci.* (Edinburgh) *Repts.*, 1921.

相等[参看原书上卷第 57 頁式(a)],即

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad \sigma_2 = 0.$$

設材料的屈服点在拉伸和压縮时相同,按照最大应力理論、最大应变理論和最大剪应力理論,屈服的条件各为

$$\tau_{Y.P.} = \sigma_{Y.P.},$$

$$\tau_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{1+\mu},$$

$$\tau_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{2}.$$

最大能量理論給出下列关系式:

$$w_{Y.P.} = \frac{\sigma_1^2(1+\mu)}{E} = \frac{\sigma_{Y.P.}^2}{2E},$$

从而得

$$\tau_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{2(1+\mu)}}.$$

对于鋼,取 $\mu = 0.3$, 我們求得下列結果:

最大应力理論……$\tau_{Y.P.} = \sigma_{Y.P.}$

最大应变理論……$\tau_{Y.P.} = 0.77\sigma_{Y.P.}$

最大剪应力理論……$\tau_{Y.P.} = 0.50\sigma_{Y.P.}$

最大能量理論……$\tau_{Y.P.} = 0.62\sigma_{Y.P.}$

可以看出,在此特例中,各种理論的差别很大[1]. 例如,在設計一受扭轉的圓軸时,首先必須假設剪切时資用应力的許用值 $\tau_W = \tau_{max} = \tau_{Y.P.}/n$. 于是軸的直径可由原书上卷第 284 頁式(152)求得. 运用上述四种理論求得的直径,其比值如下:

$$1:1.09:1.26:1.17.$$

比較上述四种強度理論的另一方法示于图 296 中. 此图是对拉伸和压縮时屈服点应力相同,并且承受二維应力[2]即 $\sigma_3 = 0$ 的

1) 应用于各种設計問題的強度理論的比較載于 Roth 的論文中, *Z. Math. u. Phys.*, vol. 48, 1902.

2) 参看 A. J. Becker 的論文, *loc. cit.*, p. 444; 和 B. P. Haigh, *loc. cit.*, p. 448.

材料繪出的．图上各綫代表开始屈服时 σ_1 和 σ_2 之值．最大应力理論用正方形 *1234* 来代表，其中长度 OA 和 OB 代表沿相应主应力方向受簡单拉伸时的屈服点应力．同样，A' 和 B' 代表簡单压縮时的屈服点应力．点 *1* 表示两垂直方向有相等的拉伸．在簡单拉伸时，每一应力均与屈服点应力相等．按照最大应力理論，在正方形 *1234* 內各点所代表的应力下，均不致发生屈服．

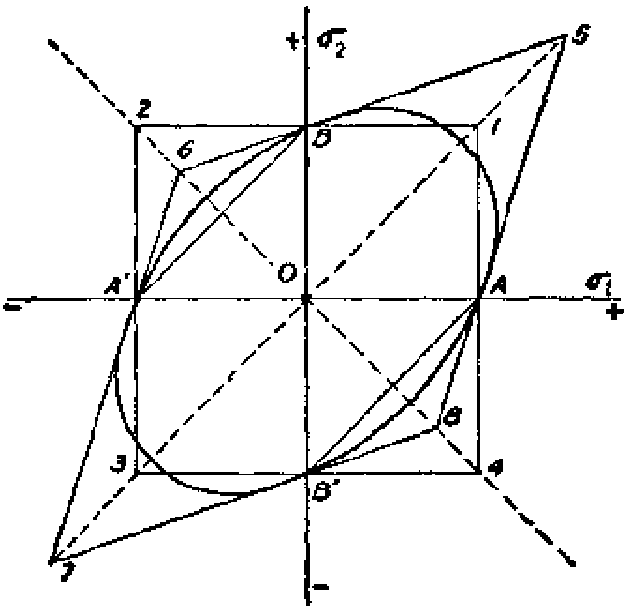


图 296

最大应变理論用菱形 *5678*（图 296）来代表．由于在一个方向的拉伸使在垂直方向的应变减小，因此由此理論知，两相等的拉伸将使屈服时之值（点 *5*）远較最大应力理論所示的（点 *1*）为高．由式(292)得，点 5 的坐标为 $\sigma_{Y.P.}/(1-\mu)$．如果两主应力的大小相等但符号相反，则由最大应变理論知，在点 6 和点 8 处开始屈服，此两点的坐标在数值上等于 $\sigma_{Y.P.}/(1+\mu)$．因此在这些点上的应力值較最大应力理論所示的（点 2 和 4）为低．

最大剪应力理論用不等边六角形 $A1BA'3B'A$ 来代表，此六角形是根据式(293)作出的．运用式(293)时，应当注意，对于此情形 $\sigma_3=0$，因此每当 σ_2 为負值时，必須用 σ_2 而不用 σ_3．当两主应力的符号相同时，此理論与最大应力理論取得一致，但是当主应力的符号相反时，就有很大的差別．

对于二維应力問題，最大能量理論的式(294)可簡化为：

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\mu\sigma_1\sigma_2=\sigma_{Y.P.}^2$$

繪出此方程式，我們可得图 296 所示的椭圓．此椭圓对代表最大剪应力理論的六角形只有較小的偏差．

当材料在各个方向承受均匀的流体靜压时($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-p$)，

此时最大能量理論給出：

$$p_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{3(1-2\mu)}}, \tag{b}$$

式中 $p_{Y.P.}$ 为材料开始屈服时的压力。然而，此結果与均匀压縮試驗不符。如前所述(参看第 373 頁)，均質而各向同性的材料能承受很大的流体靜压而仍保持为弹性。

为了使理論与实驗較为符合，虎勃[1](Huber)建議将总应变能分为两部分：(1)均匀拉伸或压縮的应变能，和(2)畸变的应变能。于是他建議将畸变应变能单独用来决定材料的屈服和破坏[2]。为了达到应变能分为两部分的目的，我們仍从决定于三个主应力 σ_1，σ_2 和 σ_3 的一般应力状态(图 295)开始。于是由胡克定律得

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

将此三式相加，得

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \tag{c}$$

此式說明了，单位体积变化与三个主应力之和成正比。如果此和为零，则体积不改变，而材料只承受畸变变形。

如果 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$，則得

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1-2\mu}{E}p. \tag{d}$$

这时将无畸变，而只有均匀拉伸或压縮。

---

1) M. T. Huber, Czasopismo techniczne, Lwów (Lemberg), 1904. 并参看 A. Föppl 和 L. Föppl, Drang und Zwang, Munich, 2d Ed., vol. 1, p. 50, 1924.

2) J. C. Maxwell 似乎是首先發表下列意見者："当'畸变应变能'达到某一极限时，体元将开始破坏"；Maxwell 給 William Thomson 的信件(1856)中曾說明了此点，只是在 Maxwell 的信札發表后才被人知道。

在一般情形下，让我們引用記号

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=p, \tag{e}$$

然后将三个主应力中的每一个都分为两部分：

$$\sigma_1=p+\sigma_1',\ \sigma_2=p+\sigma_2',\ \sigma_3=p+\sigma_3'. \tag{f}$$

将此三式相加，并运用式(e)，得

$$\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'=0.$$

由于 σ_1', σ_2' 和 σ_3' 三者之和等于零，因此这些应力只引起畸变，而式(f)提供了把給定的应力系 σ_1, σ_2 和 σ_3 分为下列两組的一个方法：(1)只引起体积变化的均匀拉伸或压縮 p，和(2)只引起畸变的应力系 σ_1', σ_2' 和 σ_3'.

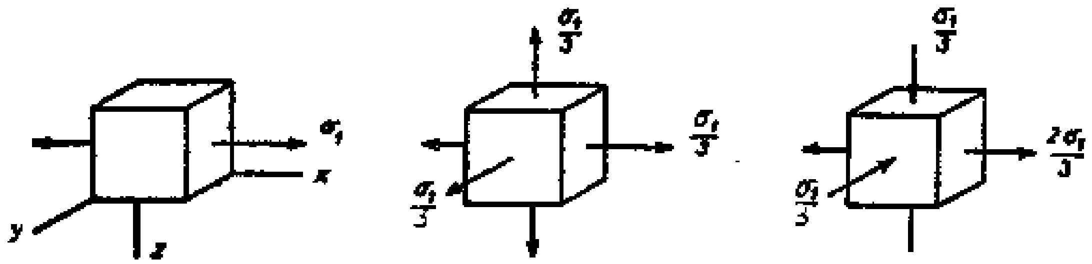


图 297

我們来研究簡单拉伸的情形(图 297a)作为应用式(f)的一例．将 $\sigma_2=\sigma_3=0$ 代入式(e)和(f)，得

$$p=\frac{\sigma_1}{3},\quad \sigma_1'=\frac{2\sigma_1}{3},\quad \sigma_2'=\sigma_3'=-\frac{\sigma_1}{3}.$$

因此在 x 方向的簡单拉伸，可化为均匀拉伸(图 297b)与在 xy 和 xz 平面內純剪切的組合(图 297c)． 可以看出，只引起畸变(图 297c)的应力在均匀拉伸(图 297b)时产生的位移上所作的功等于零． 因此，情形(b)和(c)的应变能彼此是无关的，而在簡单拉伸(图297a)时的总应变能系由均匀拉伸应变能与畸变应变能的相加而得．

在所有三个主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 都存在的一般情形下，也能用此結論． 由此得出，畸变应变能可从总应变能中减去均匀拉伸应

变能而得，以

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

代入式(294)，得均匀拉伸应变能的表达式为

$$\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2.$$

因此在一般情形下，畸变应变能为

$$w_1=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)]-$$

$$-\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=$$

$$=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2].\quad(295)$$

于是对于在简单拉伸时具有一明显屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$ 的延性材料，此式可作为决定其破坏的依据。按照此理論，对于应力 σ_1、σ_2 和 σ_3 的一般情形，当变形能[式(295)]达到簡单拉伸試験中屈服点的变形能之值时即开始屈服。后者系由式(295)代入以

$$\sigma_1=\sigma_{Y.P.},\quad \sigma_2=\sigma_3=0$$

而得，即

$$w_1=\frac{1+\mu}{3E}\sigma_{Y.P.}^2.$$

于是，根据变形能理論的屈服条件为

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2=2\sigma_{Y.P.}^2.\qquad(296)$$

在二維应力的特殊情形下，我們以 $\sigma_3=0$ 代入式(296)，則屈服条件变成

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2=\sigma_{Y.P.}^2.\qquad(297)$$

例如，研究同时承受軸向拉伸和扭轉的薄管(参看第 375 頁)，以 σ 和 τ 表示相应的应力，則主应力将为[参看原书上卷第50頁式(31)和(32)]

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2},\quad \sigma_2=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2},$$

而屈服条件[式(297)]变成

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_{Y.P.}^2 \tag{298}$$

此式在前面已討論过(第 375 頁),它与实驗很为符合. 在只受扭轉的情形下,我們有 $\sigma = 0$, 式(298)給出

$$\tau_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_{Y.P.}, \tag{299}$$

此式与实驗結果仍很符合.

目前,由式(296)表示的屈服条件, 通常認为对延性材料是正确的,这假設了当畸变应变能达到一确定值时材料才开始屈服.

艾辛謌[1](Eichinger)曾指出,如研究作用在如图 298 中 ABC 的一个八面体平面上的剪应力, 也可获得最大变形能理論所給出的同样屈服条件[式(296)]. 图298中的体元承受主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 的作用. 由几何关系可以看出,八面体平面上的法綫 n 与座标軸 x, y, 和 z 之間夹角的余弦等于 $1/\sqrt{3}$. 将作用在八面体平面上的合成单位应力 S 分解为三个分量 X, Y, Z, 并且列出三个靜力平衡方程式,则得

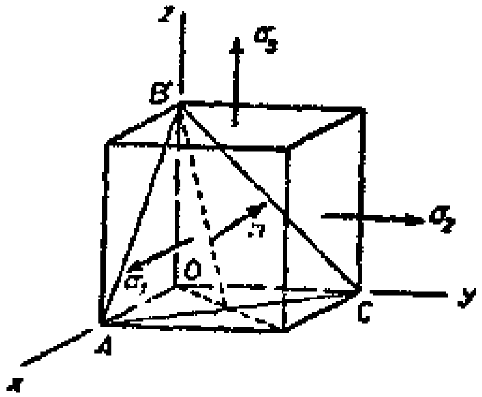


图 298

$$X = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad Y = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

于是作用在八面体平面上的合成应力为

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

将分量 X, Y 和 Z 投影到法綫 n 的方向, 可得应力 S 的法向分量 n, 即

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

1) A. Eichinger. *Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, p. 325, 1926.

于是八面体平面上的剪应力 τ_{oct} 为

$$\tau_{oct}=\sqrt{S^2-N^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}.$$

將此結果与式(296)作一比較可以看出，根据变形能理論的屈服条件与在八面体剪应力达到一临界值时开始屈服的这种說法等价，此临界值的大小等于

$$(\tau_{oct})_{cr}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{Y.P.}=0.47\sigma_{Y.P.}.$$

扎克斯(G. Sachs)曾用单晶体的临界值 τ_{cr}（参看第 349 頁）作为計算多晶体試样屈服点应力的依据[1]。由第 349 頁式(b)知，加于单晶体試样上的屈服点載荷与晶体的定向有关。將多晶体試样看作一組任意分布的晶体，扎克斯用一近似的平均方法，計算了試样在拉伸时的 $\sigma_{Y.P.}$ 与单晶体試样的 τ_{cr} 間的关系。計算时忽略了晶体境界的影响，并假設在屈服点所有晶体同时屈服。对于具有面心立方晶格結构的晶体（如鋁、銅和鎳等），他求得

$$\sigma_{Y.P.}=2.238\tau_{cr}.$$

对于扭轉重复此計算，他求得多晶体試样在剪切时的屈服点应力为

$$\tau_{Y.P.}=1.293\tau_{cr}.$$

由上列两式得

$$\tau_{Y.P.}=\frac{1.293}{2.238}\sigma_{Y.P.}\approx 0.577\sigma_{Y.P.},$$

此与变形能理論的結果完全一致[参看式(299)]。扎克斯曾假設，对具有体心立方晶格結构的晶体（如鉄）可得类似的結果。因此我們可以看出，前面由假設当任意材料的变形能达到一定数量时，晶

---

1) G. Sachs, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 72, p. 734, 1928. 并参看 H. L. Cox 和 D. G. Sopwith, *Proc. Phys. Soc.* (London), vol. 49, p. 134, 1937, 和 U. Dehlinger, *Z. Metallkunde*, vol. 35, p. 182, 1943.

体材料即开始屈服而得的結果，是有一定的物理基础的.

在前面的討論中，我們論述了对处于一般应力状态下的延性材料建立开始屈服的准則. 对于断裂时无塑性变形的脆性材料，我們也需要在一般应力系 σ_1, σ_2 和 σ_3 下发生断裂的准則. 这一准則是由莫尔(Mohr)发展的強度理論[1] 所提供的，此理論不仅研究了屈服，还研究了断裂. 在发展他的理論时，莫尔用圓来图示一物体体元上的应力状态，如原书上卷第65頁第 18 节所述. 在此图形(莫尔圓)中，作用于任意平面上的应力的法向和切向分量可由阴綫面积(图 299)中某一点的坐标来表示. 位于同一垂綫(例如 MN)上的各点代表具有同一正应力 σ 和不同剪应力的平面上的应力. 可以很自然地假設，在所有这些平面中，最薄弱的是具有最大剪应力的平面，最大剪应力用外圓上的点 N 表示. 用任何其他垂綫上的各点再作同样推論，最后得出这样的結論：最薄弱的平面必定是由外圓 ANC 上各点代表其应力状态的平面之一. 因此，单由外圓就足以决定**极限应力状态**，即开始屈服或发生断裂时的应力状态，开始屈服还是发生断裂視材料是延性还是脆性而定.

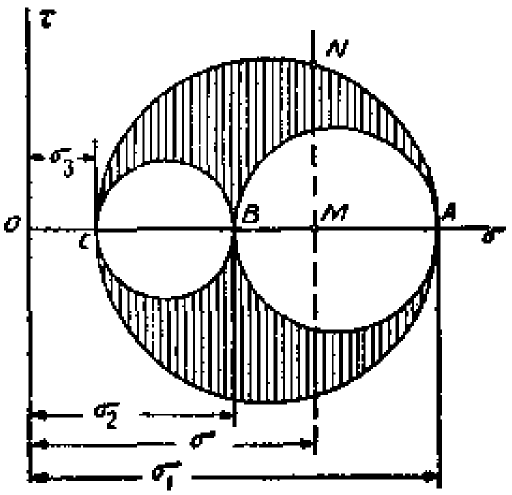


图 299

我們从确定屈服时的应力开始. 于是在图 300

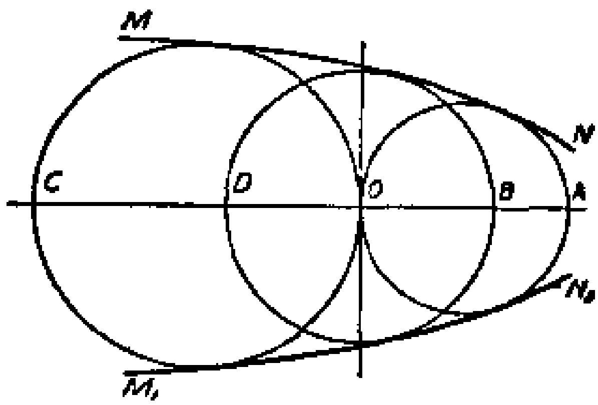


图 300

1) O. Mohr, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 44, p. 1524, 1900. 并参看他的著作，Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, 2nd Ed., Berlin, p. 192, 1914.

中，直径为 OA 的圆代表简单拉伸时的屈服条件。同样，直径为 OC 的圆代表简单压缩时的屈服条件，而直径为 DB 的圆则代表純剪切时的屈服条件。如果对一給定材料作实验获得了数个这样的圆后，就可作出这些圆的包絡綫（MN 和 M_1N_1）。于是莫尔假設，只有在相切于这些包絡綫的任何一个圆所代表的应力状态下，才开始屈服。

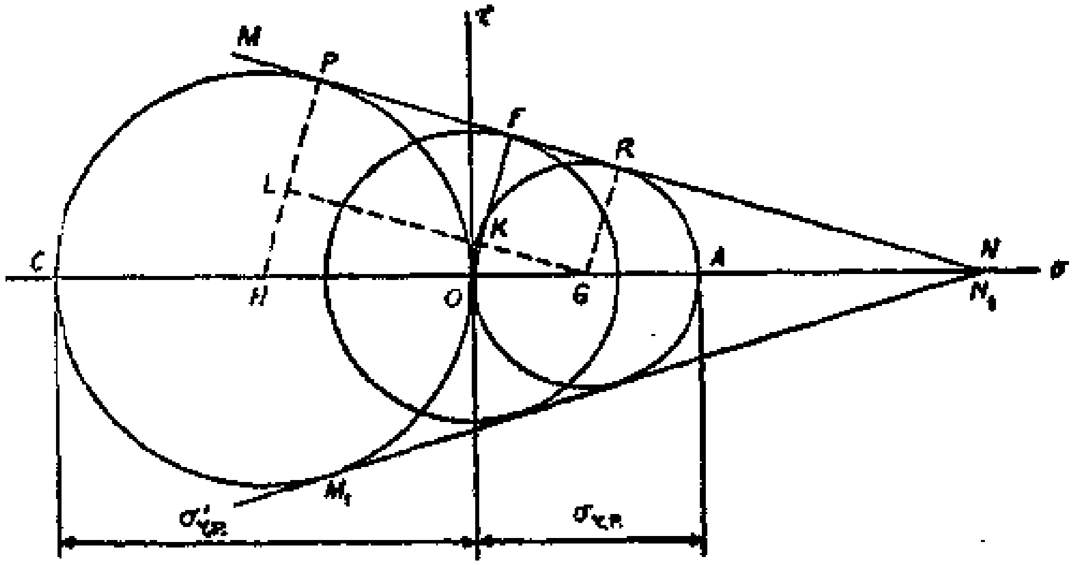


图 301

例如，假設包絡綫 MN 和 M_1N_1 可用直綫来代替(图 301)。于是，知道了簡单拉伸时的极限条件($\sigma_1=\sigma_{Y.P.}$)和簡单压縮时的极限条件($\sigma_3=-\sigma'_{Y.P.}$)，就不难得到純剪切时的屈服条件。只需求出圆心在点 O 并切于 MN 的圆的半径 OF 即可。由图 301 得 $\overline{OK}=\overline{OF}-\overline{KF}=\tau_{Y.P.}-\sigma_{Y.P.}/2$ 和 $\overline{HL}=\overline{HP}-\overline{LP}=\sigma'_{Y.P.}/2-\sigma_{Y.P.}/2$。于是由三角形 GOK 和 GHL 的相似性得

$$\overline{OK}/\overline{HL}=\overline{GO}/\overline{GH}$$

或

$$\frac{2\tau_{Y.P.}-\sigma_{Y.P.}}{\sigma'_{Y.P.}-\sigma_{Y.P.}}=\frac{\sigma_{Y.P.}}{\sigma'_{Y.P.}+\sigma_{Y.P.}},$$

从而得

$$\tau_{Y.P.}=\frac{\sigma_{Y.P.}\sigma'_{Y.P.}}{\sigma_{Y.P.}+\sigma'_{Y.P.}}. \tag{g}$$

当 $\sigma_{Y.P.}=\sigma'_{Y.P.}$ 时，式(g)与最大剪应力理論完全一致。

现在我們将莫尔理論应用于脆性材料受二維应力的情形，假設在图 302 中，OA 代表材料受拉伸时的极限强度 σ_{ut}，而 OC 代表受压縮时的极限强度 σ_{uc}. 于是，对于任意的比值 $\sigma_{max}/\sigma_{min}=\sigma_1/\sigma_2$，作一直徑 $\overline{BD}=\sigma_1-\sigma_2$ 并切于直綫 MN 的圓，就可求得这些应力的极限值[1]. 于是由图 302 得下列关系式：

$$\overline{SK}=\overline{SF}-\overline{KF}=(\sigma_1-\sigma_2)/2-\sigma_{ut}/2,$$
$$\overline{HL}=\overline{HP}-\overline{LP}=\sigma_{uc}/2-\sigma_{ut}/2,$$
$$\overline{GS}=\overline{GO}+\overline{OS}=\sigma_{ut}/2+(-\sigma_2-\sigma_1)/2,$$
$$\overline{GH}=\overline{GO}+\overline{OH}=\sigma_{ut}/2+\sigma_{uc}/2;$$

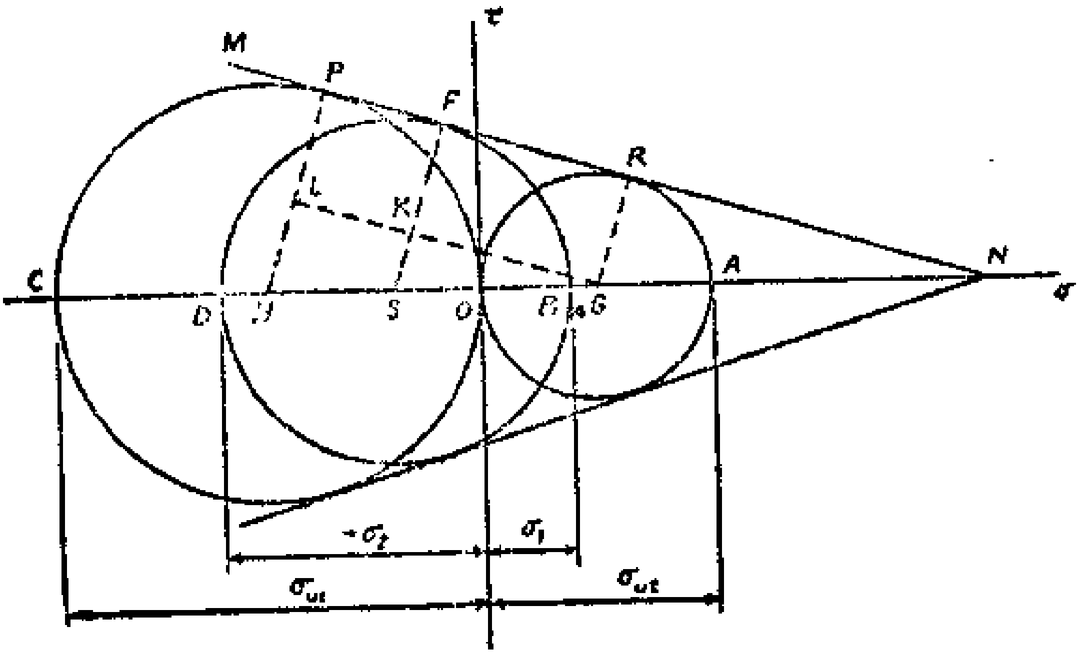


图 302

由三角形 GSK 和 GHL 的相似性得

$$\overline{SK}/\overline{HL}=\overline{GS}/\overline{GH}$$

或

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2-\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}-\sigma_{ut}}=\frac{\sigma_{ut}-\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_{ut}+\sigma_{uc}},$$

从而得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{ut}}-\frac{\sigma_2}{\sigma_{uc}}=1. \qquad \text{(h)}$$

1) 注意：σ_1 和 σ_2 均为代数值，因此距离 $OD=-\sigma_2$.

因此对于任意給定的比値 σ_1/σ_2，均可計算出断裂时的 σ_1 和 σ_2 之值。

在前段中假設了 σ_1 代表最大主应力 σ_{max}，而 σ_2 代表最小主应力 σ_{min}。由于在二維应力的情形下第三个主应力为零，因此 σ_1 和 σ_2 必定异号（如图 302 所示），而比値 σ_1/σ_2 必定为負値。然而，对于在两个垂直方向受拉伸的情形，第三个主应力 $\sigma_3=0$ 将代表 σ_{min}，而相应的莫尔圓将是图 302 中直径为 OA 的圓。于是当两个拉伸应力中的大者达到 σ_{ut} 值时将发生断裂。同样，对于在两个垂直方向受压縮的情形，应力 $\sigma_3=0$ 代表 σ_{max}，因而求得了图 302 中直径为 OC 的圓。于是当較大的压縮应力达到 σ_{uc} 值时便发生断裂。

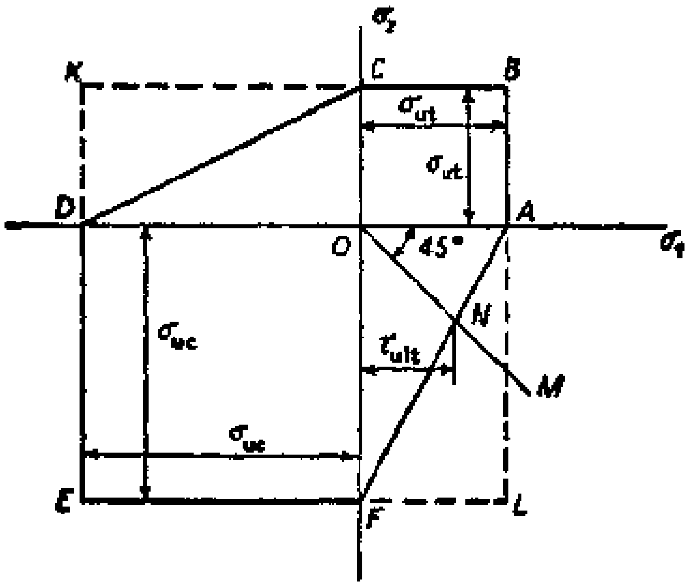


图 303

对莫尔理論作一相似于图 296 的图，对于在两个垂直方向的拉伸，我們得极限直綫 AB 和 BC（图 303），它們表示在此情形下，当較大的拉应力达到 σ_{ut} 值时便发生断裂。同样，对于在两个方向的压縮，我們得直綫 DE 和 EF。如果我們在拉伸时得 σ_1 而在压縮时得 σ_2，则断裂条件可由式(h)表示，此式給出了图 303 中的直綫 AF。同样可得直綫 CD。对于由六角形 $ABCDEF$ 內各点所表示的应力状态，将不发生断裂，而对于比値 σ_1/σ_2 的任意数

值，极限应力均可由此六角形求得．例如，为了求脆性材料受純剪切时的极限強度，我們看出，在此情形下 $\sigma_1=-\sigma_2$，而相应的极限点将是直綫 OM 与六角形一边 AF 的交点 N（图 303）．τ_{ult} 值可由图中决定或由式(h)算得，对于 $\sigma_1=-\sigma_2$，得

$$\sigma_1=\tau_{ult}=\frac{\sigma_{ut}\sigma_{uc}}{\sigma_{ut}+\sigma_{uc}}. \tag{i}$$

此式的形式与用于屈服的式(g)相同．

如果我們将式(i)应用于鑄鉄之类的材料，并假設压縮时的极限应力为拉伸时的极限应力的 4 倍，则得剪切时的极限应力为

$$\tau_{ult}=0.8\sigma_{ut},$$

此与巴赫的实驗[1]相当符合．

按照最大应力理論．图 303 中虛綫所示的正方形 $BKEL$ 代表破坏条件．可以看出，当主应力的符号相反时，用莫尔理論与用最大应力理論比較起来，設計师将偏于安全．虽然只須考虑最外应力圓（图299）的这一假設并不总为实驗所支持[2]，但对于脆性材料，仍可推荐莫尔理論．

§ 83. 冲击試驗． 冲击試驗用于研究材料的**韌性**，即材料在塑性变形过程中吸收能量的能力．在靜力拉伸試驗中，此能量用拉伸試驗图下的面积来表示，可以得知，为了获得高的韌性，材料必須具有高的強度和同时具有大的延性．脆性材料的韌性很低，因为它們在断裂前只有小的塑性变形．由于断裂可能突然发生而无任何显著的变形，因此在結构中用这种材料是危险的．

在討論各种类型的断裂时（參看 §79）已指出，同一材料根据外部条件的不同可以具有脆性材料的性状，也可以具有塑性材料的性状．岩盐的单晶体試样的拉伸試驗指出，如果在室溫下試驗时，在一个主晶面上就发生脆性断裂（裂痕）．如果在热水中試驗时，同一試样就由于沿八面体平面的滑移而作塑性变形．对于結

---

1) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 7th Ed., p. 362.

2) Th. v. Kármán, *Forschungsarb.*, No. 118, 和 Z. *Ver. deut. Ing.*, vol. 55, 1911. 并參看 R. Böker, *Forschungsarb.*, Nos. 175/176.

构軟鋼之类的重要情形，也可能有同样的情况．在通常的拉伸試驗中，鋼可能具有大的塑性变形，但是如果在稍低的温度下試驗时，它就可能发生断裂，而同脆性材料完全一样．在第二次世界大战期間，在焊接的貨船的許多破坏中，就有这种断裂的不幸事例发生[1]．其后的研究工作指出，船壳鋼板的脆性温度与使用温度是同范围的．

为了說明岩盐的单晶体拉伸試样从脆性断裂到塑性断裂的轉化，約費[2](A. F. Joffe)区别了两种不同的拉伸应力：(1)由于沿一个主晶面分离而引起脆性断裂的拉应力 σ_n 和(2)相应于沿晶体的一个八面体平面开始滑移时的拉应力 σ_s[3]．在图 304 中，这两个量均表示为試样温度 t 的函数．在約費的实驗中，对分离的抗力实际上与温度无关，而在图304中，σ_n 的图綫由一水平綫表示．同时，对滑移的抗力受試样温度的影响很大，σ_s 曲綫的纵坐标随着温度的增加而減小．两曲綫的交点 C 定出了温度的臨界值 t_{cr}．如果試驗温度高于 t_{cr}，則对滑移的抗力就小于对分离的抗力，而試样将作塑性屈服．当温度低于 t_{cr} 时，我們得 $\sigma_n < \sigma_s$，試样将由于分离断裂而破坏，破坏时无塑性变形．

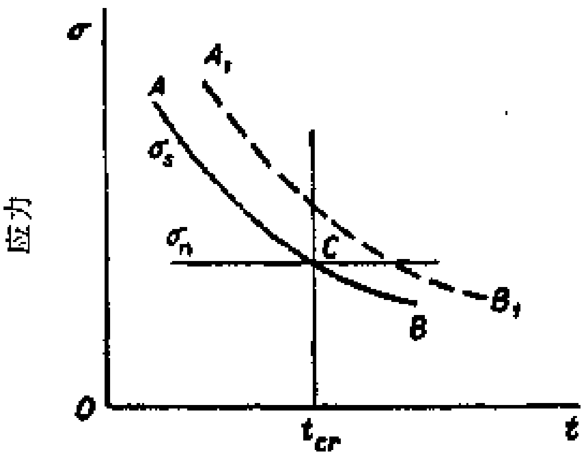


图 304

根据图 304 中的图綫可得其他的重要結論．我們来研究加載速率对試驗結果的影响．已經知道，随着速率的增加，材料对滑移的抗力也增加，但材料对分离的抗力则实际上保持不变．結果 σ_s

1) 参看 W. M. Murray 所主编的 "Fatigue and Fracture of Metals" (1952 年版)一书中 Finn Jonassen 的論文．

2) *Z. Phys.*, vol. 22, p. 286, 1924.

3) 設試样的軸綫与晶軸之一平行．

曲綫的縱坐标将增加，曲綫将移到新的位置 A_1B_1（图 304），但直綫 σ_n 則保持不动．因此两曲綫的交点向右移动了，这說明了临界温度随着加載速率的增加而增加．此結論为冲击試驗所証实，同靜力試驗比較，冲击試驗在較高的温度下引起脆性断裂．

現在假設試样承受扭轉，并取試样的軸綫垂直于八面体平面之一．試样受剪切时，将在剪应力之値与拉伸試驗中的大致相同时开始屈服，但相应的最大正应力 σ_n 之値（这时它与最大剪应力相等）为拉伸試驗中 σ_n 值的一半左右．因此在作一类似于图 304 的扭轉試驗图时，我們必須取 σ_r 曲綫的縱坐标之値为拉伸試驗中之値的一半左右．結果曲綫的交点 C 将向左移动，我們得出，在扭轉試驗中临界温度必定較拉伸試驗中为低．此結論与实驗相符合．

再研究应力状态对临界温度的影响，我們假設沿三个方向的均匀拉伸与簡单拉伸相迭加，于是我們得一三維应力状态．可以知道（参看前节），这样的迭加并不影响开始屈服时的最大剪应力之値．然而，σ_r 之値增加了，图 304 中 σ_r 曲綫的縱坐标将增加，而交点 C 向右移动．因此对于所假設的三維应力状态，临界温度将較簡单拉伸时为高．在一带槽試样的凹口上可产生类似的三維应力状态．同光滑試样比較，这种試样具有較高的 t_{cr} 値[1]．

关于从脆性断裂向塑性断裂轉化时的临界温度的基本概念，是由达維綪科夫加以引伸并应用于結晶材料，特别是各种鋼料的．用一类似于图 304 的图綫，他就能推断各种因素对临界温度的影响，并且由他的实驗工作知，此推断与实驗事实相当符合[2]．冲击試驗被用来确定临界温度．由于在脆性断裂的情形下，引起破坏所需的功的数量較塑性断裂时小很多倍，因此由試驗知，在临界温度下所吸收的能量发生突变．图 305 表示光滑圓柱形鋼試样的冲

1）关于凹槽处应力的較詳細的資料，可参看 W. M. Murray 所編的"Fatigue and Fracture of Metals"（1952）一书中 E. Orowan 写的章节．

2）参看 Davidenkov 的著作，Dynamical Testing of Metals, 1936、及 Problems of Impact in Metal Study, Ed. Acad. Science, Moscow, 1938（俄文版）．如不特别注出，則在下面討論中所給出的結果均取自后者．

击拉伸試驗結果. 可以看出,所吸收的能量在−130°C至−110°C的范围内发生突变.

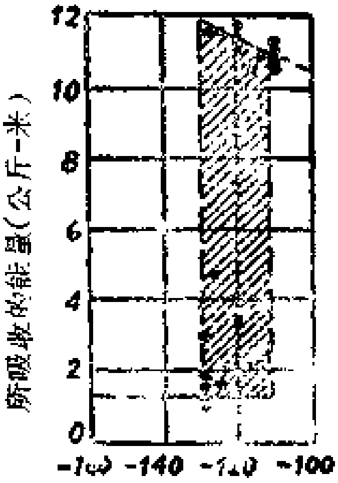


图 305

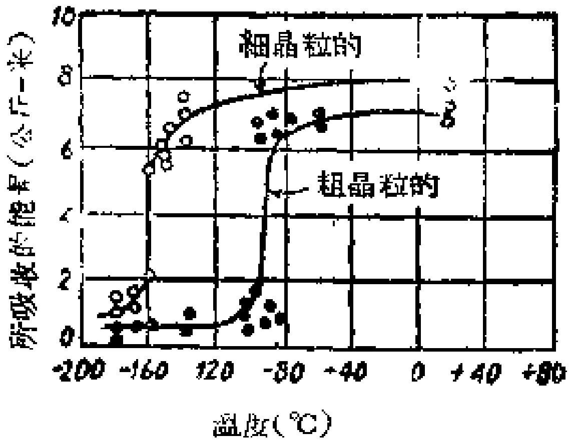


图 306

改变热处理的过程,可大大地改变鋼的晶粒尺寸,研究晶粒尺寸对临界温度值的影响是具有实际意义的. 已經知道,鋼对分离的抗力随着晶粒尺寸的增大而減小. 因此对于粗晶粒的鋼,σ_n的水平綫(图 304)将降低,而临界温度将較細晶粒的鋼为高. 为了証实此結論,使中碳鋼(0.23% 的碳)試样經受两种不同的热处理. 对于第一种情形,将温度提高到1100°C历时两小时,然后使試样在炉中緩慢地冷却. 对于第二种情形,将試样保持在950°C历时二十分鈡,而后让它們在空气中冷却. 用了这种过程,在第一种情形下获得了粗晶粒,而在第二种情形下则获得了細晶粒. 于是将光滑圓柱試样作冲击試驗,其結果示于图 306中. 从图中可看出,粗晶粒鋼的临界温度約为−95°C,而細晶粒鋼的则为−160°C.

此外,还研究了試样尺寸对临界温度的影响. 但在此处,图 304 的簡单图綫不能清楚地說明实驗結果. 随着尺寸的增加,我們可推測对脆性断裂的抗力有所減小,因为具有危险的缺陷的可能性随体积而增加[1](参看第 340 頁). 因此当体积較大时,在图

1) 关于格里非斯准则如何推广到延性材料,可参看 E. Orowan, *loc. cit.*, p. 465.

304 中 σ_n 的水平綫将降低，因而使点 C 向右移动． 但是也可以看出，体积的增加使 σ_y 之值減小（参看第 350 頁），而图 304 中 σ_y 曲綫的相应降低使 C 向相反方向移动．因此最后結果取决于这两个因素的相对重要性．用光滑圓柱試样的实驗指出，σ_n 綫的降低較为重要，因而点 C 向右移动，这說明了临界溫度随試样体积的增加而增加．如将小試样的試驗結果应用于設計大尺寸的結构时，必須考虑这一因素．

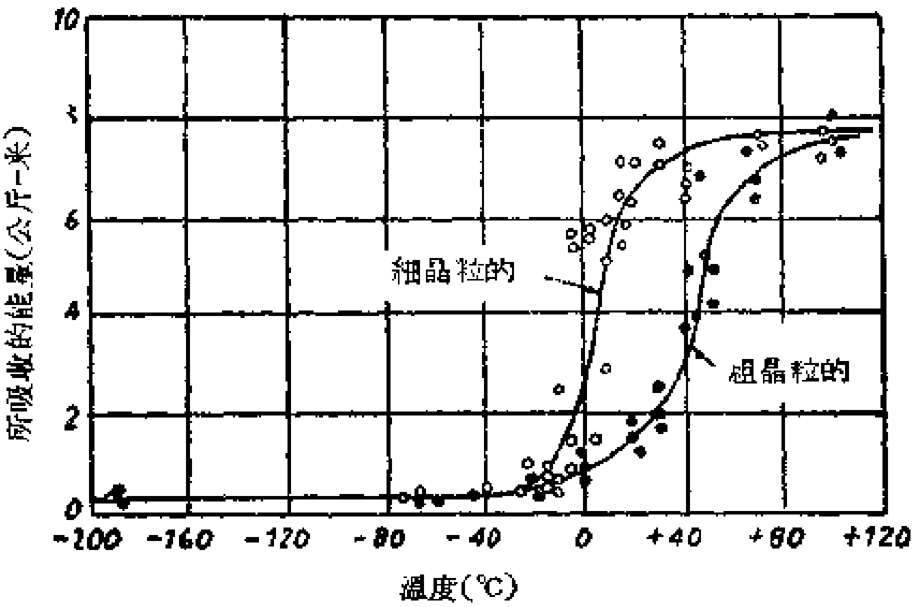


图 307

在前面的討論中，我們只研究了应力分布为均匀的圓柱試样的拉伸試驗．然而实际上，在冲击試驗中均用有凹口的試样，这时就有应力集中存在．为了研究不均匀的应力分布对临界溫度的影响，我們从光滑圓柱試样的弯曲情形开始． 由靜載荷的弯曲試驗指出，鋼在应力远較均匀拉伸中为高时才开始屈服． 在离中性軸最远的薄纖維层中首先达到屈服点应力，而应力較低的邻近材料阻止了在这些纖維中构成屈服面．将图 304 的图綫应用于弯曲試驗时，必須考虑到所引起的屈服点应力的提高．σ_y 曲綫的縱坐标必須予以增加，以使交点 C 向右移动． 于是由弯曲試驗获得的临界溫度将較由拉伸試驗获得的为高．此結論与实驗結果符合．

同样的推論可应用于由凹槽和凹口引起的应力集中的情形

(参看第 357 頁)，我們可推測有凹口杆件的 t_{cr} 有所提高. 在图 307 中示出了前面所討論的(参看图 306)同样两鋼(細晶粒的和粗晶粒的)的弯曲冲击試驗結果[1]. 所用的凹槽型式[弗雷蒙脫(Fremont)型]示于图 308 中. 比較图 306 和 307 我們看出，由于凹槽的存在，临界温度大为提高. 我們还看出，对于有凹口的試样，从脆性断裂轉化为塑性断裂的温度范围要大得多，而临界温度不如无凹口試样的那样明确. 在轉化期間[2]，有凹口試样的靜力試驗指出，断裂的性質逐漸改变，而具有脆性性質的断口表面部分随温度的降低而增大. 同时，引起断裂所需的功的数量却減小. 图 309 表示在有凹口試样的靜力弯曲試驗中，在不同温度下获得的几个載荷挠度图. 达維靖科夫建議取冲击試驗中所吸收的功为在稍高温度下获得的最大功的 40% 时的温度作为临界值. 为了获得冲击試驗中的載荷挠度图，制出了专用的压电石英测功計.

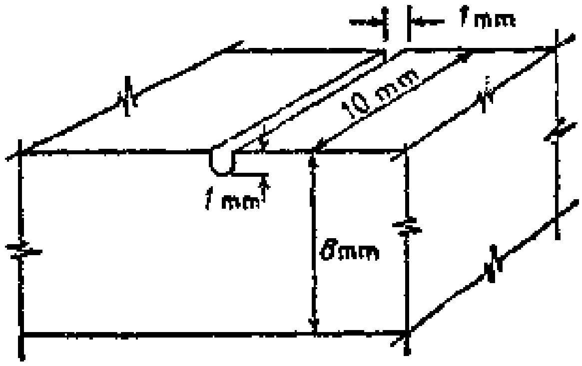


图 308

在作此一般討論后，我們現在来研究在实践中用以确定 t_{cr} 的冲击試驗的方式. 正确地确定 t_{cr} 是很重要的，以免材料的临界温度与結构的使用温度相同而发生危险. 显然，在室温下作冲击試驗是不够的，在重要的情形下，必須在温度的一个范围內作一系列的試驗. 必須作一类似于图 307 的轉化曲綫，从而确定 t_{cr}. 有凹口的杆件最好作弯曲試驗，因为它們在較高的温度下給出轉化曲綫，从而可減少在极低温度下的实驗工作量. 当临界温度已經确定后，如知道了結构的使用温度 t_0，达維靖科夫建議取比值

$$\frac{T_0 - T_{cr}}{T_0} \tag{a}$$

1) 参看 N. N. Davidenkov 和 F. F. Wittman, *J. Tech. Phys.* (Leningrad), vol. 7, p. 343, 1937.

2) Davidenkov 和 Wittman, *ibid.*

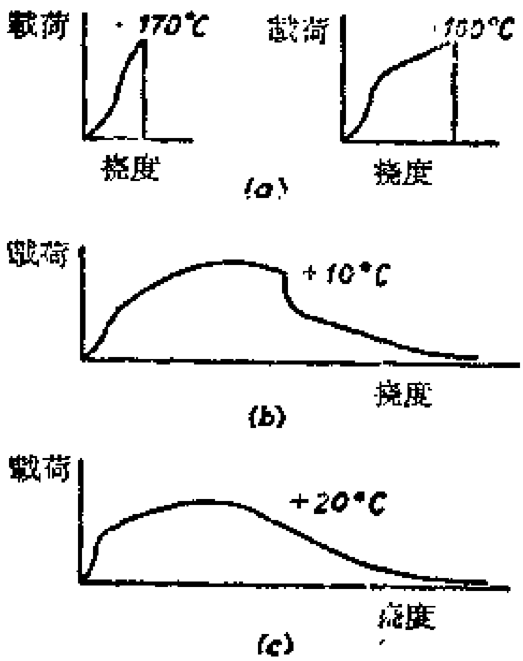


图 309

作为安全的衡量，式中 T_0 和 T_{cr} 各为相应于 t_0 和 t_{cr} 的絕对温度. 当 T_0 趋近于 T_{cr} 时，此比值减小而趋近于零. 这結果是一非常危险的情形，这时微小的外界触动就可引起結构的脆性断裂. 另一方面，当 T_{cr} 趋近于絕对零度时，此比值趋近于 1. 在此情形下，不会发生脆性断裂，只需选择結构的尺寸使其強度足以承受載荷而无塑性变形即可.

在选择合理的比值(a)以用于設計中时，必須研究結构中实际存在的情形. 如尖銳凹角和焊接缺陷等这种促使应力提高的因素，会使 t_{cr} 提高. 結构尺寸的增大也具有这种效果. 为了足够安全和使比值(a)尽可能地大，必須应用 t_{cr} 值很低的材料. 改变材料的化学成份和加以适当的热处理均可降低临界温度. 同粗晶粒的鋼比較，細晶粒的鋼具有較低的 t_{cr} 值. 近年来在美国，对金属在低温下的脆性性質已引起了很大的兴趣，因而我們能指望，我們对此重要課題的知識会有所增进[1].

§84. 金属的疲劳[2]. 机器零件往往承受变应力，了解材料在

---

1) 关于此課題的参考书目可在 N. N. Davidenkov 所著 "Problems of Impact in Metal Study"(1938 年，俄文版)一书中見到. 并参看 W. M. Murray 所編 "Fatigue and Fracture of Metals" (1952)一书中第 229 頁 C. W. MacGregor 所著的章节.

2) 此課題在下列两书中有討論: H. J. Gough, "The Fatigue of Metals", London, 1924; 及 H. F. Moore and J. B. Kommers, "The Fatigue of Metal", New York, 1927. 在此两书中載有关于此課題的参考书目. 关于补充資料，可参看 H. J. Gough 于 1937 年夏在麻省理工学院的講稿复写本. 并参看 R. Cazaud, Fatigue of Metals (英譯本), London, 1953; Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New

这种状态下的強度很为重要[1]. 众所周知，在重复的加載和卸載下，或在反复应力下，当应力小于材料在靜載荷下的极限強度时，材料就可遭到破坏. 引起破坏所需的应力随应力**循环数**的增加而減小. 降低材料对反复应力的抗力的这一現象称为**疲劳**，而应用这种应力的材料試驗則称为**耐久試驗**.

如果 σ_{max} 和 σ_{min} 各为重复应力的最大值和最小值，則代数差

$$R = \sigma_{max} - \sigma_{min} \tag{a}$$

称为**应力幅**. 如果应力幅和最大应力为已知，則循环就可完全确定. 平均应力为

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}). \tag{b}$$

对于**反复应力**的特殊情形 $\sigma_{min} = -\sigma_{max}$，得 $R = 2\sigma_{max}$ 和 $\sigma_m = 0$. 将一反复应力循环与一稳恆的平均应力相迭加，可得任意的变应力循环. 于是变应力的最大值和最小值可由下列公式表示：

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \frac{R}{2}; \quad \sigma_{min} = \sigma_m - \frac{R}{2}. \tag{c}$$

在耐久試驗中，施加載荷有各种不同的方法. 可使試样承受直接的拉伸和压縮，承受弯曲，承受扭轉或承受它們的某种組合. 最簡单的方法是用反复弯曲. 图 310 表示一普通的悬臂式疲劳試

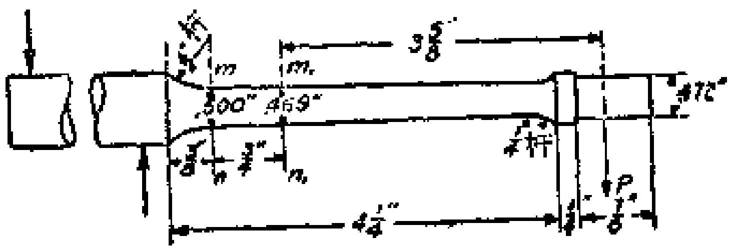


图 310

York, 1941; M. Roš and A. Eichinger, "Die Bruchgefahr fester Körper bei wiederholter Beanspruchung Ermüdung," Eidg. Materialprüfungsanstalt (Zürich) Ber., No. 173, 1950.

1) J. O. Roos 从大量的机器零件断裂的調查中得知，80% 应当归因于疲劳；参看 *Proc. Internat. Assoc. Test. Mat.*, 1912.

杆[1]. 試样的截面沿长度变化,以使最大应力发生在截面mn和m_1n_1之間,且在此区域内应力实际上保持不变. 如用一大的圓角半径并加大圓角附近的杆的直径,就可消除应力集中的影响. 載荷P始終向下,而試样作等速旋轉. 所以每轉半轉,应力变号一次,应力的循环数与試驗机的轉数相等. 这应力为一完全反复的应力,其平均应力为零,而应力幅为 σ_{max} 的两倍.

用若干个試样,将其在不同的載荷P下作試驗,就可得一曲綫,如图 311 所示. 此处 σ_{max} 表示为引起断裂所需的循环数 n 的

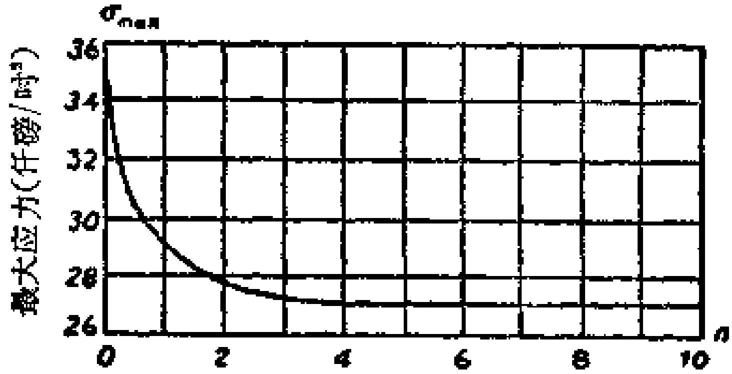


图 311

函数. 所示的曲綫是对軟鋼获得的. 最初 σ_{max} 随 n 的增加而急剧降低,但經过約四百万次循环后,σ_{max} 不再有任何明显的改变,曲綫漸趋于水平綫 $\sigma_{max}=$ $=27000$ 磅/吋^2.相应于这一漸近綫的应力称为材料的**耐久极限**. 在耐久試驗中,目前慣常描繪σ_{max}对$\ln n$曲綫. 这样,曲綫上明显的不連續处显示了耐久极限之值[2].

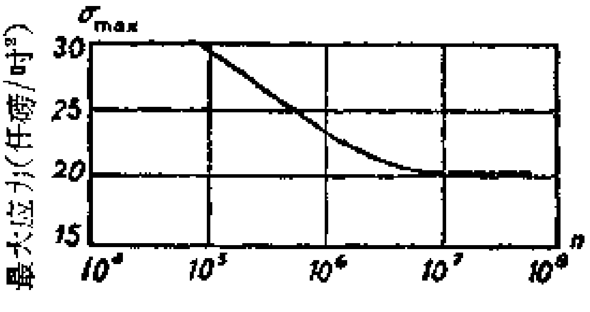


图 312

1) 参看 McAdam, *Chem. and Metallurg. Engrg.*, 1921. 西屋电气公司研究实驗室曾用了这种型式的試样.

2) 疲劳試驗結果通常差別很大,为了改善它們的表达和說明,一些研究者曾推荐应用統計法. 参看 *Symposium on Statistical Aspects of Fatigue*, American Society for Testing Materials, 1951.

图 312 示出了这曲綫的一例.

作靜力試驗的軟鋼試样的断裂与在交变应力下試驗时有很大的差別. 对于第一种情形,在断裂前产生显著的塑性流动,由于晶体的大大伸长,在断口的表面显示出絲状的纖維結构. 然而,疲劳裂縫看来就完全不同了. 由于有局部缺陷或截面突变所引起的应力集中,在材料中某些点上开始发生裂縫. 一旦形成后,由于应力集中,裂縫在其两端扩展. 这种扩展在交变应力的作用下不断进行,直到截面积减小到使留下部分在載荷作用下突然断裂为止.

在疲劳断口中,通常可区分两种晶带,其一是由于裂縫逐漸发展而引起的,另一是由于突然断裂而引起的. 后一晶带与具有一深狭槽的拉伸試样(参看第 368 頁)的断口頗为相象, 这时試样的形状阻止了滑移的发生,因此断裂是克服內聚力的結果. 即使材料为延性,这种断裂也是脆性形式. 对于悬臂式試样(图 310),最大应力是在外层纖維处,因此疲劳裂縫通常发生在圓周上,并向中心扩展. 在由圓角、凹槽或小孔引起的应力集中之处,裂縫通常发生在应力最高的部分,而从此处向外扩展. 对于这种情形,断裂面呈現为与此起点同心的环. 在承受交变应力的机器零件中, 这是一极普通的断裂形式. 因此显而易見, 脆性形式的疲劳断裂是由于断裂的特殊机理,而非由于以前所想的材料的結晶所致.

范朋 (W. Fairbairn) 首先根据实样熟鉄大梁的实驗作了如下的說明[1]:有一**极限应力**,它可施加无限次而不致損坏. 虽然它不能为直接試驗所証实, 但所有实驗証据[2]均支持此說明,而現在通常認为对于鋼或含鉄合金, 有一确定的可承受无限次循环而不致断裂的极限应力幅.

了解 σ-n 曲綫向漸近綫接近的快慢程度实际上非常重要,因为建立耐久极限所需的循环数由此决定. 由实驗知,对于含鉄金属,耐久极限可根据 6—10 百万次循环足够准确地建立起来. 对

1) 参看 W. Fairbairn, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), 1864.
2) O. H. Basquin 曾分析了大量的耐久試驗曲綫, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 10, 1910.

于鋁之类的非鉄金属，则无确定的耐久极限，而 $\sigma-n$ 曲綫的纵坐标随循环数的增加而无限地減小.

从上面的討論可知，确定一特定材料的耐久极限需要大量的試驗和很长的时間. 因此，建立耐久极限与可由靜力試驗确定的其他机械性质之間的相互关系就有实用价值. 所积累的大量实驗数据尙未能建立这一关系[1]. 作为粗略估計，含鉄金属在反复应力下的耐久极限，可取为拉伸試驗中用普通方法获得的极限強度的0.40—0.55倍. 如果用碳鋼等机械特性非常熟悉的材料工作时，这种方式的估計就可認为是可靠的. 否則这种估計可能是錯誤的，必須用直接的耐久試驗来代替. 在图 313 中及本章末了的表 26 中，列出了鋼的耐久試驗的一些結果.

耐久試驗大多数是在完全反复的应力($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$)下进行的，而在机器設計的許多情形中，应力发生变化但并非完全反复. 因此需要知道在这种变应力下的耐久极限. 佛勒(Wöhler)是对疲劳現象首先作系統性研究的实驗者[2]. 他指出，引起断裂所需的应力幅 R 随平均应力 σ_m 的增加而減小. 根据这些試驗和包辛謌的著作[3]，蓋柏(Gerber)建議[4]用拋物綫律表示应力幅 R 与平均应力 σ_m 的关系. 这可用图 314 中的拋物綫說明，图中平均应力和应力幅均表示为极限強度的分数. 当应力为完全反复($\sigma_m = 0$)时，应力幅最大，而当平均应力趋近于极限強度时，应力幅趋近于零. 如果反复应力下的耐久极限和极限強度均为已知，则任何变应力下的耐久极限就可由这种曲綫获得. 其他的研究指出，平均应力与应力幅間的关系并无一般規律[5]. 例如有些材料[6]，R 与 σ_m 間的关

1) 參看 H. J. Gough 的著作，*loc. cit.*, p. 470, 及其講稿，*ibid.*

2) A. Wöhler, *Z. Bauwesen*, vols. 8, 10, 13, 16 and 20, 1858–70. 此工作的英文报告載于 *Engineering*, vol. 11, 1871; 并參看 Unwin, The Testing of Materials of Construction, 3d Ed., 1910.

3) J. Bauschinger, *Mitt. Mech.-tech. Lab.* München, Nos. 13 and 25.

4) W. Gerber, *Z. bayer. Architekt Ing.-Ver.*, 1874. 并參看 Unwin, Elements of Machine Design, vol. 1. Chap. 2.

5) 关于此問題的广泛討論可在 H. J. Gough 的著作中見到，*loc. cit.*, p. 470. 并參看他的講稿，*ibid.*

6) 參看 B. P. Haigh 的論文，*J. Inst. Metals*, vol. 18, 1927.

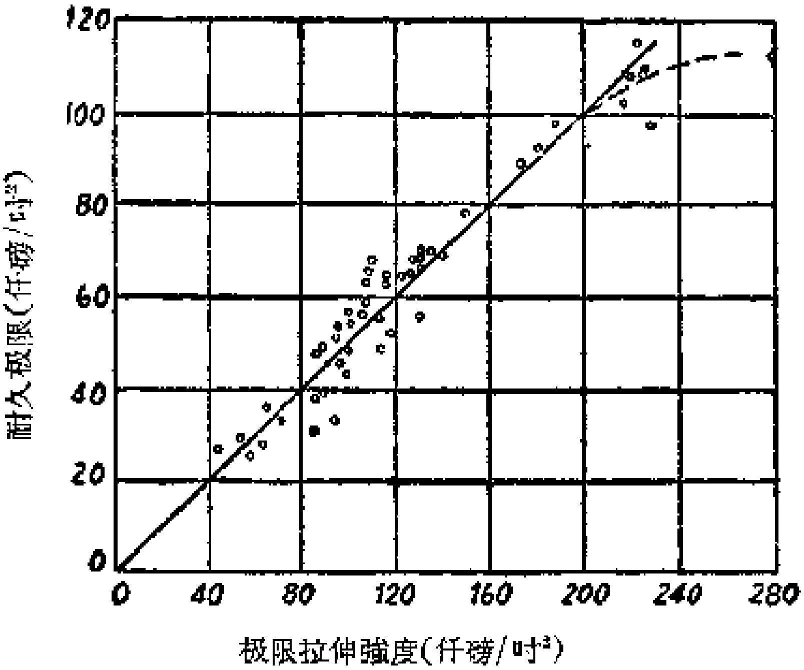


图 313

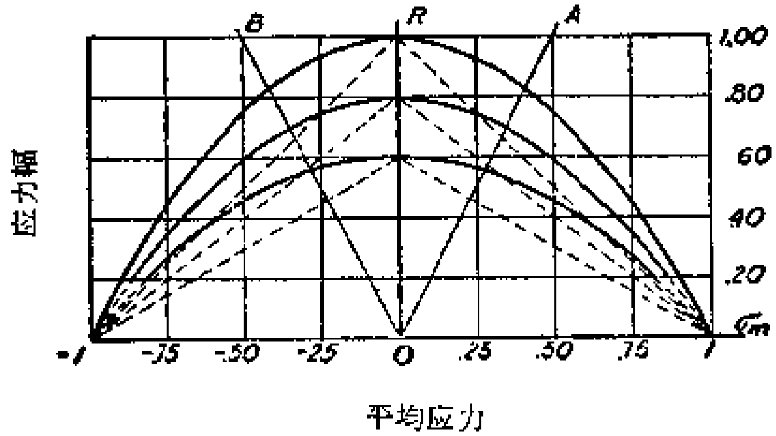


图 314

系用图 314 中的虛綫[古德曼(Goodman)定律]表示比起用抛物綫表示来更为准确.

在图 314 中,直綫 OA 和 OB 的斜率均为 2，它們决定了区域 AOB，在此区域內应力在每一循环內改变其符号. 在此区域外，应力恆为拉伸或压縮. 由实驗确定的数值，在区域 AOB 內通常介于抛物綫与相应的直綫之間[1]. 当应力恆为拉应力或恆为压应

1) 对軟鋼的一些实驗指出，平均应力 σ_m 对应力幅 R 的影响很小. 参看 H. J. Gough 的講稿，*loc. cit.*, p. 470，及他的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 17, p. 113, 1950.

力时，由試驗所得的应力幅 R 之值，有时不仅在盖柏抛物綫之下，而且还在相应的直綫之下。

有时将 σ_{max} 和 σ_{min} 描繪为 σ_m 的函数(图 315)，而不用应力幅 R 作为 σ_m 的函数(图 314)。应力 σ_{max} 和 σ_{min} 可由式(c)求得，描繪时将 $\pm R/2$ 与成 $45°$ 傾角的直綫 AOB 的縱坐标相加。通过点 O 的竪綫(图 315)相当于完全反复的应力。通过点 D 的竪綫相当于脈动拉应力，这时載荷从零变到最大，然后再回到零，同样，通过点 E 的竪綫相当于脉动压应力。点 A 代表材料受拉伸时的极限强度，点 B 則代表受压縮时的极限强度。σ_{max} 和 σ_{min} 的曲綫代表变应力的极限状态。如果相应于一些实际变应力的各点位于面积 $AEBDA$ 之内，則材料就能承受該应力无限次循环而不致断裂。σ_{max} 和 σ_{min} 的曲綫(图 315)均由图 314 中的抛物綫得来。但前已指出，在許多情形下，抛物綫可用两斜綫来代替，于是在图 315 中

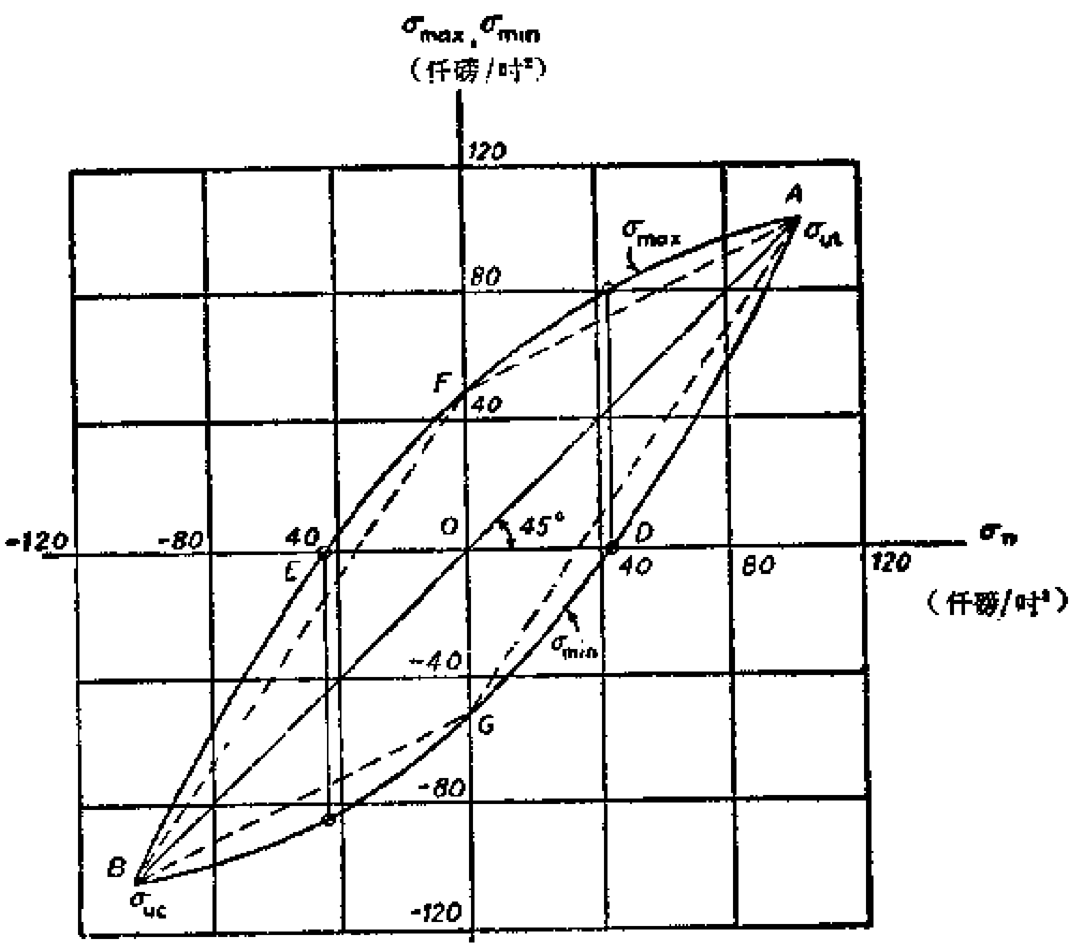


图 315

安全区域变成了平行四边形 $AFBG$。

在前面的討論中，曾假設了应力幅可用一对称曲綫，例如图 314 中的抛物綫来代表；但許多实验指出，应力幅不但决定于平均应力 σ_m 的大小，而且还与其符号有关。当此应力为压应力时，材料所能承受的变应力幅較之它为拉应力时为高。此外，受压縮时的极限強度 σ_{uc} 較之受拉伸时的极限強度 σ_{ut} 为高。因此、我們获得的不是图 314 中的对称抛物綫，而是一不对称曲綫[1]。对于延性材料，安全区域具有图 316 所示的形状。

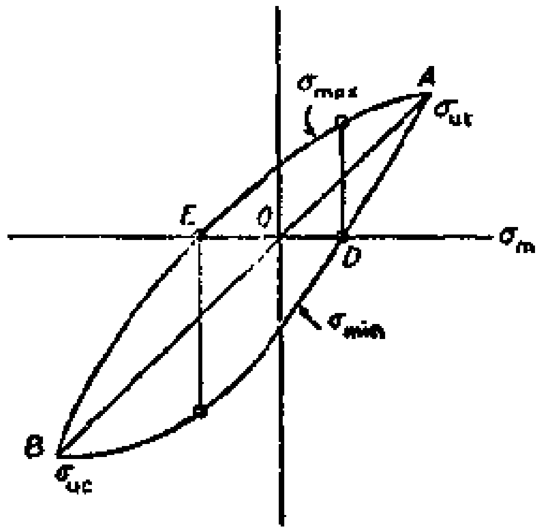


图 316

脆性材料的 σ_{ut} 与 σ_{uc} 之差特别大，对鑄鉄而言，安全区域在压縮方面具有一寬闊的隆起，如图 317 所示[2]。

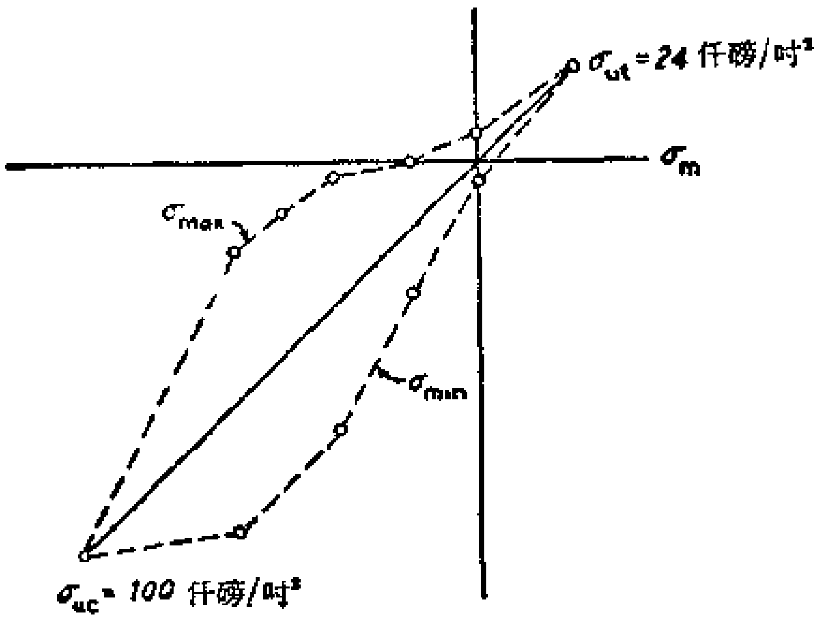


图 317

1) 参看 R. E. Peterson 在"Fatigue and Fracture of Metals"(1952)中的論文。

2) A. Pomp and M. Hempel, *Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch.* (Düsseldorf), vol. 22, p. 169, 1940.

§ 85. 在复合应力下的疲劳. 我們的关于材料疲劳強度的实驗資料，大多数是在单向应力状态下获得的，例如利用旋轉的弯曲試样. 但是在实际問題中，我們常常遇到复合应力的情形. 因此，了解这种状态下的疲劳強度很为重要. 为了获得各种延性材料受

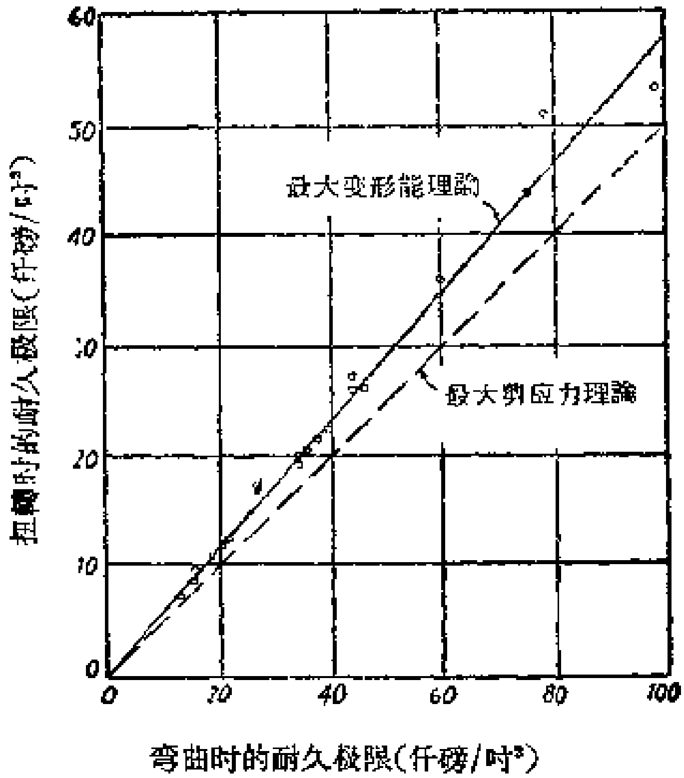


图 318

純剪切时的疲劳強度，进行了使扭轉角变向的一些扭轉試驗. 这些試驗的一些結果[1]示于图 318 中. 为了作比較，作图时以弯曲耐久極限作为横坐标（图 318），而以剪切耐久極限作为縱坐标. 可以看出，对于所有試驗过的材料而言，这些極限之比非常接近于 $\sqrt{3}$. 此值是由最大变形能理論对弯曲和剪切时两者的屈服点应力之比給出的[参看式(299)].

在由于交变弯曲和扭轉同时作用而产生的复合应力下，也作

---

1) 此图取自 R. E. Peterson, Stress Concentration Design Factors, New York, 1953.

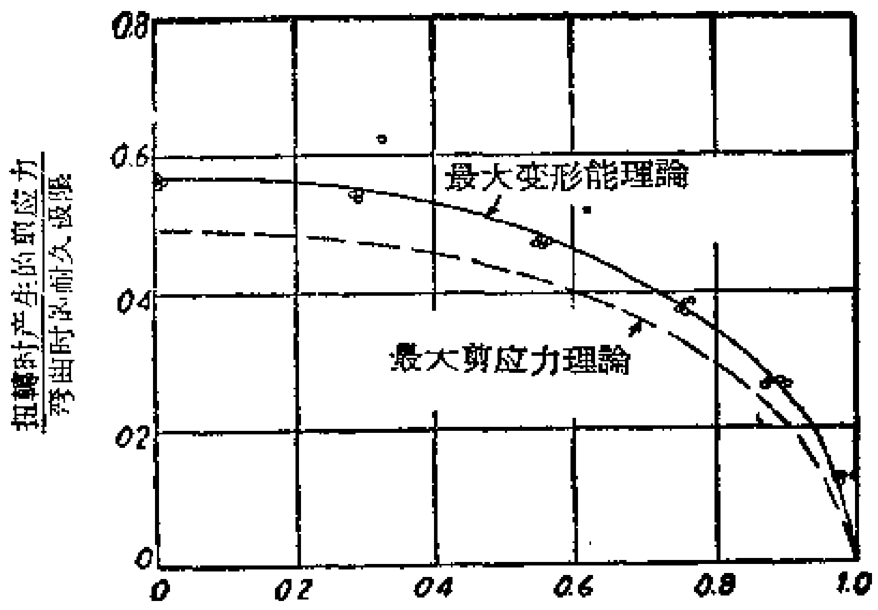


图 319

了疲劳試験[1]，其結果[2]示于图 319 中．正如所預期的那样，这时試驗結果仍与最大变形能理論很为符合，因为通常滑移在疲劳裂縫扩展之前发生[3]． 为了求得用以計算弯曲和扭轉联合作用时耐久极限的方程式，我們只須将变向弯曲时的耐久极限 σ_E 值代入屈服时的相应方程式[参看式(298)]以代替 $\sigma_{Y.P.}$ 即可，这样就得到

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_E^2, \tag{a}$$

相应的橢圓示于图 319 中．显然，試驗結果与方程式很为符合．

受双向拉伸或受拉伸与压縮，而比值 σ_1/σ_2 在一个循环內保持不变的其他疲劳試驗[4]也与最大变形能理論相当符合．因此，我們可用下式(参看第 385 頁)来确定完全反复应力情形下的疲劳极限：

1) 参看 H. J. Gough and H. V. Pollard, *Engineering*, vol. 140, p. 566, 1935. 并参看 Nisihara and Kawamoto, *Trans. Soc. Mech. Engr.* (Japan), vol. 6, p. S-2, 1940.

2) 参看 R. E. Peterson, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 1_1, p. 118, 1943.

3) H. J. Gough, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 33_2, p. 3, 1933.

4) A. F. Maier, *Stahl u. Eisen*, vol. 54, p. 1289, 1934; C. W. MacGregor, *J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 269, 1949.

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_E^2, \tag{b}$$

式中 σ_E 为单向应力状态下的耐久极限. 設 $\sigma_1 > \sigma_2$, 并用記号 $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$, 我們由式(b)得

$$\sigma_1\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} = \sigma_E. \tag{c}$$

对于应力从零变到最大值的脉动应力的情形, 必須以相应的单向脉动应力 σ_{max} 代式(c)中的 σ_E[1].

为了建立三維应力情况下的极限条件,我們运用式(296). 将 $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$ 和 $\sigma_3 = \alpha_1\sigma_1$ 代入,对于完全反复应力的情形,我們得下列方程式:

$$\sigma_1\sqrt{1 - \alpha - \alpha_1 + \alpha^2 + \alpha_1^2 - \alpha\alpha_1} = \sigma_E. \tag{d}$$

由此方程式可計算任意給定的 α 和 α_1 值下 σ_1 的极限值.

只有少量的有用資料可应用于比值 σ_1/σ_2 和 σ_1/σ_3 在載荷循环中改变的情形. 哥夫(Gough)研究了[2]静力弯曲及扭轉与完全反复应力相迭加的情形. 发現靜力矩对变力矩极限值的影响十分微小[3],而在計算变应力的极限值时,可用形式与图 319 相同的橢圓. 橢圓的两軸各等于弯曲和扭轉时的变应力幅[4]. 应力幅相当于所作用的靜应力,因为在此情形下它們是平均应力.

对于脆性材料,莫尔理論可用来計算疲劳中的极限复合应力. 如果这两种应力同号,則只需考虑数值較大的应力即可. 这极限值可由单向应力的图綫得出,对鑄鉄如图 317 所示者. 如果应力异号, 我們就可应用第 390 頁在靜載荷下导出的式(h). 以 σ_1 表示数值較大的主应力,而以 $\sigma_2 = -\alpha\sigma_1$ 表示較小的主应力, 我們得

$$\sigma_1 = \sigma_{ut}\frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{uc} + \alpha\sigma_{ut}}.$$

現在我們可認为[5],在交变应力下 σ_1 的极限值将为

---

1) 如无实驗数据时,可用盖柏拋物綫或古德曼定律来确定 σ_{max}.

2) H. J. Gough, *J. Appl. Mech.*, vol. 17, p. 113, 1950.

3) 所用的材料是比值 $\sigma_{Y.P.}/\sigma_{ult}$ 很大的合金鋼.

4) 如果弯曲和扭轉的耐久极限均由实驗单独地确定时, 这些应力幅就可取自图 318.

5) 这相当于 σ_2 对 σ_1 值的影响在疲劳試驗和靜力試驗中是相同的这个假設.

$$\sigma_1 = \sigma_E \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{uc} + \alpha\sigma_{ut}}, \tag{e}$$

式中 σ_E 为单向应力状态下的耐久极限. 将此式应用于純剪切($\alpha = 1$)的情形,我們得

$$\tau_E = \sigma_E \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}},$$

此与試驗結果相当符合[1].

关于脆性材料的疲劳強度在靜应力与交变应力相迭加的情形,只有很少的資料. 曾对鑄鉄进行过使应力从零变到最大的单向脉动試驗[2]. 所作的試驗是拉伸和压縮試驗. 由試驗知,分别以 σ_{pt} 和 σ_{pc} 表示的这两种情形的极限应力,其比值与靜力試驗中的 σ_{ut}/σ_{uc} 相同. 因此对于脉动扭矩,用与前面情形相同的推論,我們可写出

$$\tau_p = \sigma_{pt} \cdot \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}}.$$

对于鑄鉄, σ_{uc}/σ_{ut} 通常介于 3 与 4 之間.

§86. 影响耐久极限的各种因素. 在經过上节的一般討論后,我們現在来研究影响耐久試驗結果的各种因素.

冷作的影响. 在討論延性金属于室温下的延伸、抽拉和滚輾时曾指出(参看 §78),由于冷作之故,材料的強度提高,屈服点提高和极限強度也稍有提高. 因此我們可推測,冷作也将影响材料的耐久极限. 使鋼試样承受冷拉的实驗[3]指出,中度的拉伸可使耐

---

1) H. J. Gough and H. V. Pollard, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London), vol. 131, p. 1, 及 vol. 132, p. 549, 1935.

2) H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 164, 1927. 并参看 A. Pomp 和 M. Hempel 的論文, *loc. cit.*, p. 479.

3) H. F. Moore and J. B. Kommers, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 124, 1921; 和 O. J. Horger, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 57, p. A-128, 1935. 在摩尔(H. F. Moore)的实驗中,使碳鋼(0.18% 的碳)試样伸长 8% 和 18%. 在霍格(O. J. Horger)的实驗中,用同样的伸长率,但用了含碳量0.48%的鋼.

久极限有所提高．随着冷作的継續增加，会达到使耐久极限由于过劳而下降之点[1]．使材料在冷作后經受温和的热处理，例如使材料在沸水中停留一段时間，可使冷作材料获得改善．

过应力和欠应力的影响． 曾作了这样的实验：在开始作正常的耐久試驗前，将超过耐久极限的应力循环施加許多次．試样的这种**过应力**現象指出，过应力循环有一**极限次数**．循环的极限次数与过应力大小有关．在极限次数以下，耐久极限不受过应力的影响；但在循环的极限次数以上，則耐久极限降低．将过应力的大小对过应力循环的极限次数作图，則可得試驗材料的**破坏曲綫**[2]．对于耐久极限为 35000 磅/吋^{2}的材料，这种曲綫的例子示于图 320 中[3]．此曲綫下的面积表示所有这些数量的过应力都不会引起破坏．

对于通常在低于耐久极限的应力循环下工作，但不时承受过应力循环的机器零件，破坏曲綫在实用上很为重要．如果过应力

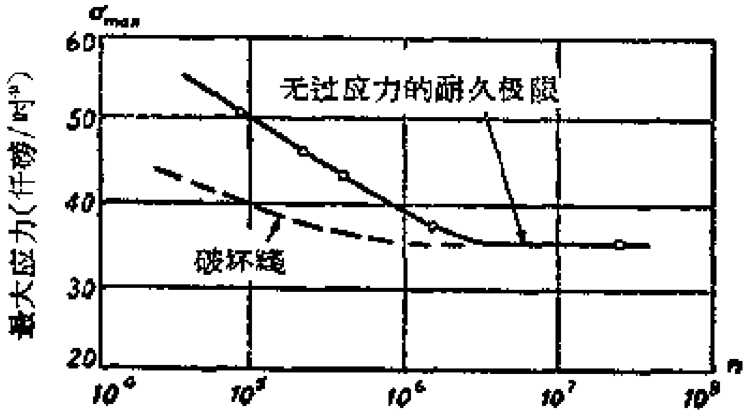


图 320

1) 参看 H. F. Moore and T. M. Jasper, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 136; 及 R. M. Brown, *Trans. Inst. Engrs. Shipbuilders Scot.*, 1928.

2) H. J. French, *Trans. Am. Soc. Steel Treat.*, vol. 21, p. 899, 1933; 及 H. W. Russell and W. A. Welcker, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 36, 1936.

3) 参看 H. F. Moore, *Metals and Alloys*, vol. 7, p. 297, 1936. 关于此課題的参考书目，可参看 Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New York, 1941.

的大小为已知，就可由破坏曲綫很快求得过应力循环的安全次数[1]. 例如，从图 320 中的曲綫可以看出，如果过应力循环次数小于 100000 次，則大小为 ±40000 磅/吋²的过应力循环不会引起破坏.

在飞机設計方面，疲劳强度的問題更为复杂，因为零件在使用中承受各种强度的应力循环. 統計方法被用来策划所需的疲劳試驗. 根据在飞行时所作的应力和加速度的測量，有可能建立任何强度的循环的概率次数. 于是进行疲劳試驗时，使应力强度按統計資料变化[2].

在刚好低于耐久极限的載荷下作耐久試驗，然后小量地增加載荷，可使耐久极限提高，这一現象称为**欠应力**效应. 用这种方法提高的耐久极限的数量与材料有关[3]. 对于軟鋼，此数量有时高达原耐久极限的 30%，但阿姆可(Armco)鉄和銅实际上不受欠应力的影响.

頻率影响. 耐久試驗中循环的頻率影响也曾加以研究. 但当頻率为每分鐘 5000 周左右时，看不出明显的影响. 当頻率較高时，发現所观察到的耐久极限有所增长. 勤金(C. F. Jenkin)曾作了这种非常有趣的实驗[4]. 将頻率增加至每分鐘一百万周以上，他发現阿姆可鉄和鋁等材料的耐久极限提高了 30% 以上. 勤金用小試样的强迫振动来获得这种高頻率. 克罗斯[5] (G. N. Krouse) 曾用一轉梁式試驗机作每分鐘 30000 周的高速試驗. 对于鋁和黃銅，他发現在此速率下耐久极限提高了 8%.

---

1) B. F. Langer 提供了用以計算机器零件在破坏前能承受的过应力循环次数的公式，参看 *J. Appl. Mech.*, vol. 4, p. A-160, 1937. 并参看 M. A. Miner, *ibid.*, vol. 12, 1945.

2) 参考书目可参看 W. M. Murray 所編的 "Fatigue and Fracture of Metals" (1952) 一书中 H. L. Dryden, R. V. Rode 和 P. Kuhn 所著的章节. 并参看 A. M. Freudenthal, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 53, p. 896, 1953.

3) H. F. Moore and T. M. Jasper, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 142, 1924; J. B. Kommers, Engrg. News Record, 1932.

4) C. F. Jenkin, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 109, p. 119, 1925; 及 C. F. Jenkin and G. D. Lehmann, *ibid.*, vol. 125, 1929.

5) G. N. Krouse, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 34, 1934.

温度影响. 在前面的討論中,我們論述了在室温下所作的耐久試驗. 然而,有些情形是材料在低温下承受应力循环的作用,如飞机的某些零件等. 其他材料(例如在汽輪机和内燃机中)則在极高的温度下工作. 因此,在低温和高温下的耐久試驗在实用上很重要. 对莫涅耳(Monel)合金、不銹鋼、鎳鋼和鉻鉬鋼在+20℃和-40℃下所作的比較耐久試驗[1]指出,在任何情形下耐久极限随温度的降低而增高. 对于其他材料也得出了同样的結論[2].

在轉梁式試驗机上[3]以及在反复直接应力試驗机上[4],对各种鋼所作的高温耐久試驗均指出,当温度在300℃—400℃以下时,温度对耐久极限的影响不大. 最大的耐久极限通常在300℃至400℃之間获得,而在100℃至200℃之間耐久极限通常較室温下稍小. 实驗还指出,σ-n 曲綫趋近其漸近綫时不如在室温下的迅速,而确定耐久极限的大小时循环数需要在10^7次以上.

腐蝕疲劳. 腐蝕疲劳現象在实用上也很重要. 此术語被用来說明腐蝕与疲劳的同时作用. 1917年海夫[5](Haigh)发表了黃銅的一些非常有趣的耐久試驗結果,在試驗中他发現,当試样承受盐水、氨或盐酸的作用时,在交变应力下的耐久极限有所降低. 他还指出,如果侵蝕性物质和交变应力不同时作用,則氨对黃銅不发生破坏影响.

麦克阿当[6](McAdam)对腐蝕疲劳作了进一步的研究,他研究

1) H. W. Russell and W. A. Welcker, *ibid.*, vol. 31, p. 122, 1931. 并参看 *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, No. 381, 1931.

2) W. D. Boone and H. B. Wishart, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 35, 1935.

3) H. F. Moore and T. M. Jasper, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 152, 1925; 及 H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, *ibid.*, No. 164, 1927.

4) H. J. Tapsell and J. Bradley, *J. Inst. Metals*, vol. 35, 1926.

5) B. P. Haigh, *ibid.*, vol. 18, 1917.

6) D. J. McAdam, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 26, 1926; vol. 27, 1927; Trans. Am. Soc. Steel Treat., vol. 2, 1927; *Proc. Internat. Congr. Test. Mat.*, Amsterdam, vol. 1, p. 305, 1928. 并参看 H. F. Moore 在 "Metals Handbook" (American Society for Metals, 1939)中的章节, pp. 147—153.

了腐蝕和疲劳对各种金属和合金的联合影响。这些試驗証明，在大多数情形下，耐久試驗前的严重腐蝕远不如同时发生的輕微腐蝕有害。試驗是对反复应力下的耐久极限[1]为 20000 至 40000 磅/吋²的各种含碳量的鋼进行的。当試样在試驗期間受淡水作用时，耐久极限大大降低，且在 16000 至 20000 磅/吋²間变动。这些降低了的耐久极限称为**腐蝕疲劳极限**。試驗指出，在空气中試驗时，耐久极限几乎随鋼的极限强度同比例地提高，而在淡水中試驗时則所得的結果甚为不同。含碳量約在 0.25% 以上的鋼，如果加以热处理，其腐蝕疲劳极限并不能提高，反而可能降低[2]。此外还指出，如果在鋼中加鉻，如其加入量足以提高鋼的一般抗蚀能力，則也就可提高其腐蝕疲劳极限，使其大大超过碳鋼或鎳鋼的极限[3]。

在乾蒸汽中的耐久試驗[4]指出，乾蒸汽并不影响耐久极限，但含空气或水份的蒸汽則使耐久极限降低。在真空中的实驗[5]指出，鋼的耐久极限与在空气中的大致相同，而銅和黃銅在真空中的实驗証明，耐久极限至少分别提高了 14% 和 16%。

使用中有許多破坏情形已知是由腐蝕疲劳所引起的。这些情形包括船舶螺旋桨軸、船舶油机的水冷活塞杆、渦輪机輪叶、机車弹簧、深井油泵杆、鍋炉管和过热器管等零件的破坏。在許多情形下均运用抗蝕材料以免除腐蝕疲劳破坏。麦克阿当所作的抗蝕鋼的实驗指出，这种鋼在腐蝕疲劳試驗中得出非常滿意的結果。最近用特种青銅的实驗[6]指出，在极端腐蝕的条件下試驗的磷青銅和鋁青銅，与最好的不銹鋼比較，具有卓越的腐蝕疲劳抗力。

将經受腐蝕疲劳的零件涂以保护层[7]和加以表面冷作[8]对消除

---

1) 由空气中的試驗決定。
2) McAdam, *Proc. Internat. Congr. Test. Mat.*, Amsterdam, vol. 1, p. 308, 1928.
3) 参看 McAdam, *Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div.*, 1928.
4) 参看 T. S. Fuller, *Trans. Am. Soc. Steel Treat.*, vol. 19, p. 97, 1931
5) H. J. Gough and D. G. Sopwith, *J. Inst. Metals*, vol. 49, p. 93, 1932.
6) H. J. Gough and D. G. Sopwith, *J. Inst. Metals*, vol. 60, p. 143, 1937
7) D. G. Sopwith and H. J. Gough, *J. Iron and Steel Inst.*, 1937.
8) O. Föppl, O. Behrens and T. Dusold, *Z. Metallkunde*, vol. 25, 1933.

破坏也均有成效。

残余应力的影响. 殘余应力通常产生在机器零件的热处理时和結构的焊接时，而問題在于这种应力对耐久极限的影响如何。在轉梁式疲劳試驗机上作試驗的淬火鋼試样的实驗[1]指出：施加反复应力循环可使殘余应力減小至其初值的 1/4 以下。殘余应力对耐久极限的影响可忽略不計。在焊接的工字梁的疲劳試驗中也得出了同样的結論[2]。韦柏尔(E. E. Weibel)指出了盘簧中产生的殘余应力的不良影响[3]。

表面光制影响. 表面光制方法对耐久极限的影响也曾加以研究。对极限強度为 95000 磅/吋²，正常耐久极限为 48000 磅/吋²，含碳量为 0.49% 的碳鋼进行了試驗。如取精拋光試样的耐久极限为 100，則对各种光制方法可得下列結果[4]：磨光为 89，精車为 84，粗車为 81。对含碳量为 0.02% 的碳鋼(阿姆可鉄)作試驗时，对后面两种光制方法分别得出 92 和 88。湯麦斯(W. N. Thomas)对含碳量为 0.33% 的碳鋼作了同样的实验[5]，他用显微鏡測得各种光制方法的紋痕大小。贊德(W. Zander)作了另外一些实驗[6]。

在本章末了的表 26 中列出了工程中所用的某些鋼的静力試驗和耐久試驗結果。

§87. 疲劳和应力集中. 在討論杆和軸截面的急剧改变而引起的应力集中时(参看第八章)，曾指出这种应力集中在变应力的

---

1) 参看 H. Bühler and H. Buchholtz, *Stahl u. Eisen*, vol. 53, p. 1330, 1933; 及 *Mitt. Forsch.-Inst., Verein. Stahlwerke* (Dortmund), vol. 3, p. 235, 1933.

2) E. H. Schulz and H. Buchholtz, *Stahl u. Eisen*, vol. 53, p. 545, 1933.

3) *Trans. A. S. M. E.*, vol. 57, p. 501, 1935. 并参看 F. Wever and G. Martin, *Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch.* (Düsseldorf), vol. 21, p. 218, 1939; 及 C. W. MacGregor 在 W. R. Osgood 編的 "Residual Stresses in Metals and Metal Construction" (New York, 1954) 一书中所著的章节.

4) 参看 H. F. Moore and J. B. Kommers, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 124, p. 683, 1921.

5) Engineering, vol. 116, p. 483, 1923. 研究表面粗糙度的最近发展在 S. Way 的論文中有討論, *loc. cit.*, p. 505.

6) 学位論文, Technische Hochschule, Braunschweig, 1928.

情况下特别有害。在机器中，由于圆角、凹槽、小孔、鍵槽等原因，經常有应力集中存在，实驗指出，疲劳裂縫大多发生在应力集中之处。現在来簡要地討論这种破坏的几个例子。

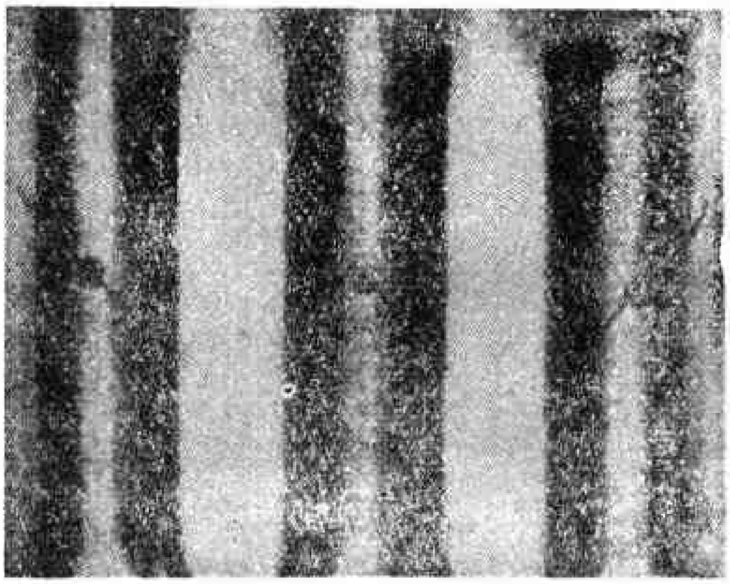


图 321

图 321[1]表示承受反复扭轉作用的带横孔圓軸的疲劳破坏。对于此情形，最大应力发生在与軸綫成 45° 角的斜面內的孔边处（参看第 262 頁）。裂縫发生在这些地方，并依一个主应力的方向沿一螺旋路綫逐漸扩展。

图 322 表示一在运轉时不幸接近共振的大型电动机-发电机組軸的扭轉疲劳破坏[2]。裂縫出現在产生高度应力集中的鍵槽处，并沿螺旋路綫逐漸扩展。在照片上也可看出相应于第二个主应力方向的螺旋形裂縫。图 323 表示一由柴油机驅动的发电机軸的扭轉破坏。小圓角上的高度应力集中引起了几条螺旋裂縫，当这些裂縫相互連接起来时便产生了鋸齿形的外貌。图 324 表示在齿輪

1) 参看 A. Thum 的論文，*Forschung*, vol. 9, p. 57, 1938.

2) 图 322—325 均取自 R. E. Peterson 于 1937 年 7 月在美国麻省理工学院举行的“工业中的材料强度問題”会議上发表的論文。裂縫成長的机理也由 Peterson 加以討論，*J. Appl. Mech.*, vol. 1, p. 157, 1933. 原动机疲劳破坏的許多例子在 L. W. Schuster 的論文中有說明，*Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London), April, 1933.

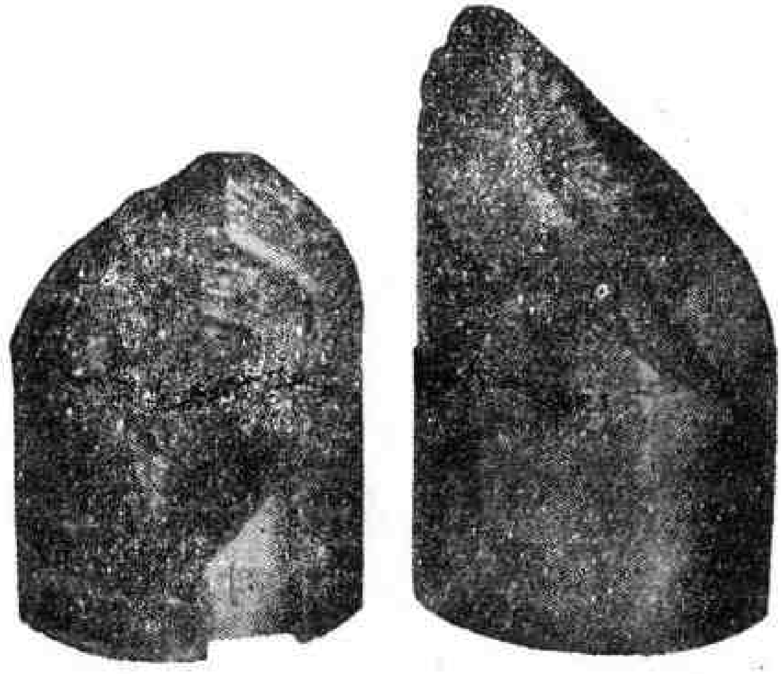


图 322

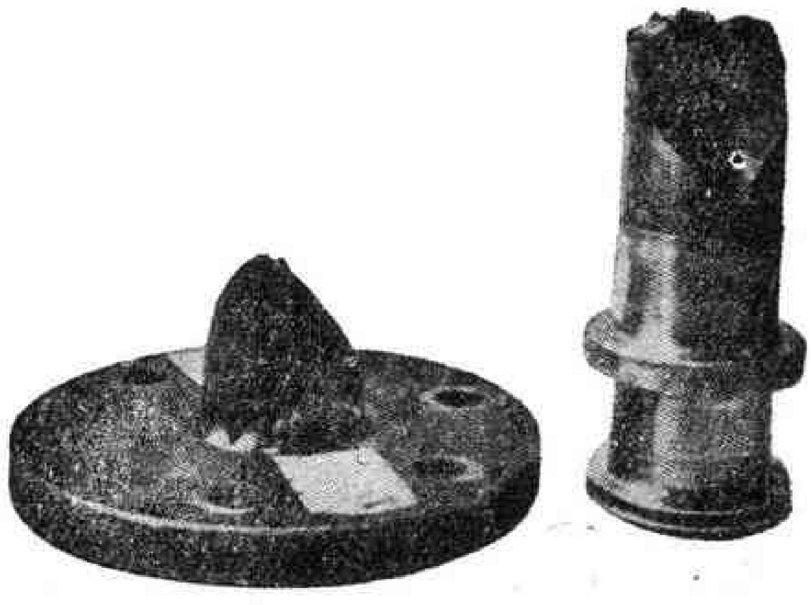


图 323

齿根处逐渐扩展的疲劳裂縫. 高度应力集中之处是由于作为悬臂的輪齿的弯曲而引起的.

最后,图 325 表示一重型螺旋弹簧的特殊疲劳破坏. 如理論所推测的(参看原书上卷第 291 頁),裂縫从里面开始,再依一个主

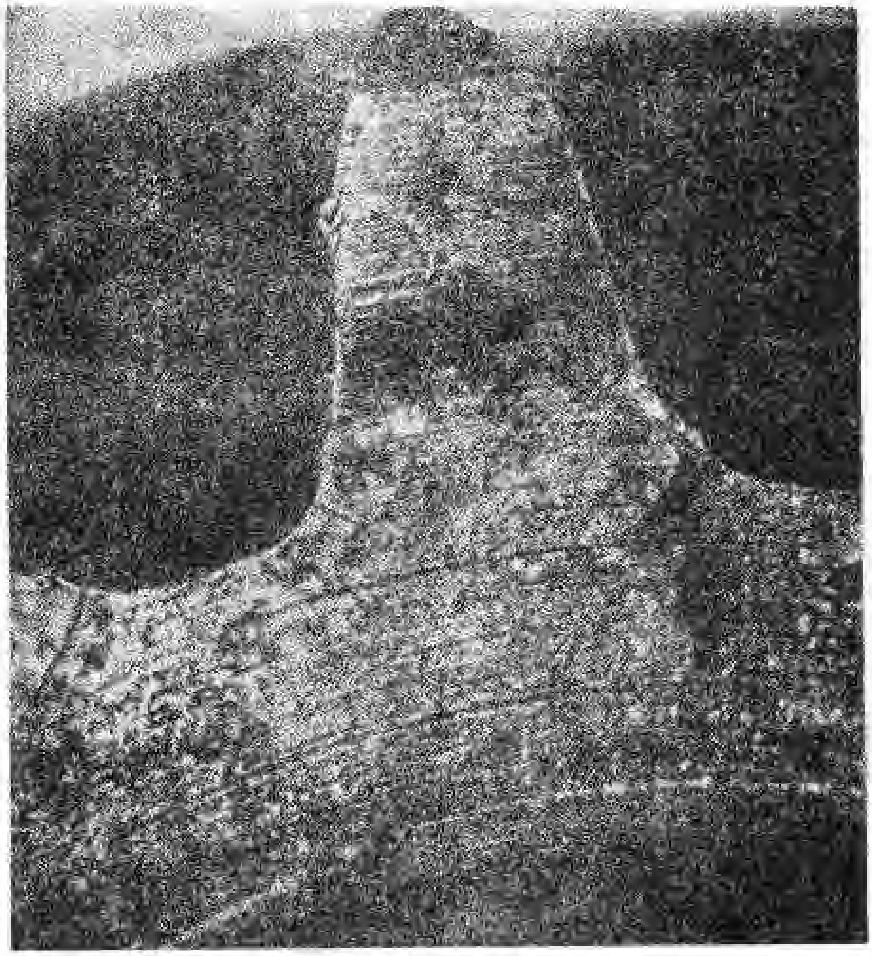


图 324

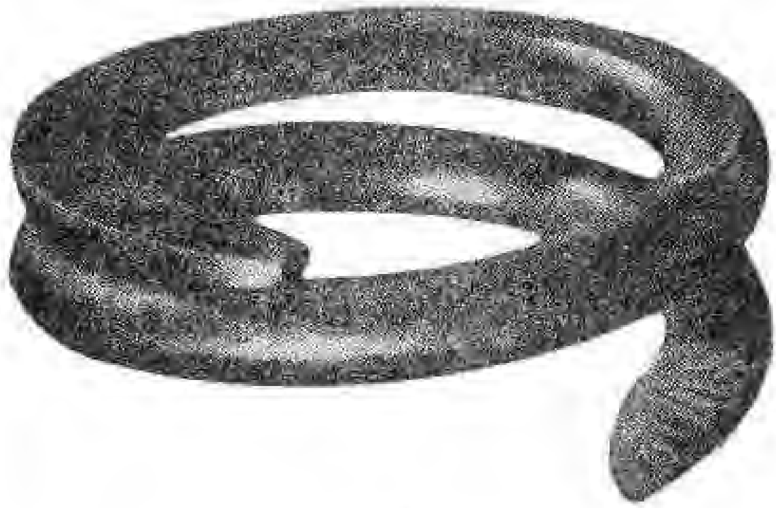


图 325

应力方向扩展．所有这些照片均清楚地說明了应力集中所产生的有害作用，显然在設計机器零件时，必須愼重地考虑这一因素[1]．

对截面急剧改变的試样早期所作的疲劳試驗指出，应力集中使強度降低，但此降低量通常較由計算的应力集中系数所預期的为小．例如，对于承受直接应力的带小圓孔的扁平鋼試样，理論的应力集中系数为 3（参看第 259 頁）．如果在耐久試驗中尖峯应力的大小为控制因素，就可以推測，使带孔試样发生疲劳破坏所需的拉伸-压縮載荷約为用于无孔試样的載荷的 1/3．然而，实驗指出，在此情形下由应力集中引起的強度降低量較計算結果为小[2]．

为了說明此差异并給予設計师以所需的資料，彼德遜（R. E. Peterson）在西屋研究实驗室（Westinghouse Research Laboratory）作了非常广泛的一系列試驗[3]．将直径在 0.1 吋至 3 吋之間变动的，带圓角或横向圓孔的，材料不同但几何形状相似的悬臂試样（如表 23所列者）放在特种疲劳試驗机[4]上作了試驗．图 326 示出了这些

表 23　彼德遜在疲劳試驗中所用的材料

鋼	化学成份，%								屈服点 磅/吋²	极限強度 磅/吋²	伸长率 %
	C	Mn	Si	S	P	Ni	Cr	Mo			
中碳鋼*	0.45	0.79	0.18	0.03	0.013	—	—	—	32500	76000	32
鎳鉬鋼†	0.52	0.68	0.19	—	0.014	2.96	—	0.38	45500	97000	26
鎳鉻鋼††	0.54	0.65	—	—	—	1.38	0.64	—	91000	120000	24

* 正火：1560°F，在空气中冷却．

† 正火和抽拉：1750°F，在空气中冷却；1460°F，在空气中冷却；1160°F，在炉中冷却．

†† 淬火和抽拉：1475°F，在油中冷却；1200°F，在炉中冷却．

1）裂縫一出現就能发觉的这些方法，在实用上很重要．探查裂縫的各种方法在 M. Hetényi 編的"Handbook of Experimental Stress Analysis"（1950）一书中 Charles Lipson 所著的章节中有說明．

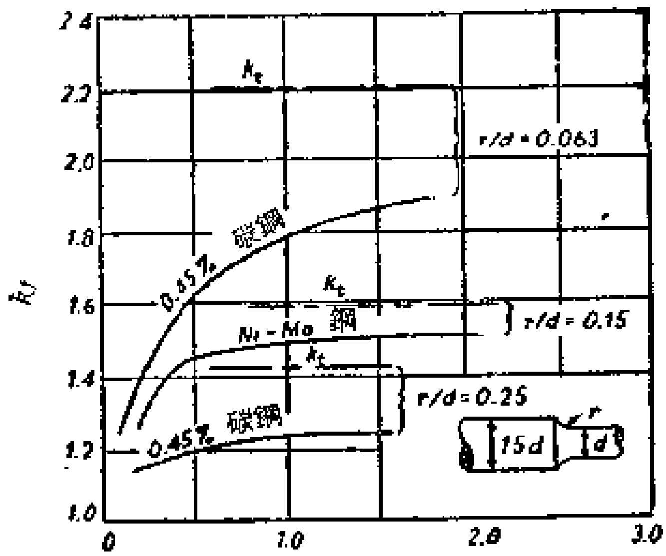
2）B. P. Haigh and J. S. Wilson, *Engineering*, vol. 115, p. 446, 1923.

3）R. E. Peterson, *J. Appl. Mech.*, vol. 1, pp. 79 和 157,1933；及 R. E. Peterson and A. M. Wahl, *ibid.*, vol. 3, p. 15, 1936 并参看金屬疲劳研究委員会的日程报告，*Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 42, p. 145, 1942 和 vol. 43, 1943.

4）关于这种試驗机的說明載于 R. E. Peterson 的論文中，*Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 29, p. 371, 1929.

帶圓角試样的試驗結果. 取試样的較小直径作为横坐标，而縱坐标代表平坦試样的耐久試驗載荷与具有应力集中的相应試样的耐久試驗載荷之比 k_f. 对于带横孔的試样，可得同样的結果.

图 326 中的水平綫給出了对于每个圓角尺寸，在最大应力集中处直接測量应变而求得的应力集中系数之值（参看第 282 頁）. 这些数值用 k_t 表示，在下面的討論中称之为应力集中的**理論值**. 如果試样的疲劳強度只决定于尖峯应力，显然 k_t 必定等于 k_f.



直径 d(吋)

图 325

彼德逊根据他的試驗作出了下列結論：

(1) 疲劳結果有时十分接近于应力集中的理論值. 此結論在实用上很为重要，因为根据最早的一些实驗，似乎有这样的概念：对于应力集中情形的疲劳数据經常远低于理論值，即用于設計时偏于安全.

(2) 合金鋼和淬火碳鋼的疲劳結果通常較不淬火碳鋼的相应疲劳結果接近于理論值. 在这些試驗中推測得，如果将試样做得足够大，則对任何鋼都可达到理論值 k_t，但由图 326 看出，含碳量为 0.45% 的正火碳鋼曲綫的漸近綫显然大大低于理論值.

(3) 随着試样尺寸的減小，由圓角或孔引起的疲劳強度降低量也变得小一些；而对于非常小的圓角或孔，疲劳強度的降低量更小. 这可从图 326 的曲綫中清楚地看出.

引用疲劳試驗結果来表示达到理論值 k_t 的程度的另一个方法可引入下值而获得：

$$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1}, \tag{a}$$

此值称为**敏感系数**. 当 k_f 趋近于 k_t 值时，q 值趋近于 1，当应力集中对疲劳强度只有微小的影响时，k_f 接近于 1 而 q 趋近于 0. 图 327 示出了两种鋼在促使应力提高的几种方式下的 q 值[1]，图中取圆角半径或圆孔半径作为横坐标. 可以看出，敏感指数并不是一个常数. 它不但决定于材料的种类，而且与試样的尺寸有关. 对于合金鋼及較大的試样，q 趋近于 1；但对于較粗的材料（含碳量

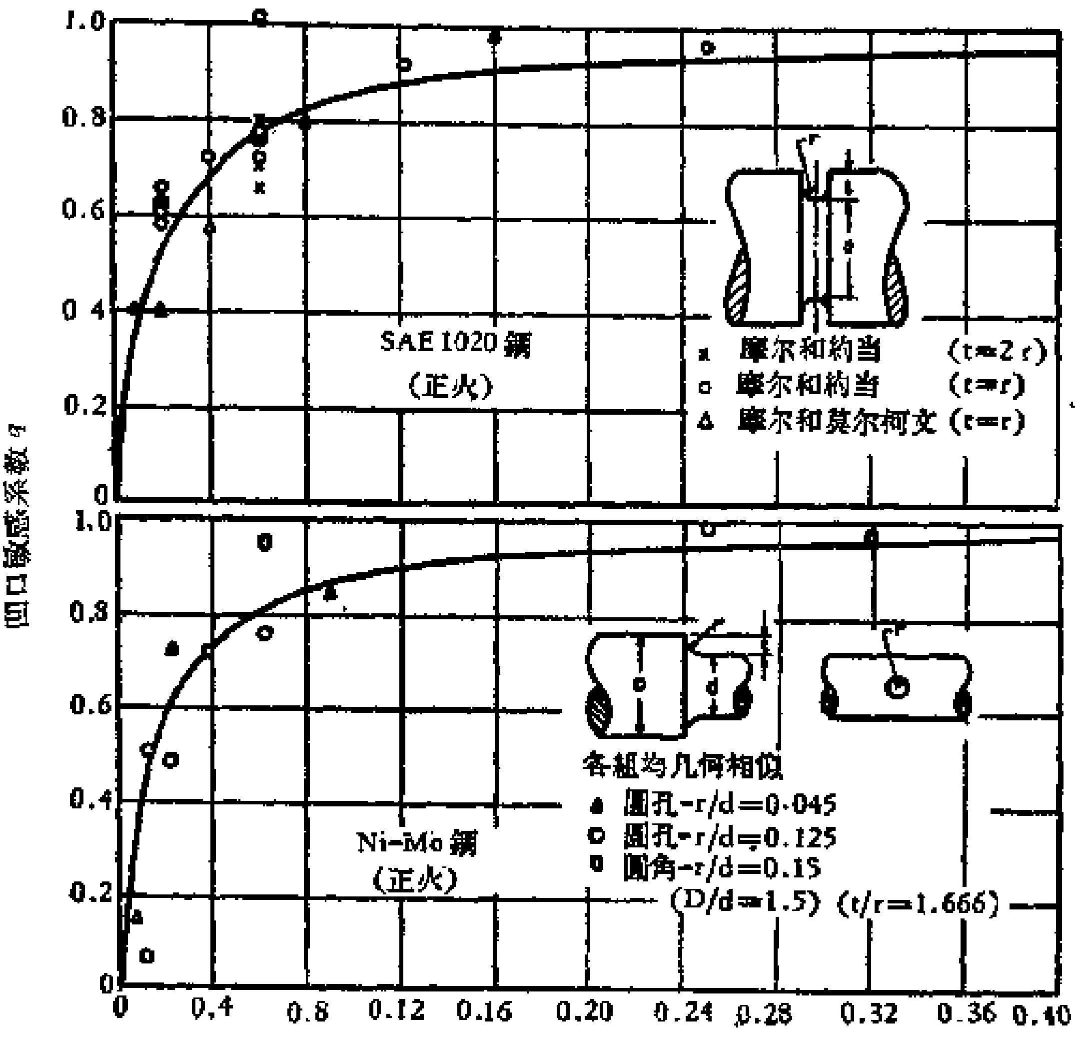


图 327

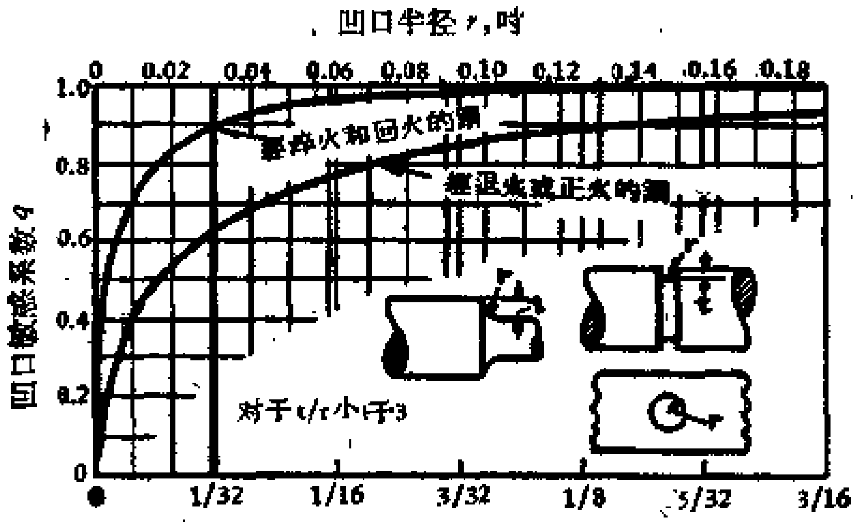
1) 参看 R. E. Peterson 的书，*loc. cit.*, p. 479.

为 0.45% 的碳鋼)，則 q 趋近于一稍低的数值[1]。

根据上面的討論，可以推荐应力集中的理論值 k_t 用于設計大尺寸的机器零件，以及用于細晶粒的鋼，如合金鋼和經热处理的碳鋼等。对于小尺寸的零件以及粗糙材料，可用降低的应力集中系数。由式(a)得，此值为

$$k_f = q(k_t - 1) + 1. \tag{b}$$

图 328 示出了通过实驗对圓角、圓孔和凹槽求得的 q 值，它們可用作对于其他的应力集中情形选择适当 k_f 值的指南[2]。



凹口半径 r，吋

图 328

疲劳断裂类似于实际上无塑性变形的脆性材料的静力断裂。裂縫发生在某局部缺陷处，然后沿垂直于拉应力的方向扩展。所以研究脆性材料断裂时所发展的概率論(参看第 341 頁)也可用于疲劳試驗的这一推測是合理的[3]。照此概念，我們必定推測材料的

1) 鑄鉄的試驗指出，应力集中对疲劳試驗結果的影响很小；参看 A. Thum and H. Ude, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 74, p. 257, 1930.

2) 参看 R. E. Peterson 的书，*loc. cit.*, p. 479；及 C. E. Phillips and R. B. Heywood, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London) *Appl. Mech.*, vol. 165, p. 113, 1951. F. W. Bunyon and H. H. Attla 对 $9\frac{3}{4}$ 吋直径的軸作了扭轉疲劳試驗，*Trans. Engrs. Shipbuilders Scot.*, 1953, 試驗指出，敏感系数較 R. E. Peterson 在彎曲試驗中所得的值为小($q = \frac{2}{3}$)。

3) 参看 W. Weibull 的論文，*Trans. Roy. Inst. Technol.* (Stockholm), No. 27, 1949.

耐久极限将随試样尺寸的增大而降低. 作弯曲疲劳試驗时，有几个实驗表明疲劳強度随試样直径的增大而降低[1]. 用具有各种应力集中的試样进行試驗时，曾发現**尺寸效应**很大，但是应用概率論来研究这一現象似乎至今尙未有此打算[2]. 問題变得非常复杂，因为在这种情形下受高应力材料的体积通常极小，必須考慮結晶材料晶粒的大小. 当我們說到几何相似的同材料試样时，显然它們的金相組織并不几何相似，这一事实可能影响疲劳試驗. 研究尖峯应力的区域后可以推測，在該区域內只包含少数晶粒时与在同一区域內包含无数晶粒时，其結果是不同的. 由疲劳試驗求得的敏感系数 q 与材料的晶粒大小之間的相互关系在彼德遜的論文中曾討論过[3].

§ 88. 疲劳中应力集中影响的减小. 可以認为关于减小应力集中的有害影响的問題对設計师是头等重要的. 适当地改变設計可使应力集中有所降低. 例如，避免用尖銳凹角而运用半径大的圓角，設計适当形状的圓角，运用減載槽等均可使設計大大地改善. 图 329 示出了保持定位綫 AA 而降低軸肩处应力集中的一些方法. 凹切軸肩，并运用半径大的圓角以使其与配合构件不发生

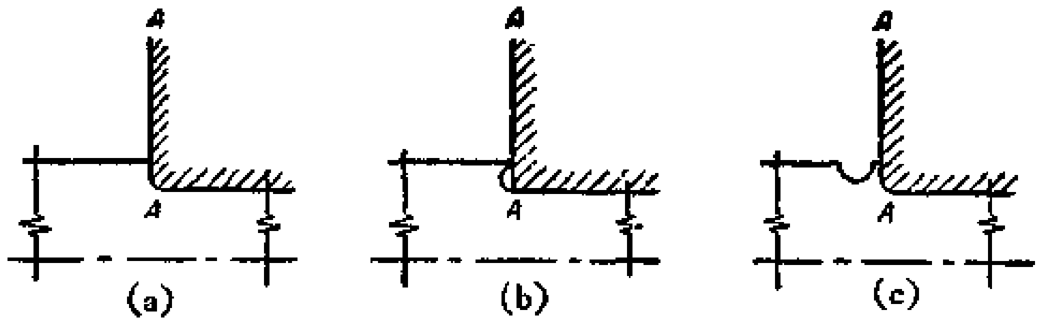


图 329

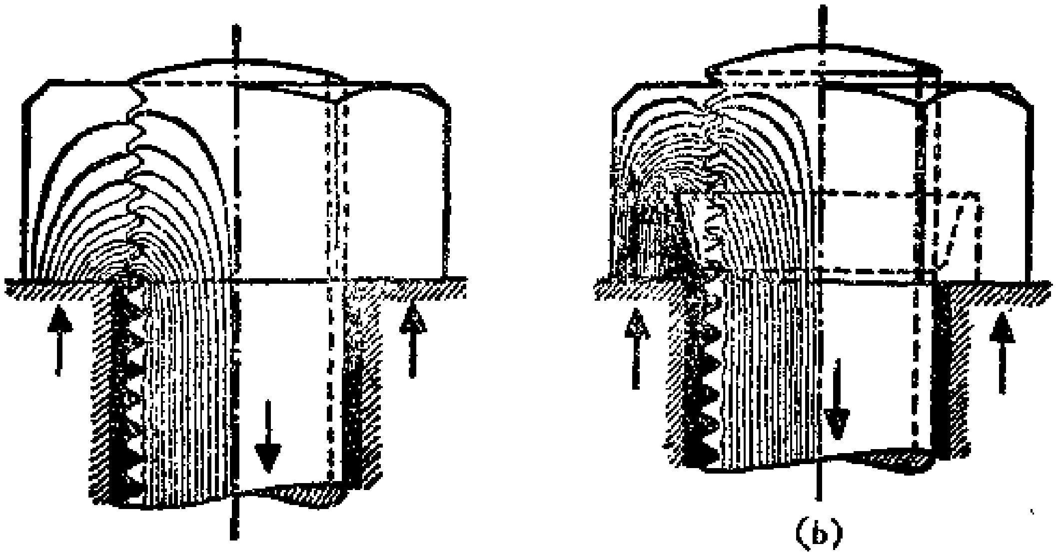
1) R. E. Peterson, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 29_2, p. 371, 1929; R. Faulhaber, Mitt. Forsch.-Inst. Verein Stahlwerke (Dortmund), vol. 3, p. 153 1933; 及 O. J. Horger and H. R. Neifert, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 39, p. 723, 1939.

2) 此問題曾由 R. E. Peterson 作了討論, *Proc. Am. Soc. Metals*, 1948.

3) 參看 Contributions to the Mechanics of Solids, New York p. 179, 1938. 它是 Stephen Timoshenko 的朋友們写了献給他的.

干涉(如图 329b 所示),可使应力降低. 如果肩高太小,则可采用减載槽(如图 329c 所示).

图 330 示出了螺栓和螺母的两种不同設計. 在图 330a 中,螺



(a)

(b)

图 330

母受压縮,而螺栓受拉伸. 高度的应力集中发生在螺母面上螺紋牙的底部,在变化外力的作用下,疲劳断裂发生在該平面内[1]. 設計成凹切螺母时(图 330b),可使尖峯应力稍有降低,因为凹切螺母的受力方向与螺栓的相同. 疲劳試驗指出,設計成凹切螺母时,其強度可提高 30% 左右[2].

有时这些減載方法均不足以避免疲劳破坏. 我們来研究发生在机車和鉄路車輛車軸的輪座、汽車軸的輪座或軸承座、油井操作中长鉆杆的压配鉆或配合鉆等处的典型破坏作为重要的例子. 所有这些承受变应力作用的配合构件的情形均有固定的疲劳破坏根源. 例如,研究輪轂压在軸上的情形(图 331a),我們可以看出,在

1) J. N. Goodier, *J. Appl. Mech.*, vol. 62, p. 11, 1940. 并参看 M. Hetényi, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. I_1, p. 147, 1943.

2) H. Wiegand 的学位論文, Tech. Hochschule, Darmstadt, 1933. 并参看 S. M. Arnold, *Mech. Engrg.*, vol. 65, p. 497, 1943.

凹角 m 和 n 处产生了与摩擦相結合的高度应力集中[1]. 当軸轉动时，在点 m 和 n 处发生反复应力，最后可能在截面 mn 处发生疲劳破坏，如图 332 所示. 将軸座加粗并运用圓角(如图 331b 所示)，

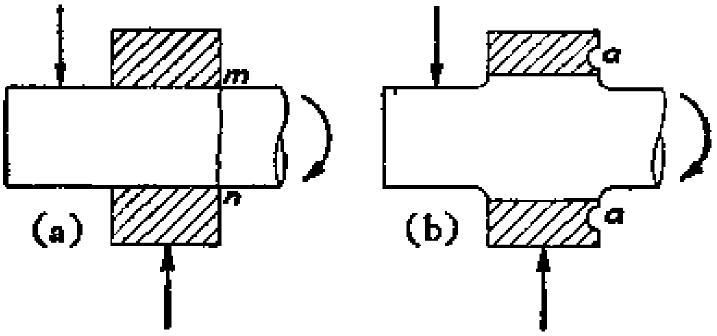


图 331

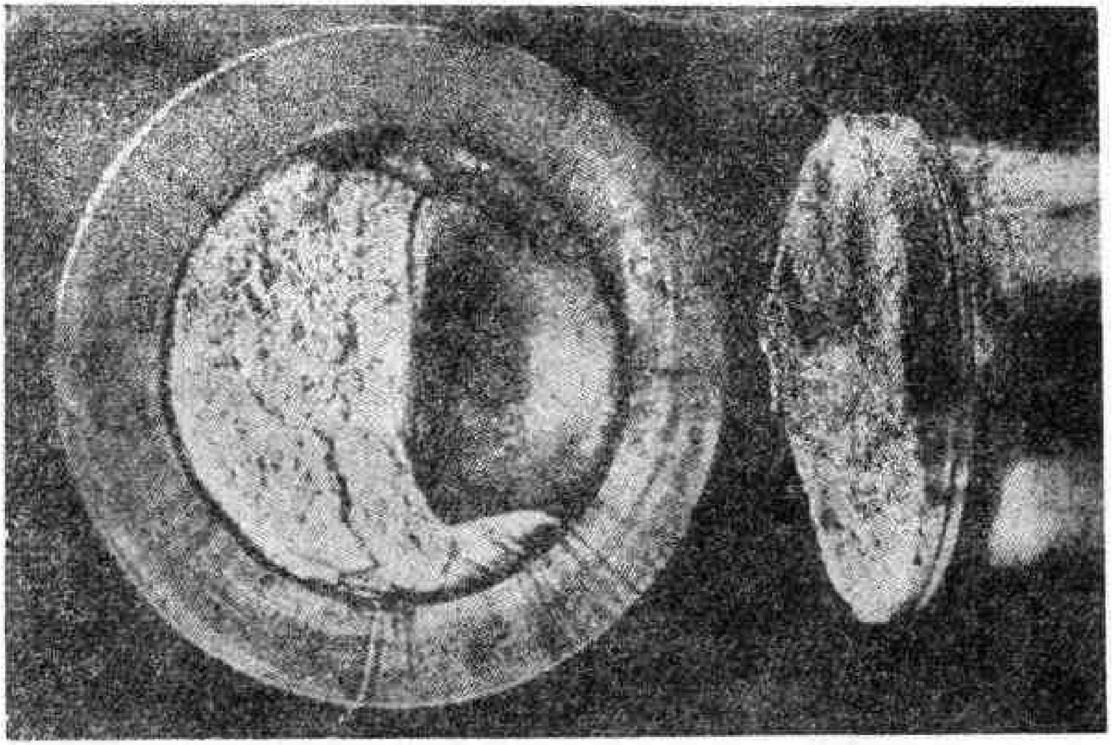


图 332

可使应力集中降低一些. 利用減載槽 a (图 331b)，可获得进一步的改善. 虽然这种改变起改善作用，但在此情形下均嫌不足. 經

1) 关于腐蝕和疲劳，可参看 G. A. Tomlinson, P. L. Thorpe and H. J. Gough, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London), vol. 141, p. 223, 1939. 并参看 O. J. Horger, *Symposium on Fretting Corrosion*, American Society for Testing Materials, 1953.

驗指出，单是将輪轂压配在軸上（图 331a），就会使軸的疲劳強度降低至其原強度的一半以下，而图 331b 所示的改变所提高的軸的疲劳強度恐怕不超过 20%。

为了改善此情况和避免疲劳破坏，在应力集中区域将軸表面加以冷輾已奏成效．用表面冷作的最早实验[1]是对小試样进行的，为了获得实际应用的足够資料，在实驗室用大試样作了一系列广泛的試驗． 图 333 示出了霍格（O. J. Horger）在密歇根大学实驗室所作的三种方式的疲劳試驗[2]． 在这些試驗中所用的材料的性質列于表 24． 由普通的悬臂梁疲劳試驗求得的美国工程标准(S.

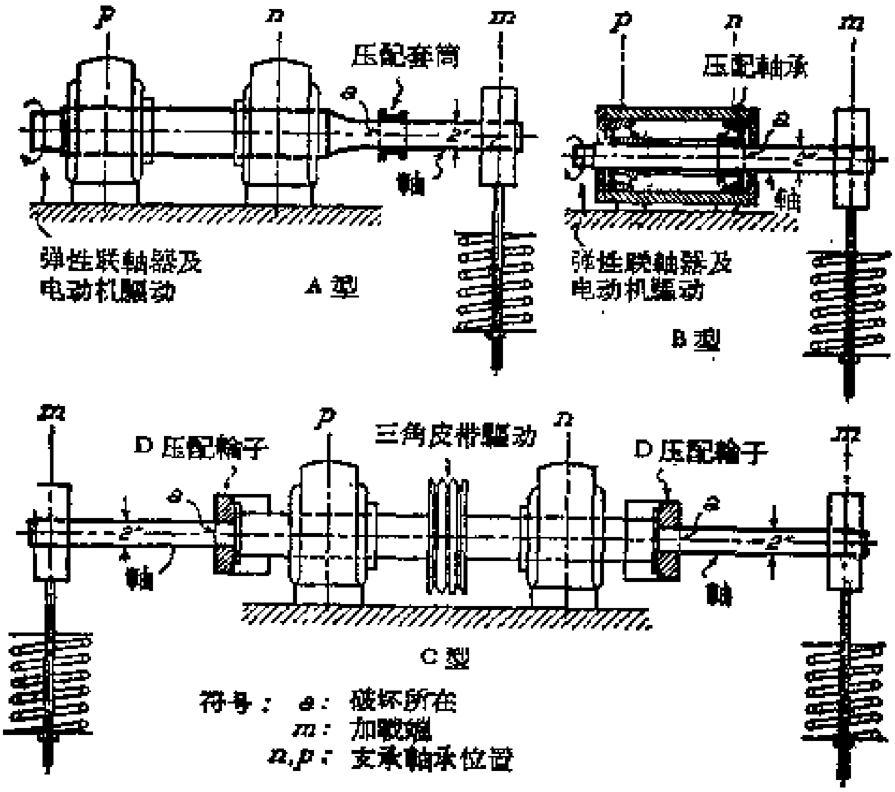


图 333

1) 用表面冷作来提高疲劳強度是由 O. Föppl 所提出的，*Stahl u. Eisen*, vol. 49, p. 575, 1929. 此法在佛勒学院（Wöhler-Institut）曾用于各种疲劳試驗中．参看 *Mitt. Wöhler-Inst.*, vols. 1—37, 1929—40. 并参看 A. Thum and F. Wunderlich, *Mitt. Materialprüfungsanstalt*, Tech. Hochschule(Darmstadt), vol. 5, 1934; 及 R. Kühnel, *Stahl u. Eisen*, vol. 110, p. 39, 1932.

2) 这些实驗的說明載于 O. J. Horger 的論文中，*J. Appl. Mech.*, vol. 2, p A-128, 1935; 及 O. J. Horger and J. L. Maulbetsch, *ibid.*, vol. 3, p. A-91 1936. 在西屋研究实驗室所作的工作在下列論文中有說明， R. E. Peterson and A. M. Wahl, *ibid.*, vol. 2, 1935, p. A-1.

A. E.）鋼和鎳鋼的耐久极限各为 34000 磅/吋²和 48000 磅/吋². 压上軸套后，如图 333 中的 A 型試驗，美国工程标准鋼的耐久极限就降低到 15000 磅/吋². 在 B 型和 C 型的試驗中，耐久极限各为 12000 磅/吋²和 14000 磅/吋². 这說明了由于压配之故，試样的疲劳強度降低到其原値的一半以下. 对于鎳鋼試样也得同样的結果. 为了提高疲劳強度，在压上軸套或輪轂前，用图 334 所示的裝置將試样的其余表面加以冷輾. 对于此滚輾工序，可应用一車床，

表 24　图 333 中的試驗所用的材料

鋼	化学成份，%							屈服点 磅/吋²	极限強度 磅/吋²	伸長率 %
	C	Mn	P	S	Si	Cr	Ni			
S. A. E[1]. 1045	0.47	0.72	0.015	0.034	0.23	0.03	0.05	47800	88800	32
2.75% 鎳[2]	0.24	0.86	0.034	0.021	0.24	—	2.79	86300	111000	23

1 在 1620°F 淬火并在 1115°F 抽拉.
2 在 1475°F 淬火并在 1150°F 回火.

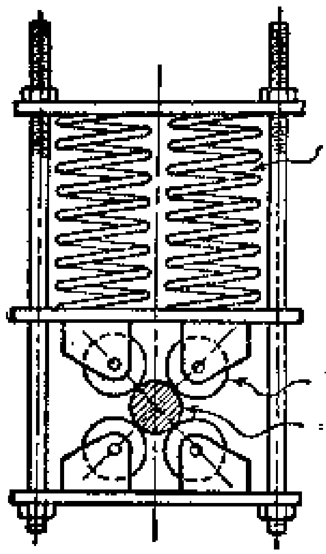


图　334

以便將試样頂住在車床中心并將滚輾裝置支持在固定于車床床身的横向导槽中. 为了在滚輾后获得足够光滑的表面，采用大于每吋 40 牙的进給.

图 335 示出了用冷輾試样所作的 C 型(图 333)疲劳試驗結果. 从这些試驗看出，美国工程标准鋼試样的疲劳強度由于冷輾而提高到其原強度的两倍以上. 用鎳鋼試样也获得了同样的結果.

由于建造了能够試驗实样机車車軸的大型疲劳試驗机，因而对于冷輾对疲劳強度的影响作了进一步的研究. 图 336 表示这种試驗机之一[1]. 其裝置与图 333 中的 C 型試驗类似，而与佛勒在他

1）有三台这种型式的試驗机正在俄亥俄州坎顿的提姆肯滚子軸承公司研究实驗室中使用. 图 332 取自这些試驗之一.

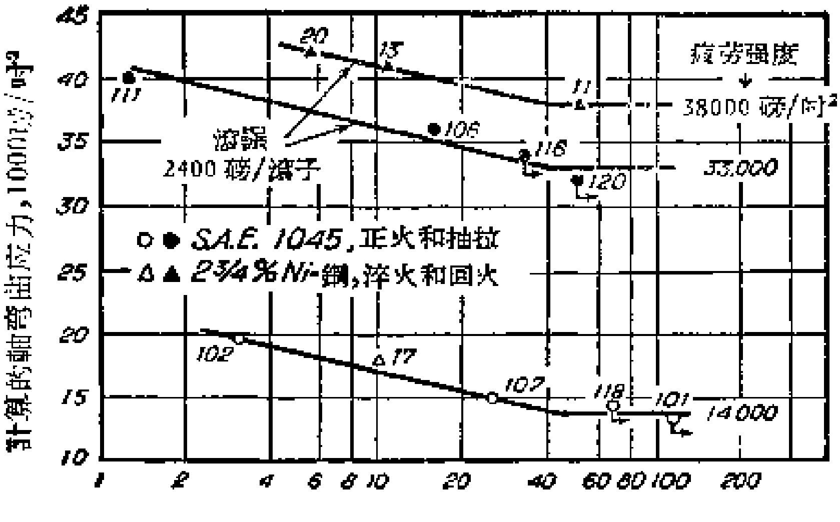


图 335

对軸进行的著名疲劳試驗中所用的相同．用大尺寸試样的实驗結果是很有把握的，以致有一些鉄路公司提出了軸及其他机車零件（如活塞杆、联接杆、曲柄銷和輪箍等）需要加以表面滚輾[1]．

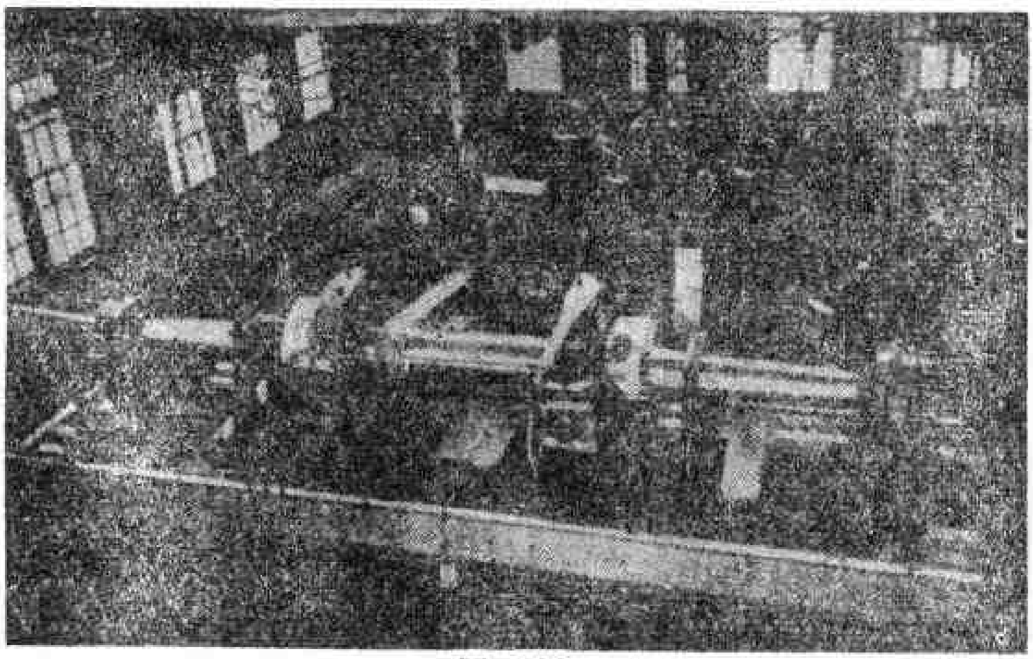


图 336

为了产生一层足够厚的冷作材料，对大直径的軸作表面滚輾时需要相当大的滚子压力． 对于小直径的軸和輕型的机器零件，

1）参看 O. J. Horger 于1946年2月在美国金屬学会年会上发表的論文．

郎使只有一层薄的冷作金属，也显示出对疲劳強度有很大的提高。**噴弹**是产生这种表面冷作的一种簡单方法。此法已广泛应用于汽車工业中[1]。

§ 89. **表面疲劳破坏**. 滚子和齿輪在旋轉时受接触压力的重复作用而发生的**表面破坏**，可代表在高度集中应力作用下的疲劳破坏的另一情形。研究由于力 P 而相互压紧的两个旋轉滚子（图 337）。我們可用 §63 的公式来計算接触表面上的最大压应力。对于理想的光滑表面，此計算应力为真实应力，而給定材料的滚子的表面疲劳強度将只决定于此应力的大小。在实际情形下，滚子表面具有各种不平度，其大小与表面光制方法有关。图 338 示出了放大的表面光度的几个例子[2]。

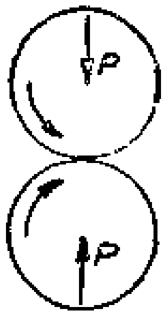


图 337

当然，表面粗糙将影响滚子接触面上（图 337）的压力分布。由于最不利的不平坦尖峯处的局部过应力，疲劳裂縫将較光滑滚子发生得早。这説明了，滚子的疲劳強度与其表面的粗糙度有关。

实驗指出，如果对潤滑的滚子作表面疲劳試驗，則表面疲劳裂縫漸成斑痕。有时会在使用中的滚子和齿輪上不断扩展的**起斑裂縫**是非常不利的，曾尽了很大的努力来研究起斑的原因[3]。这些研究指出了，产生起斑裂縫的原由可归因于流体动力本質。起斑裂縫采取傾斜地进入金属的方向，并粗略地具有圓錐面的形式。它們与表面交成拋物綫形或V字形的曲綫，V字的頂点为旋轉时首先进入接触的部分。图 339 示出了一滚子表面的放大視图，图中起斑裂縫的发生点用箭头表示。可以看出，当裂縫經过負荷区域

1) 参看 O. J. Horger and H. R. Neifert, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, vol. 2_1, p. 178, 1944.

2) 此图和后面两图均取自 S. Way 在 1940 年 5 月美国齿輪制造商协会会議上发表的論文。S. Way 在 1940 年 6 月麻省理工学院的 "Proc. Special Summer Conferences on Friction and Surface Finish" 中发表的論文中，曾説明了研究表面光制的各种方法。該論文中載有关于此課題的参考书目。

3) 这种研究是由 S. Way 在西屋研究实驗室所作的。参看他的論文，*J. Appl Mech.*, vol. 2, 1935.

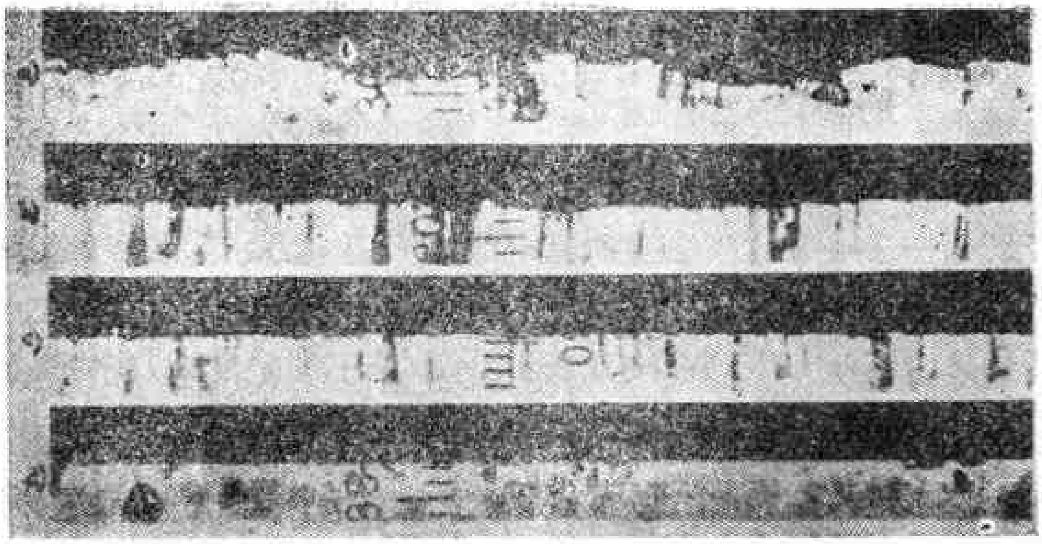


图 338

时、在此裂縫中的油便不能排出。裂縫中高的油压将在裂縫的末端产生高的拉应力，这可能使裂縫更加深入金屬內。此理論説明了为什么油必使起斑裂縫扩展，和为什么改变旋轉方向或降低裂縫中的油压可遏制裂縫的扩展。

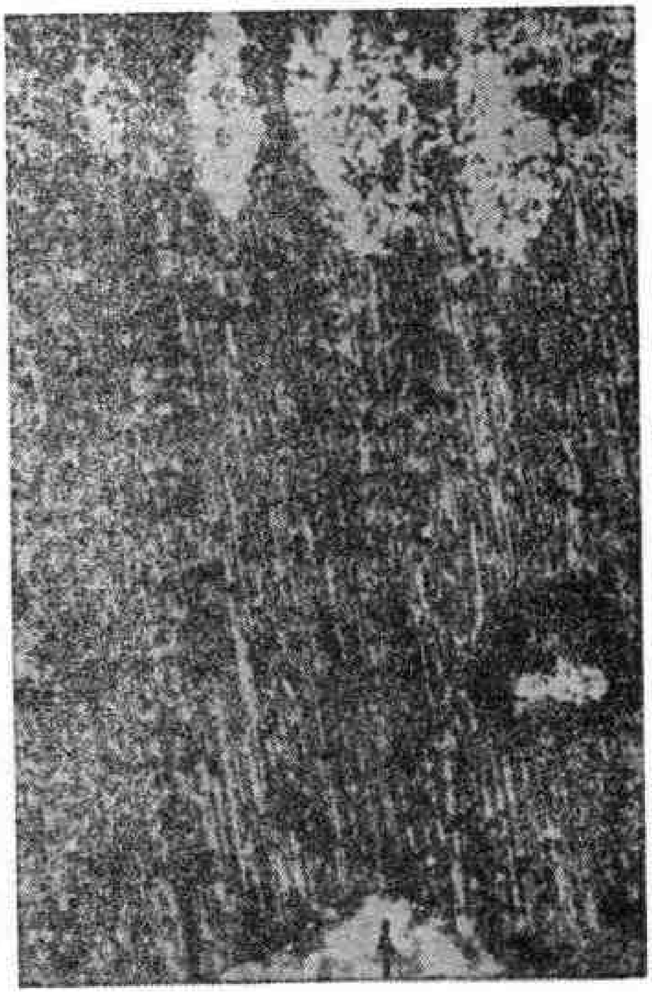
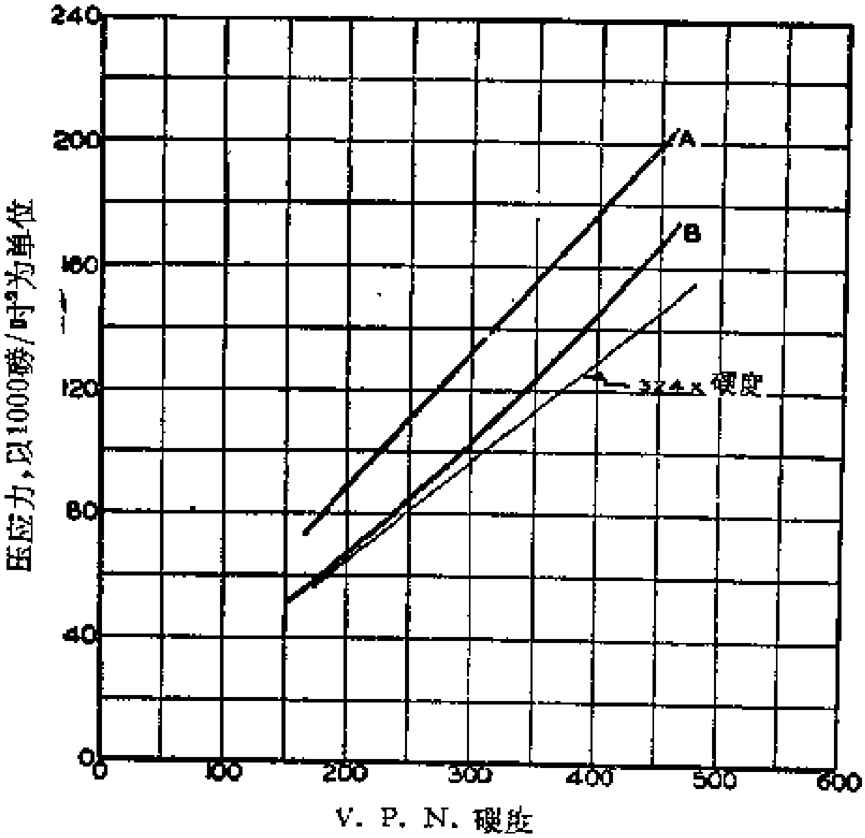


图 339

为了获得不同材料对起斑抗力的比較数值，曾用成对的滚子作了疲劳試験[1]（图 337）。在这些試験中，一个滚子的直径为 1.576 吋，另一个滚子的直径为 1.500 吋，而試験表面的寬度为 0.500 吋。所有滚子的表面均經过細磨，

1）参看 S. Way 的論文，*ibid*.

表面不平度的最大深度在 0.0001 吋至 0.00018 吋之間. 轉速在 300 轉/分至 500 轉/分之間，在机器油的油池中潤滑，这种油在工作温度下的粘度为 700—900 秒·賽包尔脫(Saybolt). 由式(279)所表示的，并对于恰好足以使每平方吋的試驗表面在10^7次循环內至少产生一个斑痕的压縮載荷算得的最大压应力，定义为材料的**起斑极限**. 对于經过各种热处理的含碳量为 0.45% 的碳鋼，这些試驗結果由图 340 中的曲綫 B 表示. 取滚子的硬度数[1]作为横坐标，而取相应的起斑极限作为纵坐标. 为了比較起見，作一直綫，



輪齿与滚子起斑抗力近似值的比較

曲綫 A——輪齿上恰好低于节点之处的压应力(計算时假設輪齿光滑，无齿廓誤差，但計及导程誤差和安装誤差)，此应力足以产生六个斑痕左右，或在节綫与一个齿接触終点之間的每平方吋面积上产生一个斑痕，輪齿經过磨光，輪齿轉数为 10^7 次.

曲綫 B——表面經磨光的試驗滚子(1.5 吋和 1.576 吋直徑)上的压应力，此应力足以使单位面积上在 10^7 次循环內产生一个斑痕.

图 340

1) 硬度数可認为与滚子表面层的极限强度成正比.

它相当于数值为硬度数的 324 倍的起斑极限．由于起斑是一种疲劳破坏，我們可推測起斑強度与硬度成比例地提高．实驗指出，起斑強度与硬度成綫性关系的假設是偏于保守的．

图 340 中的曲綫 A 表示由与前面討論过的滚子同材料制成的齿轮用实驗求得的起斑极限之值．輪齿接触面的状态与滚子稍有不同，主要差别为滚动是与滑动相結合的这一事实． 状态的这个差别会引起起斑极限的提高．

§ **90. 疲劳的起因．** 虽然在材料的疲劳強度方面已积累了大量数据，但至今尚未建立任何基础理論以說明此現象的起因和机理．疲劳断裂在以前是归因于使金属发脆的"結晶状态"．这一理論是根据断口的外形发展起来的（参看第 401 頁）． 我們現在知道，单个晶体在耐久試驗期間保持不变，但在这些晶体內可能有一些滑移．

包辛譜是首先研究应力循环的人．他对試样緩慢地加載和卸載，并用灵敏的伸长計来建立这些状态下的应力应变关系[1]． 这样，他指出了，拉伸和压縮时的比例极限对于一給定材料并非固定点，使試样承受应力循环可使它們移动． 为了說明鋼受反复应力时的耐久极限有时低于由靜力試驗获得的比例极限这一事实，包辛譜发展了此理論，即来自制造者的材料在拉伸和压縮时的比例极限可能由于冷作而有所提高；而眞实或**固有比例极限**是使材料承受应力循环后所建立起来的．这些固有比例极限被認为可用来决定疲劳試驗中的**安全幅．**

拜尔斯透（Bairstow）[2]进一步发展了包辛譜的概念．用一在低速下（每分鐘 2 周）加載和卸載的試驗机，及一装在試样上的馬吞斯（Martens）反射鏡伸长計，他对各种幅度的应力循环求得了应力应变关系．图 341 表示拜尔斯透对受反复应力（平均应力等于零）的軸鋼（屈服点为 50000 磅/吋^{2}和极限強度为 84000 磅/吋^2）获得

1) J. Bauschinger, *Mitt. Mech.-tech. Lab.* München, 1886. 并参看 *Dinglers Polytech. J.*, vol. 266, 1886.

2) L. Bairstow, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 210, p. 35, 1911.

的一些結果。直綫 A 表示半幅度为 31400 磅/吋^{2}的初始拉伸压縮試驗。显然在这些极限內，应力应变关系准确地服从直綫律[1]。

然后使試样承受大小为 31400 磅/吋^{2}的反复应力循环；可以看出，初始直綫 A 逐漸发展成为一定形状的迴綫。經 18750 次循环后获得的这一迴綫用曲綫 B 代表。可以看出，在此情形下，初始比例极限較經許多次反复应力循环后示出的所謂固有比例极限为高。由于这些极限均在 31400 磅/吋^{2}以下，因此产生了大小等于寬度 mn 的**循环永久变形**。在經大小各等于 33500，37500 和 47000 磅/吋^{2}的反复应力循环后，分别获得了迴綫 C，D 和 E。显然在每种情形下，循环数均足以使迴綫的大小稳定。当将这些迴綫的寬度对相应的最大应力作图时，拜尔斯透近似地获得了一直綫。此綫与应力軸的交点决定了无迴綫效应时的应力幅。这样决定的应力幅，拜尔斯透认为是**安全应力幅**，其后的耐久試驗已相当精确地証实了此假設。此后，发展了在此基础上迅速决定疲劳幅度的各种方法[2]。

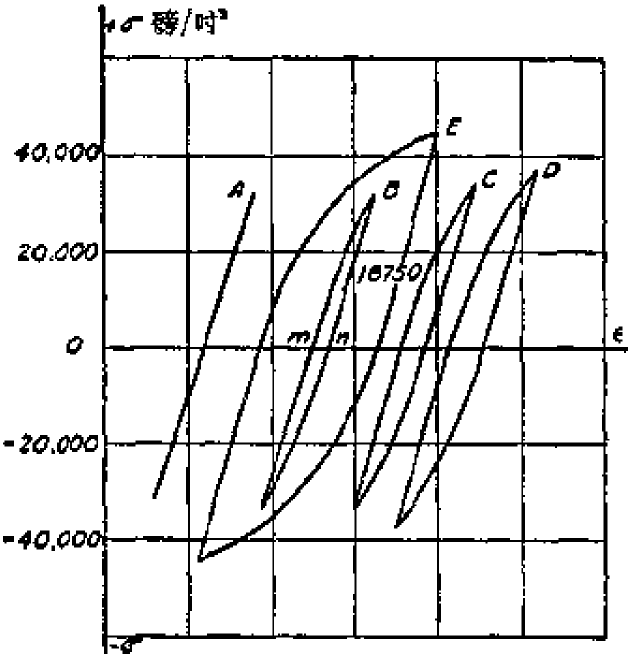


图 341

为了决定安全应力幅，可另外用热量测定法来测量迟滯迴綫。迴綫的面积代表每一循环所損耗的能量。此能量轉化为可以测量的热量。这种实驗首先是由霍浦金森（Hopkinson）和威廉姆斯

1) 在这些試驗中标距长度只有 0.5 吋，用馬否斯伸长計时不能測出小的彈性迟滯。

2) 参看 H. J. Gough 的著作，The Fatigue of Metals, London, Chap. 10, 1924. 并参看学位論文，E. Lehr, *Die. Abkürzungsverfahren*, Stuttgart, 1925.

(Williams)所作的[1]. 他們指出,用热量测定法确定的迴綫面积与用伸长計測定法确定的面积其相差不出6%. 这些試驗还指出了可能具有一定数量永不引起破坏的迟滞,此可看作眞实弹性迟滞. 更迅速地确定耐久极限的方法也在这些热量测定法的基础上发展了起来.

厄文(Ewing)和亨姆弗莱(Humfrey)首先試图說明耐久試驗中断裂的机理[2]. 他們采用一具有抛光表面的瑞典鉄制的旋轉試样,在施加反复应力循环后,用一金相显微鏡观察此表面. 他們发現,如果作用的应力超过了某一极限时,經許多次循环后,就在某些晶体的表面上出現滑移带. 滑移带的数量随着循环的重复而增加,一些先前的滑移带似乎变寬. 此变寬过程一直延續到最后出現裂縫为止,裂縫循着变寬的滑移带的路綫发展.他們发現,11800磅/吋^{2}的反复应力可以施加几百万次而不致产生任何的滑移带. 15400磅/吋^{2}的应力在3百万次循环后只产生了一孤立的滑移带、而此綫被限制在晶体的中部. 由这些試驗得出,瑞典鉄的耐久极限为15400磅/吋^2. 根据这种研究,理論被发展了一步,即超出安全幅的应力循环将在单独晶体內产生滑移带. 如果应力循环継續下去,将継續沿表面滑移. 滑移带引起了摩擦,此摩擦頗似于刚体滑移面間的摩擦. 由于此摩擦的結果,按照此理論,材料沿滑移面逐漸磨損而产生裂縫.

进一步的研究[3]指出,在大大低于材料耐久极限的应力下可能产生滑移带. 它們可能发展和变寬而不形成裂縫. 这說明了滑移带的外表不能取作确定耐久极限的依据, 也不能說明疲劳裂縫的机理.

为了深入地洞悉疲劳試驗中破坏的机理, 哥夫应用了一新的

---

1) B. Hopkinson and G. T. Williams, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 87, 1912.

2) J. A. Ewing and J. C. W. Humfrey, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 200, p. 241, 1903.

3) H. J. Gough and D. Hanson, *Proc. Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 104, 1923.

探测方法,此法系利用精密的X光技术[1]. 从单晶体試样着手,他指出,延性金属晶体受应力循环时变形的机理与在靜力状态下的相同,即滑移按一定的方向沿某些晶面发生,并受在滑移方向的剪应力分量所控制. X光的分析指出,如果循环处于安全幅之外,则"晶面发生畸变,以致它們的平均曲率虽然很小,但会有很大的局部曲率存在. 曾經提出,大的局部应变——也可能是实际的晶格中断——必定发生在这种畸变的平面內,在足够大的外应力幅或应变幅的作用下,它将引起进展性裂縫的形成;而在較小的循环应变下,才可达到稳定状态".

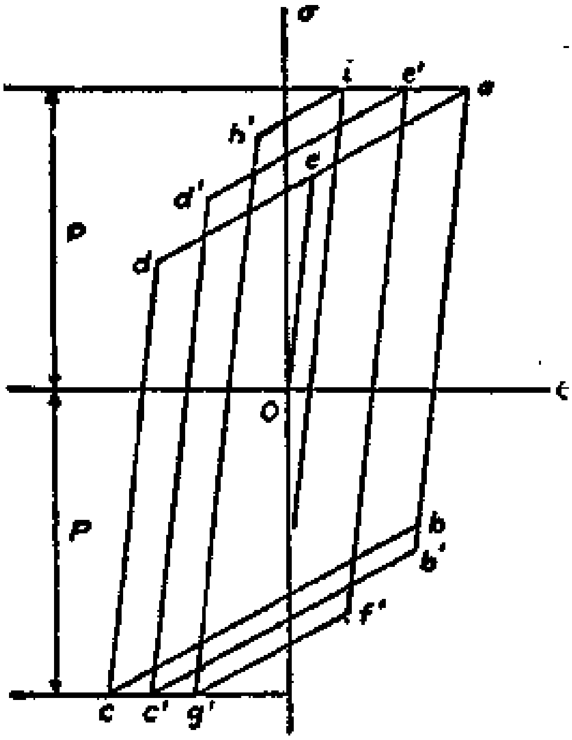


图 342

对軟鋼等結晶材料作实驗时,最初的靜力試驗指出,如果将它們保持在弹性范围內,在完全晶粒內就不发生永久的变化. 在弹性极限与屈服点之間,滑移綫出現在某些定向不利的晶粒表面上. 这些滑移綫显示出了晶体內的滑移面. 如有較材料耐久极限为大的应力循环施加于試样上时,则在滑移面上最弱的晶粒就开始破坏,而有一細小的裂縫沿該面扩展. 裂縫随着循环数而扩大并伸展到相邻晶粒,最后使試样断裂. 这說明了在呈塑性屈服的局部点上发生疲劳破坏,而周围材料仍保持为完全弹性.

研究在反复应力下发生疲劳破坏之处的变形时,我們仍来研究由三个杆組成的模型(图 271),此模型曾用以說明包辛諤效应. 設有一完全反复的力 P,此力大于模型的弹性极限,按第 354 頁所

1) 此工作的摘要曾被提供給皇家航空协会. 参看 *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, Aug. 1936.

述的方法，我們获得一平行四边形迴綫 $abcd$（图 342）。在前面的推演中，不計竪杆由于塑性变形而引起的材料硬化，并假設在負荷循环期間杆的屈服点应力保持不变。在此假設下，迴綫的大小保持不变，并与循环数无关。如果計及应变硬化，我們就得完全不同的結果。从点 a 开始（此点相应于开始对模型卸載），我們得直綫 ab（图 342）。在点 b，竪杆尚未开始屈服，因为由于先前的塑性变形（图綫的 ea 段）其屈服点应力已稍有提高。杆将繼續起弹性作用直到某一更大的載荷值（諸如图綫上的点 b'）为止。从此載荷开始，竪杆发生屈服，我們得图綫的 $b'c'$ 段。点 c' 相应于模型上向上作用的力 P。現在卸去模型的載荷，然后在相反方向对其再加載荷，我們发現，由于竪杆的应变硬化，弹性变形繼續到点 d' 为止。在点 d' 处开始屈服，我們得图綫上的 $d'e'$ 段。

繼續进行加載和卸載循环，得 $f'g'h'i'\cdots$ 各点。我們看出，由于竪杆的应变硬化（此表示疲劳試样中的薄弱点），迟滞迴綫随循环数的增加而愈来愈窄。这說明了，当外載荷的幅度保持不变（$\pm P$）时，杆的塑性变形幅度逐次減小。同时，杆內的应力幅随循环数而增长，且漸趋于在完全弹性模型上受載荷 P 作用时所能获得之值。

現在轉而討論疲劳試样中的薄弱点，主要問題在于，作塑性变形的晶粒将安全地經受进展性的应变硬化，还是疲劳裂縫将开始发展。为了回答这一問題，奧罗万[1]用了一个以屈服应力表示为塑性变形的函数的应变硬化曲綫，来研究受应力循环时薄弱点的应变硬化[2]。他研究了如图 343a 和 b 所示的两种情形。在这两种情形中，曲綫 OPA 代表材料的应变硬化曲綫。相应于图 342 中点 a 的点 P 的縱坐标表示第一个循环开始时疲劳試样薄弱点的应力。鋸齿形綫 $PP'P''\cdots$ 表示在外載荷循环期間薄弱点的連續交变的塑性变形。設应变硬化与应变的方向无关，而仅与循环期間其絕

1) E. Orowan, *Proc, Roy. Soc.* (London), *A*, vol. 171, p. 79, 1939.

2) 由于塑性应变方向的改变，此曲綫与使試样作靜力伸长时所得的曲綫稍有不同，但此差别在我們以后的討論中无关紧要。

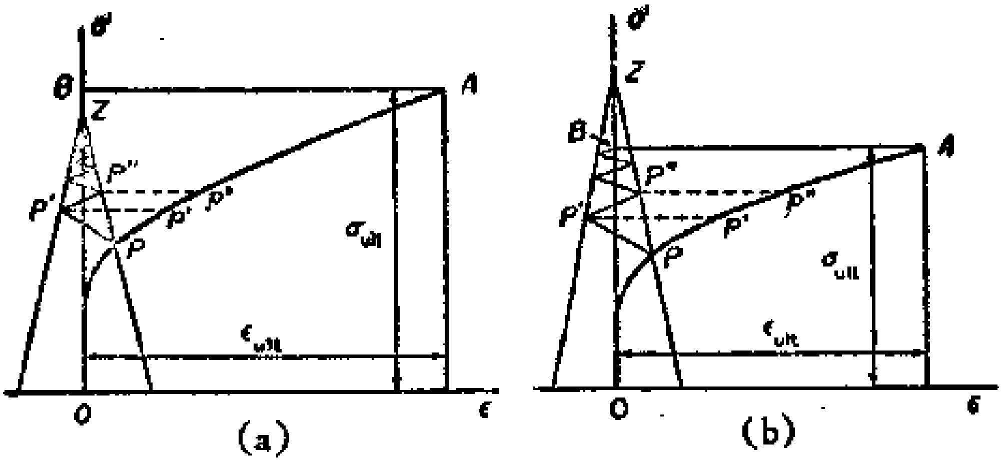


图 343

对值的总和有关，我們由应变硬化曲綫 OPA 上 $p',p''\cdots$ 各点获得了薄弱点的应变硬化．对于图 343a 的情形（图中点 Z 在点 B 下面），我們可以看出，即使是无限次循环，应变硬化也始終小于其极限值（点 A）．因此我們得出，在此情形下交变載荷是安全的．

对于图 343b 所示的情形，图中点 Z 在点 B 上面，薄弱点的应变硬化在点 B 达到其极限值．循环数再增加时，裂縫将开始扩展，試样将发生疲劳破坏．可以看出，安全循环和不安全循环这两种情形的区别只是点 Z 的位置．所以耐久极限将相应于点 Z 与点 B 重合的情形．縱坐标 OZ 代表极限应力，随着循环数的增加，它漸趋于薄弱点的应力幅[1]．它是取决于薄弱晶粒定向的局部应力，它可能較按試样截面上的平均应力算得的 σ_{ult} 为高．

根据图 343 中的图綫，奥罗万对疲劳強度得出了与实驗数据相当符合的一些結論：

（1）由于应力循环的影响只决定于縱坐标 OZ 和 OB 的相对值，可以預期，材料的耐久极限与其极限強度有关，而与比例极限、屈服应力及延性等特性无关．

（2）設应变硬化曲綫的 PA 段（图 343）可用一傾斜直綫来代替，可以看出，σ-n 曲綫（图 312）必定具有一由傾斜直綫和水平直綫組成的特殊形状．对于相应于此两綫交点（耐久极限）的循环

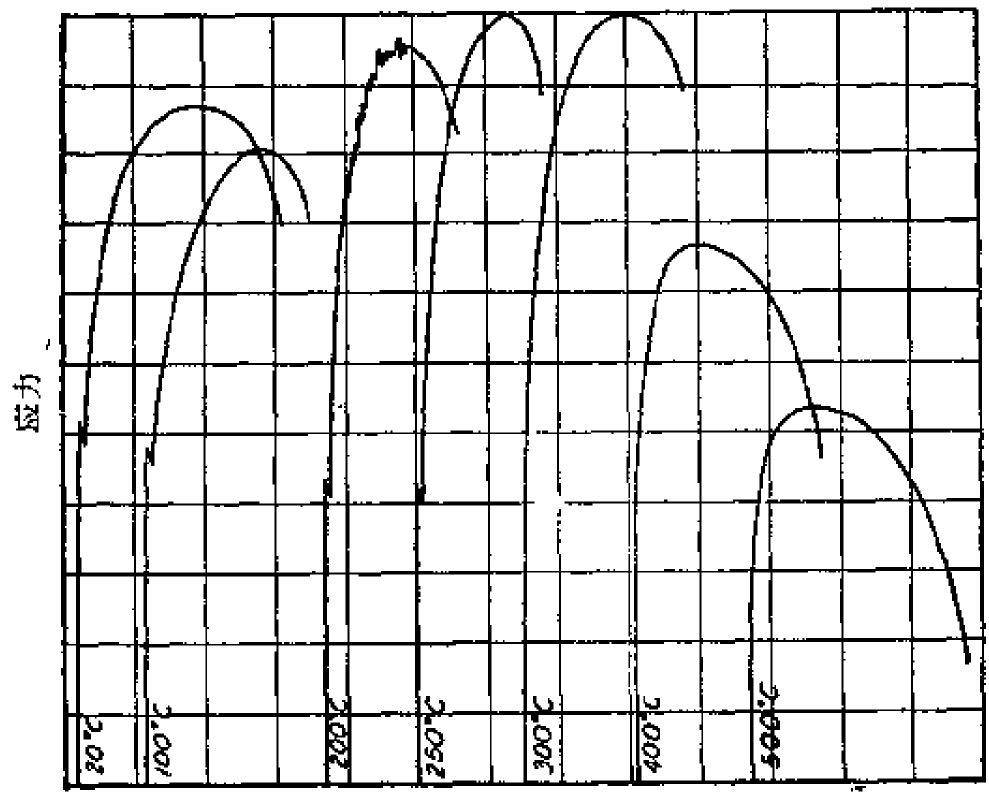
1）它相当于前面所討論的模型竪杆中的应力幅．

數，也可予以粗略估計。

（3）平均应力对应力幅的影响也可以用一类似于图 343 的图綫来加以研究。

§ 91. **金屬在高温下的机械性質。** 工程結构零件同时承受应力和高温作用的情形很多。例如，在发电厂和化工厂中均有这种情形。由于有不断提高发电厂中蒸汽初温[1)]的趋势，以及燃汽輪机的发展，材料在高温下的强度問題在实用中就日益重要，在此方面已作了大量的研究工作[2)]。

实驗指出，金属受拉伸时的屈服点和极限强度与温度有很大



应变

图 344

1) Mellanby and Kerr, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London), 1927; H. L. Guy, *ibid.*, 1929, 及 *Engineer*, vol. 147, p. 136, 1929.

2) 关于参考书目，可参看 G. V. Smith, Properties of Metals at Elevated Temperatures, New York, 1950. 并参看 H. J. Tapsell, Creep of Metals, Oxford, 1931.

关系．图 344 示出了中碳鋼在不同溫度下的几个拉伸試驗图[1]．当溫度升高到 250℃ 左右时，鋼的极限強度随之增加，但溫度再升高时它就迅速下降．随着溫度的升高，屈服点也愈来愈不明显，在 300℃ 时就不能在图綫上辨别出来了．在图 345 上放大地示出了同样图綫的第一部分．此图表明，鋼的比例极限随溫度的升高而

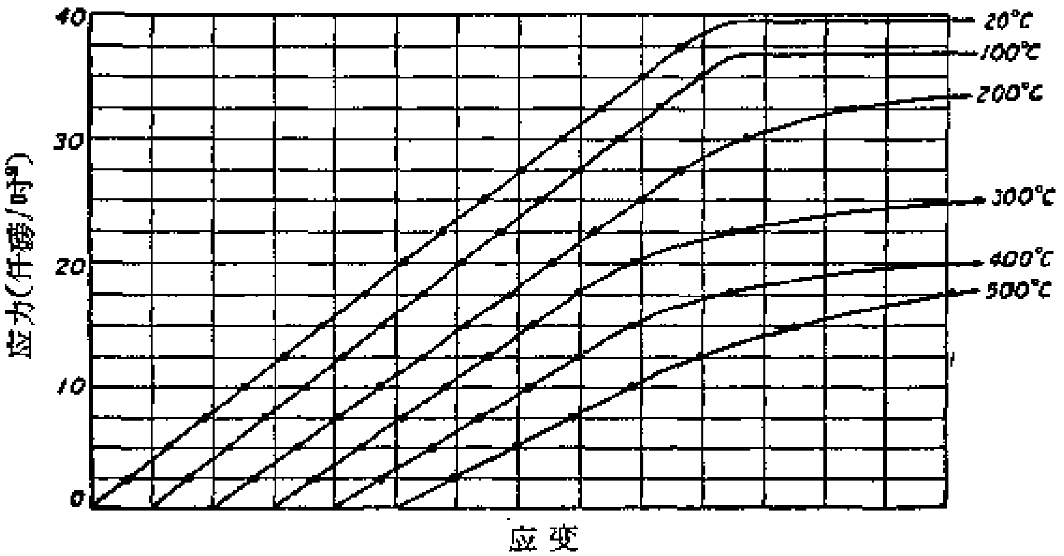


图 345

降低．同时，图綫直綫部分的斜率減小，因而彈性模量減小．图 346 总括了上面試驗所得的結果，此图表明，材料的強度随溫度的升高而降低，但由伸长和面积收縮所表征的延性則增加．

在高溫下的实驗指出，拉伸試驗結果也与試驗所历的时間有关．随着拉伸試驗时間的增加，引起断裂所需的載荷愈来愈小．图 347 示出了与前图相同的鋼，但在 500℃ 下历时 6 分、70 分和 240 分鐘的拉伸試驗图．显然，由普通的短时試驗（例如历时 15 或 20 分鐘）所得的拉伸試驗数据（如图 346 所示者），只能用于載荷短期作用的情形[2]．

对于在高溫下长期作用的載荷——例如，結构的自重或发电

1) 参看 R. B. Wilhelm 在西屋研究实驗室所作的工作报告，*Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 24_2, p. 151, 1924.

2) 为了消除时間效应，曾用振动試驗来确定彈性模量．参看 G. Versé, *J. Appl. Mech.*, vol. 2, 1935，和他在密歇根大学的博士論文．

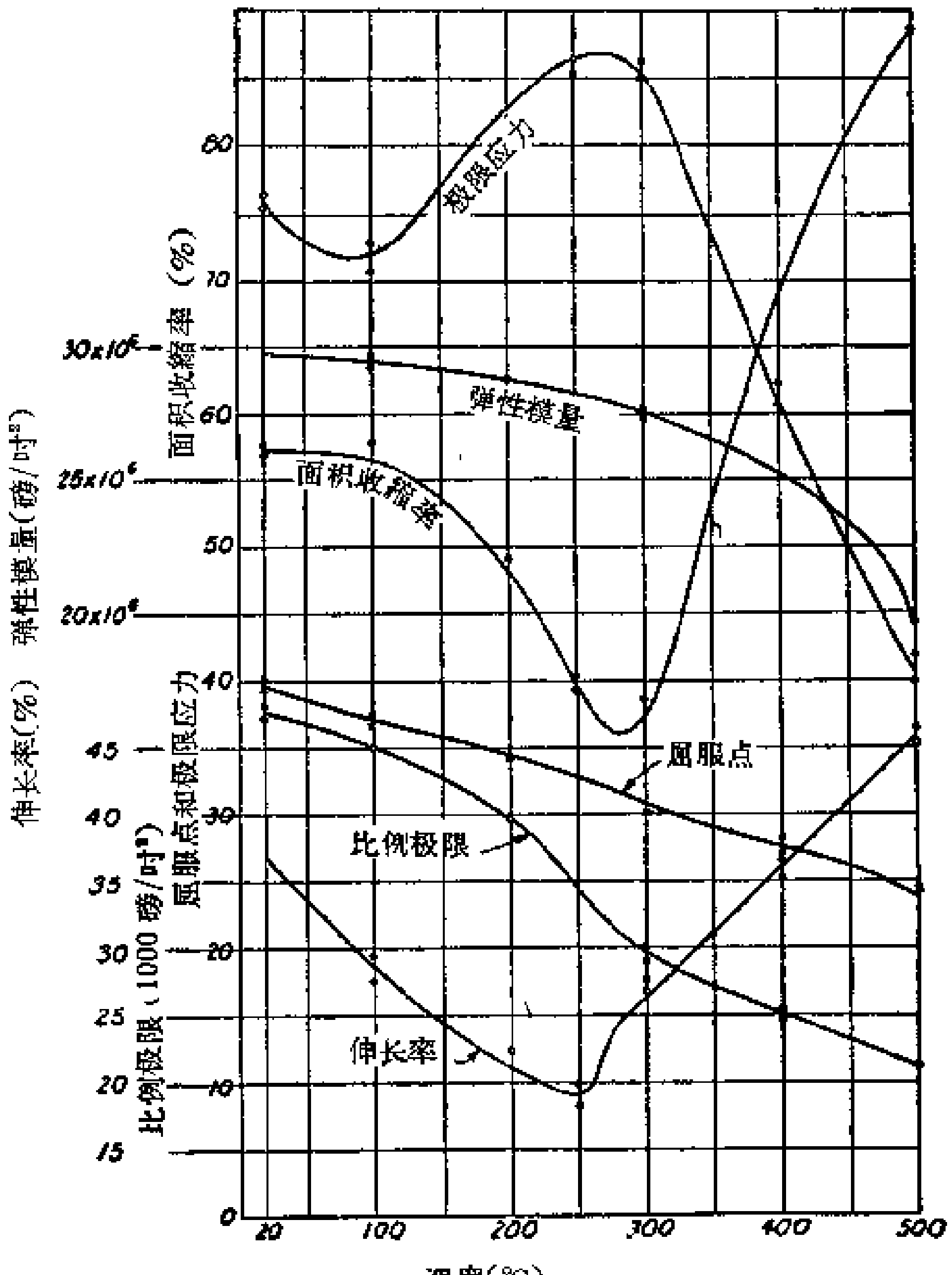


图 346

厂中的蒸汽压力——我們就需要有关于**时間效应**的补充資料．經驗指出，在这种状态下发生了継續变形或**蠕变**，此为設計时应予考慮的一个重要因素．虽然对此課題曾作了大量的研究工作[1]，而且目前大有进展，但金属在高温下受长期載荷时的性状問題还不能認为已完全解决．

1) 关于参考书目，可参看 G. V. Smith 的著作，*loc. cit.*, p. 537.

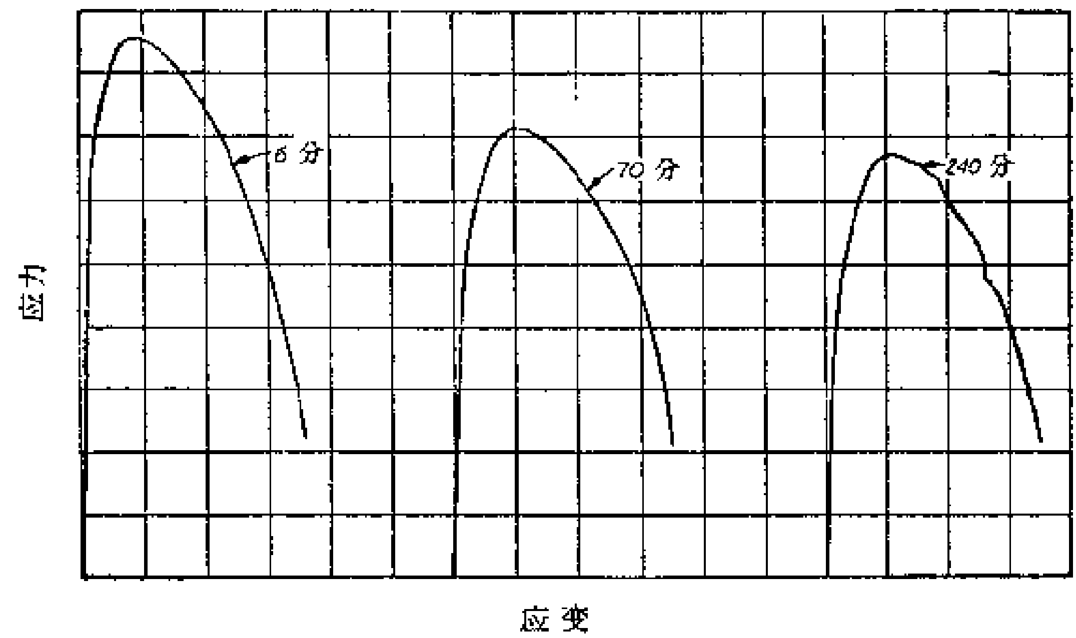


图 347

关于蠕变的实验，大多数是研究材料受长期拉伸时的逐渐伸长。将拉伸試样置于高温下，使其承受一固定的載荷和温度，研究此載荷下的**进展性蠕变**。在一給定温度和各种載荷下所作的这种实驗，其結果可用时間-伸长率曲綫来表示（如图 348[1]所示）。曲綫 A 代表一受較高应力时的典型**蠕变曲綫**。施加載荷后，蠕变率逐漸減低。在点 a 处发生反曲，蠕变率开始增加，直至試样破坏时为止。相应于稍小載荷的曲綫 B 具有相似的形状，但由于蠕变率較低，引起断裂所需的时間較长。

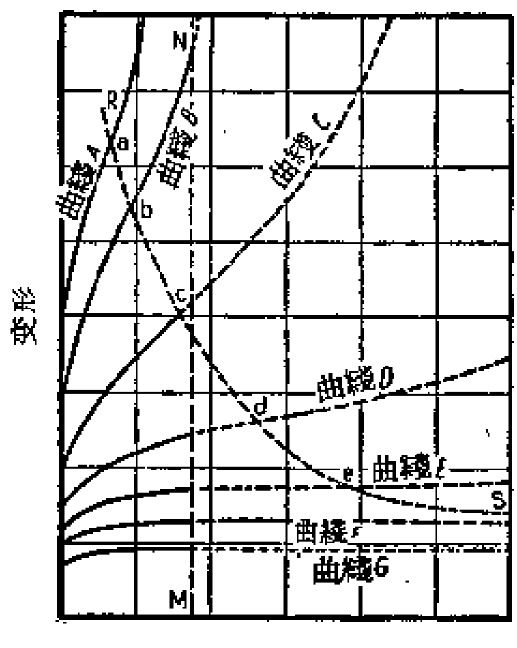


图 348

当載荷再減小时，对不同試样所作的同样試驗得出曲綫 C，D，E，F 和 G。随着应力的減小，

1) 图 348—353 均取自 McVetty 的論文，*Mechanical Engineering*, p. 149, 1934, 和 *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 34, 1938.

在蠕变曲綫上达到拐点所需的时間愈来愈长. 为了确定 F 和 G 等曲綫的拐点,需要作时間极长的試驗. 当应力減小时,可以看出,对于累进的长时期,蠕变曲綫基本上是一直綫. 实踐中所遇的貧用应力通常在曲綫 G 之下，因此蠕变曲綫趋近于一直綫的假設在实用中足够准确. 对于一給定应力和一給定温度，此綫的斜率表示**最小蠕变率**. 此蠕变率的大小随应力的減小而減小，但不能确断它将于何时为零,卽有**一极限应力**,它能为試样在高温下无限地承受.

研究拉伸試样在高温下受固定載荷时的**进展性蠕变**时，必須記住两个現象:(1)由于塑性应变而引起的材料硬化,和(2)由于高温的长期作用而使此硬化消除或材料"軟化". 塑性流动在高温下的机理与在室温下的相同. 塑性变形是由金属的滑移引起的. 在此滑移的同时对滑移的抗力增大,此卽应变硬化(第 360 頁).

促使应变硬化效应消除的速率与温度有关. 前已指出(第 360 頁),根据金属种类的不同,将金属在一特定高温下加以**退火**处理,可在短期內消除应变硬化效应. 如果温度长期作用时，在很低的温度下可得同样效果. 曾經指出[1]，例如研究冷作銅的軟化，在 300℃下历时 12 分鈡引起的軟化在 200℃ 下需时 10.4 天,而要在 100℃ 下引起同样軟化則显然需时 300 年左右.

时間-伸长率曲綫(图 348)表明,伸长速率起初逐漸減小. 这是由于应变硬化之故. 在拐点,硬化和軟化相互抵消,因而伸长速率不变;卽由蠕变引起的应变硬化不断为高温的軟化效应所消除. 然后蠕变在一固定速率下継續进行，此速率与应力大小及温度有关.

由于我們必須經常对同时承受高温和应力作用的构件計及进展性蠕变，因此設計必須根据結构的确定的使用期以及一个容許永久变形量的假設来进行. 对于任何特定情形,选择貧用应力时,均須使結构在其使用期內的永久变形不超出取定于結构型式的一

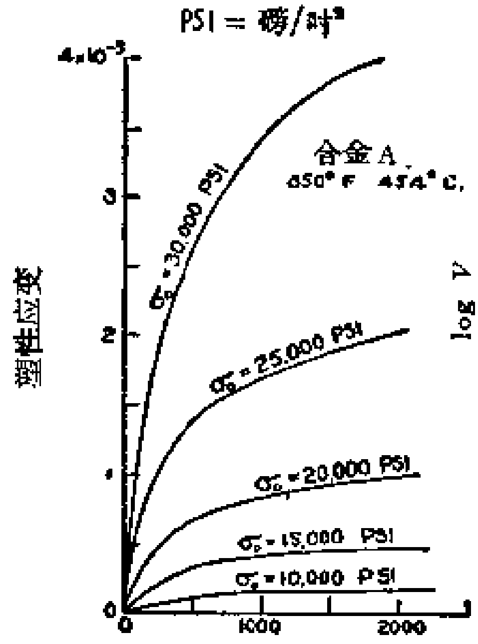
1) 参看 Pilling and Halliwell, *ibid.*, vol. 25, 1925. 并参看 R. W. Bailey, *J. Inst. Metals*, vol. 35, 1926.

定限度. 长时期作高温試驗的目的是供給設計师足够的資料，使其放心地計算由蠕变引起的永久变形.

最长的实驗时間通常是数千小时，为了預測結构使用期內的蠕变变形，需要将实驗室的一些試驗結果加以外推. 各种鋼的实驗指出，对于图 348 中蠕变曲綫的第一段，蠕变率超过最小蠕变率之值，当时間按算术級数增加时，它按几何級数減小. 因此，如以 e 表示在时間 t 內的单位非弹性伸长，以 v 表示相应的蠕变率，并以 v_0 表示最小蠕变率，則我們可取蠕变率的表达式如下[1]：

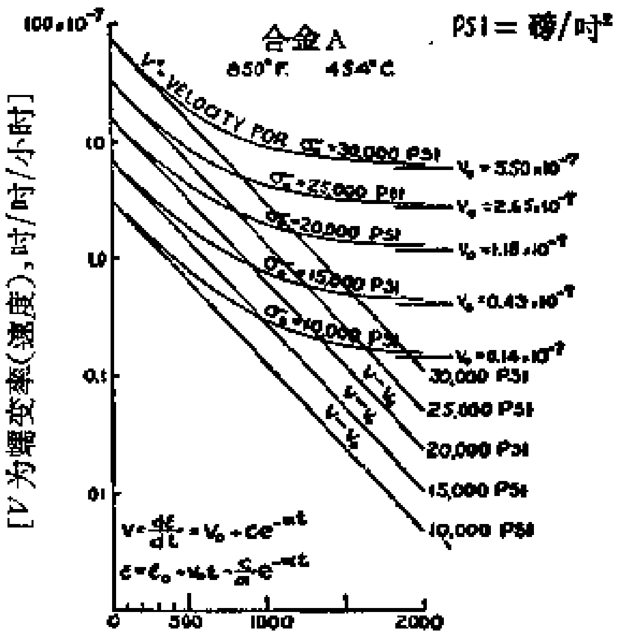
$$v = \frac{de}{dt} = v_0 + ce^{-\alpha t}, \tag{a}$$

式中 c, v_0 和 α 均为須由蠕变曲綫确定的常数. 以图 349 所示的蠕变曲綫为例，这些曲綫都是将金属在几个应力值和一固定温度 850°F 下作試驗得出的. 在每一曲綫上測量五个点的斜率，我們得到五个不同 t 值下的蠕变率之值，然后作出图 350 所示的曲綫.



时間 t—小时

图 349



时間 t—小时

图 350

---

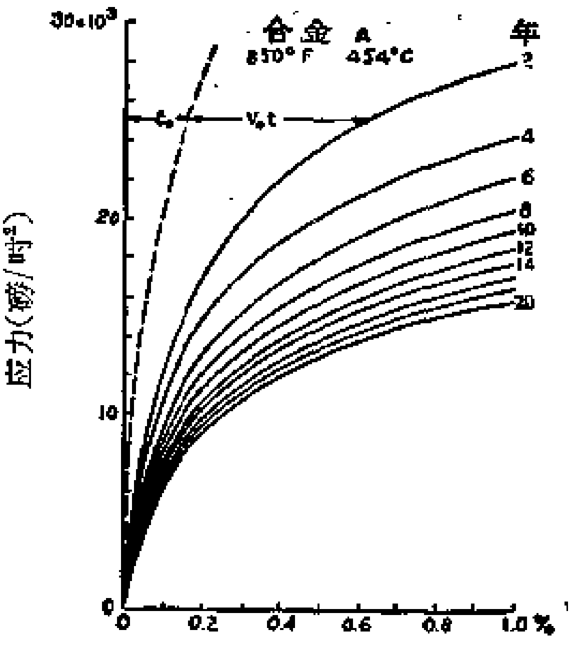
1) 参看第 440 頁上的脚注. 关于試驗数据外推法的比較，可参看 J. Marin, *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 37, p. 258, 1937.

这些曲綫的水平漸近綫显然表示所用应力值下的 v_0 值. 現在对时間点繪 $\log(v-v_0)$ 值,我們得一組傾斜平行綫,这表明所假設的表达式(a)选择得令人滿意. 測量这些綫在 $t=0$ 时的縱坐标,并測量其斜率,可得式(a)中常数 c 和 α 之值.

現在将式(a)积分,得单位塑性伸长为

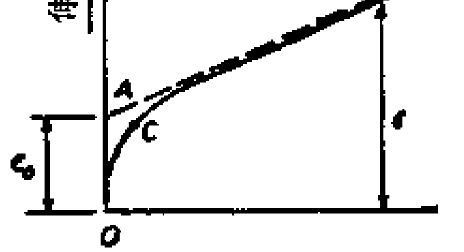
$$\epsilon=\epsilon_0+v_0t-\frac{c}{\alpha}e^{-\alpha t}, \tag{b}$$

式中 ϵ_0 为一常数. 将此式应用于特定的 t 值(相应于此值的塑性伸长可由图 349 得知),即可算出 ϵ_0 值. 于是式(b)中所包含的一切常数均可用图 349 和图350的曲綫来确定. 現在我們可应用此式来計算任意給定期間內的 ϵ. 这样便得到了图351所示的曲綫. 对于一定材料和一定溫度求得这組曲綫后, 如果結构的使用期和容許的塑性变形均为已知时, 設計师就很容易选择适当的費用应力值.



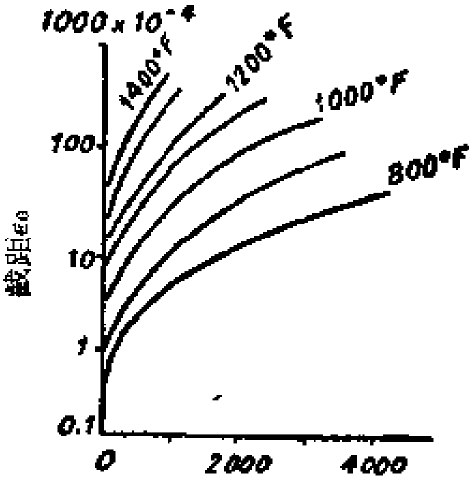
塑性变形

图 351



时 間

图 352



应力(磅/吋²)

图 353

計算很大的 t 值下的 ϵ 时，我們发現式(b)中的最后一項非常小，可忽略不計. 这就是說，我們能用虛綫直綫来代替图 352 所示的曲綫. 于是 ϵ 值决定于蠕变截距 ϵ_0 的大小和最小蠕变率 v_0 之值. 实驗得出的 ϵ_0 值可用如图 353 所示的曲綫来表示，这些曲綫是对 12% 的鉻鋼求得的.

关于最小蠕变率，实驗指出，v_0 可足够准确地用应力的冪函数来表示，即

$$v_0 = k\sigma^n, \tag{c}$$

式中 k 和 n 为对于給定的材料和溫度的常数. 对于在西屋研究实驗室作試驗的几种鋼，这些常数的数值[1]列于表25. 表中 k 为每24小时内的单位伸长，而 σ 为以磅/吋^{2}計的应力. 有了这些常数，就可計算各种特定情形下結构元件的蠕变变形和应力分布.

表 25 常数 k 和 n 的数值

材　料	溫　度	k	n
0.39%碳份的鍛鋼	400℃	16×10^{-46}	8.6
0.30%碳份的鋼	400℃	48×10^{-38}	6.9
鎳-鉻-鉬鋼	932°F	91×10^{-20}	2.7
12%鉻鋼	850°F	10×10^{-27}	4.4

在前面的討論中，我們曾假設塑性流动带来了应变硬化. 实驗指出，随着溫度的升高，应变硬化愈来愈不显著. 可以看出，应变硬化时的最高溫度随材料的不同而变化；对于鋼而言，它随鋼的成份而变化. 例如，对于軟性碳鋼(0.17% 的碳)，在2200磅/吋^{2}的应力和 647℃ 的溫度下，看不出有应变硬化[2]. 在这种情形下，时間-伸长曲綫具有图 354 所示的形状，即蠕变率随时間而不断增大.

值得指出，图 348 和 354 所示的这两种时間-伸长曲綫均与不同的断裂形式有关. 当发生应变硬化时，試样中任意点的屈服均

1) 参看 McVetty, *loc. cit.*, p. 520.

2) 参看 H. J. Tapsell, Creep of Metals, 1931.

使此点的抗力增大，因此在其他一些截面上也相继发生滑移。由于此結果，产生均匀伸长，試样保持为圓柱形直到开始頸縮时为止。当不发生应变硬化时，发生在最薄弱截面上的局部屈服以一減低的速率向試样两端蔓延。結果断裂試样的两段都是从两端漸向断口处縮小的。

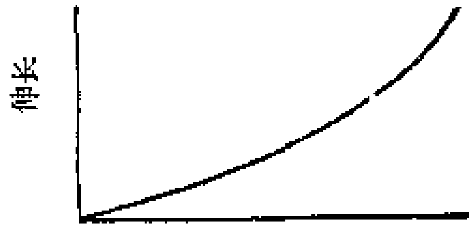


图 354

用式(b)作外推时，假設表征材料特性的 v_0, c 和 α 等値在結构的使用期內均保持不变。但在高温的长期作用下，鋼对蠕变的抗力稍有減小。为了补偿此**热作用**，有时建議实驗室在高于工作溫度的溫度下作試驗[1]。对于高碳鋼，热作用較为显著。为了減小組織的变化，需要加以适当的热处理，以保証組織的穩定性[2]。

在結束此討論前必須指出，进展性蠕变可使同时承受应力和高溫作用的零件中的应力重新分布。在高度应力集中之处蠕变率較大，因此蠕变将引起較有利的应力分布。設計时必須計及这一事实。貝力(Bailey)曾討論了屬于此类的几个例子[3]。

§92. 梁在高溫下的弯曲. 在本节中我們将研究截面对称的稜柱形梁的弯曲，設弯曲力作用在对称平面內。于是由对称性得出，弯曲将发生在同一平面內。在我們以后的討論中，我們从純弯曲(图 355)开始，并假設在弯曲时：(1)截面保持为平面[4]，(2)各

1) 参看 R. W. Bailey 的論文, *J. Appl. Mech.*, vol. 21, p. 309, 1954.

2) 参看 F. R. Hensel and E. I. Larsen, *Trans. Am. Inst. Min. Metallurg. Engrs.*, vol. 99, p. 55, 1932. 长期的高溫作用对各种鋼性質的影响在 G. V. Smith 的书中有討論, *loc. cit.*, p. 517. 蠕变抗力很大的鋼在高溫下的晶体內部断裂的情形曾由 R. W. Bailey 作了討論, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (London), vol. 131, pp. 131–349, 1935.

3) R. W. Bailey, *ibid.*, 1927 和 1935; *Engineering*, vol. 124, p. 44, 1927, 和 vol. 129, 1930. 并参看 C. R. Soderberg, *J. Appl. Mech.*, vol. 1, p. 131, 1933; G. H. MacCullough, *ibid.*, p. 87; J. Marin, *J. Franklin Inst.*, vol. 226, p. 645, 1938.

4) 此假設与实驗相当符合；参看 G. H. MacCullough, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 55, p. 55, 1935; H. J. Tapsell, *J. Inst. Metals*, p. 387, 1935.

縦向纖維均处于簡单拉伸或压縮状态，和(3)对拉伸建立的蠕变方程式[第 443 頁式(b)]对压縮也适用。 如果我們以 y 表示纖維离中性軸的距离，而以 r 表示撓度曲綫的曲率半径，則任意纖維的单位伸长或压縮将为

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \tag{a}$$

計算相应的应力时，我們假設自施加載荷以来已过去相当长的时間。于是由图 352 中曲綫所表示的短暫时期可忽略不計，而我們可用第 444 頁式(c)来計算蠕变。由此得

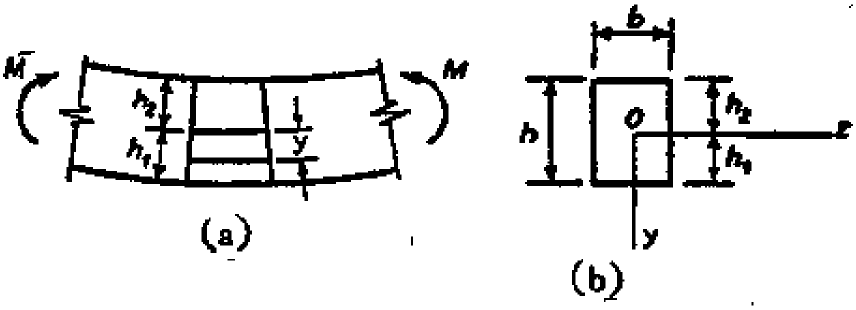


图 355

$$\epsilon = \frac{y}{r} = k\sigma^n t \tag{b}$$

和

$$\sigma = \left(\frac{y}{rkt}\right)^{1/n}. \tag{c}$$

以 h_1 和 h_2 表示最远纖維离中性軸的距离，得最大拉伸和压縮应力之値各为

$$(\sigma_{max})_t = \left(\frac{h_1}{rkt}\right)^{1/n}, \quad (\sigma_{max})_c = \left(\frac{h_2}{rkt}\right)^{1/n}. \tag{d}$$

在离中性軸的距离为 y 之处的拉伸和压縮应力各为

$$\sigma_t = (\sigma_{max})_t \cdot \left(\frac{y}{h_1}\right)^{1/n}, \sigma_c = (\sigma_{max})_c \cdot \left(\frac{y}{h_2}\right)^{1/n}. \tag{e}$$

为了确定中性軸的位置及距离 h_1 和 h_2，我們运用表示截面下部(图 355)的拉应力之和必定等于上部的压应力之和的靜力学方程式。此方程式为：

$$(\sigma_{\max})_t\int_0^{h_1}\left(\frac{y}{h_1}\right)^{1/n}dA=(\sigma_{\max})_c\int_0^{h_2}\left(\frac{y}{h_2}\right)^{1/n}dA. \tag{f}$$

当截面宽度为 y 的已知函数时，我們能完成上列积分，而得一用以计算比值 h_1/h_2 的方程式.

如果截面具有一垂直于弯曲平面的对称軸时，問題就非常簡单. 对于这种情形我們立刻断定，此軸为截面的中性軸，因为这样才满足式(f). 因此我們得

$$h_1=h_2=\frac{h}{2};\quad (\sigma_{\max})_t=(\sigma_{\max})_c=\sigma_{\max}=\left(\frac{h}{2rk t}\right)^{1/n}, \tag{g}$$

对于拉伸和压缩应力，均可用公式

$$\sigma=\sigma_{\max}\left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}. \tag{h}$$

为了計算 $\sigma_{\max}$，我們运用表示分布在截面上的內力矩等于外弯矩 M 的靜力学方程式，由此我們得

$$M=2\sigma_{\max}\int_0^{h/2}\left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}y\,dA. \tag{i}$$

我們現在来研究寬度为 b 的矩形梁作为一簡单例子. 对于此情形，由式(i)得出

$$M=2b\sigma_{\max}\int_0^{h/2}\left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}y\,dy=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{bh^2}{2}\cdot\sigma_{\max},$$

而我們得

$$\sigma_{\max}=\frac{Mh}{2I}\cdot\frac{2n+1}{3n},$$

式中 I 为截面对中性軸的慣性矩. 代入式(h)，得任意纖維的应力为

$$\sigma=\frac{Mh}{2I}\cdot\frac{2n+1}{3n}\left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}.$$

在图 356 中示出了 $n=10$ 和 $n=6$ 时应力 σ 的分布. 可以看出，当 n 值較大时，n 的改变只使应力受到微小的影响. 为了比較起見，用直綫 OA 表示弹性状态下的应力分布.

知道了 $\sigma_{\max}$ 值后，我們由式(d)求得梁的曲率. 如果中性軸

为截面的对称軸时，则曲率为

$$\frac{1}{r}=\frac{2kt}{h}\sigma_{\max}^{n}. \tag{i}$$

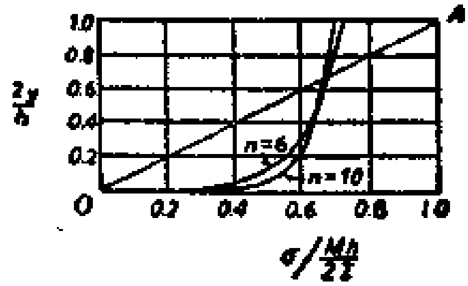


图 356

当梁为横向載荷所弯曲时，将弯矩M之值代入純弯曲的公式，就可算出梁任意截面处的弯曲应力和曲率．因此对于中性軸为对称軸的情形，应力可由式(h)和(i)計算，而曲率可由式(j)求得．对于矩形梁，挠度曲綫的微分方程式为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{2kt}{h}\ \sigma_{\max}^{n}=\pm\frac{2kt}{h}\left(\frac{h}{2I}\right)^{n}\left(\frac{2n+1}{3n}\right)^{n}M^{n}.$$

对于載荷分布的任何特定情形，此方程式均可很快积出，而积分常数可由梁两端的条件定出．矩形梁在弯曲应力和直接应力联合作用下的弯曲可用同样的方法研究[1]．

§ 93. 应力松弛． 在前节中研究了固定載荷下的蠕变．然而也有在漸減的外力下发生蠕变的情形．承受高温的螺栓組是属于此类的重要情形．擰紧螺栓后产生了很大的初始拉应力，但由于蠕变，应力随时間逐漸減小．此現象称为**松弛**． 螺栓中初始应力的減小可能产生不良后果，例如在高温下汽輪机或管道中蒸汽的滲漏等．由于有这些后果，因此曾作了大量的理論和实驗工作来研究松弛現象[2]．

在討論此問題时，我們首先研究螺栓两端被保持一固定的間隔距离的簡单情形．設擰紧螺栓后产生了初始拉应力 σ_0 和相应的弹性应变 σ_0/E．随着时間的消逝，螺栓中的拉应力和弹性拉应变将由于蠕变而逐漸減小．同时，会发生塑性变形．由于螺栓的

1) 此情形由 R. W. Bailey 作了討論，*loc. cit.*, p. 527.

2) 解此問題的几个方法曾由 E. P. Popov 作了討論，*J. Appl. Mech.*, vol. 14, p. *A*-135, 1947；关于此課題的参考书目列于該論文中．并参看 G. W. Housner, *ibid.*, p. 352. 关于松弛应力的实驗研究，可参看 A. Nadai and J. Boyd, *Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech.*, p. 245, 1939.

两端均被固定，总伸长必定保持不变，并等于初始弹性伸长．以 σ 表示螺栓在任意时刻 t 时的拉应力，而以 ϵ_p 表示由蠕变引起的塑性伸长，我們得方程式

$$\epsilon_p + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E}. \tag{a}$$

在此式中，ϵ_p 和 σ 均为时間 t 的函数．将式(a)对 t 微分，得

$$\frac{d\epsilon_p}{dt} = -\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{b}$$

解此方程式时，我們首先假設第 444 頁式(c)的蠕变率对于我們的問題足够准确．于是

$$k\sigma^n = -\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt},$$

因而得

$$dt = -\frac{1}{kE}\frac{d\sigma}{\sigma^n}.$$

积分之得

$$t = \frac{1}{(n-1)kE} \cdot \frac{1}{\sigma^{n-1}}\left[1-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{n-1}\right], \tag{c}$$

螺栓的应力-时間关系可用图 357 所示的曲綫[1]来表示．經驗指出，由此曲綫所得的螺栓应力太高．螺栓在短得多的时間內就丧失其初始应力，因而用图 352 中的直綫 AB 来解式(b)就不够准确．

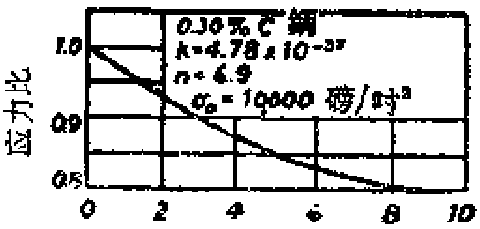


图 357

为了获得一較为满意的結果，必須用图 352 中的曲綫 OCB．于是蠕变率由下列較普遍的式子[2]表示．

$$\frac{d\epsilon_p}{dt} = f(\sigma, t). \tag{d}$$

---

1) 參看 J. Marin, Mechanical Properties of Materials and Design, p. 241, 1942.

2) $f(\sigma, t)$ 的几种形式在上面提及的 E. P. Popov 的論文中有討論．必須指出，为了研究材料起初受高应力，而后在不断减小的应力下发生蠕变时的松弛，第 442 頁适用于靜应力下蠕变的式(a)必須予以改变．

将式(d)代入式(b)，得

$$f(\sigma, t)=-\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{e}$$

此方程式通常可用逐步数值积分法来解. 从 $t=0$ 和 $\sigma=\sigma_0$ 开始，我們計算(e)式的左边部分. 在一定的程度上，它給出了应力-松弛曲綫的初始斜率. 用了該值，就可算出 $t=\Delta t$ 时的应力 σ. 将此新应力代入式(e)，得 $t=\Delta t$ 时的斜率值. 然后可計算 $t=2\Delta t$ 时的 σ，将过程继續下去。 波波夫(Popov)所作的計算指出，按照此程序可得一应力松弛曲綫，此曲綫与实验相当符合.

在前面的討論中，假設了螺栓的两端均为絕对固定；但实际上在端部联接中通常总有些弹性，在計算应力松弛曲綫时此点必須計及. 在图 358 中示出了一承受高温的节管螺栓联接. 在擰紧螺栓 m 时，凸緣 n 将发生弹性变形. 在发生松弛时，此变形减小而螺栓长度增加. 以 $\beta\sigma/E$ 表示两凸緣由于螺栓中的应力 σ 而引起的单位間距內的弹性变形[1]. 于是在发生松弛时，我們可得下列方程式，而不是式(a)：

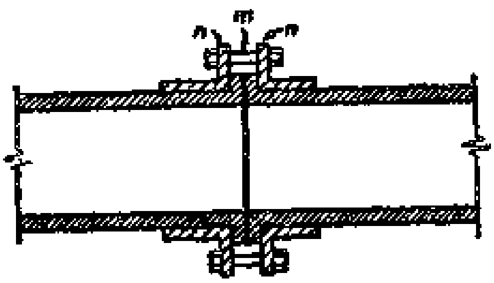


图 358

$$\epsilon_{pb}+\frac{\sigma}{E}=\frac{\sigma_0}{E}+\frac{\beta(\sigma_0-\sigma)}{E}-\epsilon_{pf}. \tag{f}$$

此方程式右边最后两項代表发生松弛时，由于凸緣間的距离作弹性和塑性变化而引起的螺栓单位伸长. 最后，式(f)可写成下列形式：

$$\epsilon_{pb}+\epsilon_{pf}=\frac{(1+\beta)(\sigma_0-\sigma)}{E},$$

对 t 微分，得

$$\frac{d\epsilon_{pb}}{dt}+\frac{d\epsilon_{pf}}{dt}=-\frac{1+\beta}{E}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{g}$$

---

1) 在計算 β 时，必須研究凸緣的弹性变形(参看第 124 頁).

对于螺栓的蠕变率,我們仍用式(d). 对于凸緣的蠕变率，可用同样的表达式. 于是式(g)的形式将与式(e)相同，并可用逐步积分法来解. 于是我們得出,由于端部联接中的彈性,螺栓应力的逐漸减小較两端固定的情形进行得慢.

§94. 复合应力下的蠕变. 关于复合应力下的蠕变，只作了少数的实験. 在室温下,拜利(R. W. Bailey)[1]对承受內压及同时承受內压和軸向載荷的鉛管作了試驗. 鉛具有低熔点,可在室温下发生蠕变現象. 他还研究了同时承受軸向拉伸和扭轉的鋼管在900°F 和 1020°F 下的性質. 爱佛烈脫[2] (F. L. Everett) 对鋼管作了高温下的扭轉試驗. 同普通的拉伸試驗比較，这种試驗具有一些优点，因为塑性扭轉并不影响試样的截面尺寸、并且由于温度变化和組織变化而引起的微小体积变化并不影响所量得的扭轉角.

如果在复合应力下的蠕变方面缺少补充实驗資料时，就需要改用簡单拉伸蠕变試驗的結果来解这些較复杂的問題. 为了达到此目的,通常假設: (1)在发生塑性变形时，主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 的方向与主应变 ϵ_1, ϵ_2 和 ϵ_3 的方向一致，(2)材料的体积保持不变，因此当变形很小时，

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0, \qquad \text{(a)}$$

和(3)最大剪应力与相应的剪应变成正比. 可以看出,在平分主平面間夹角的平面上，剪应变之値为 $\epsilon_1 - \epsilon_2$, $\epsilon_2 - \epsilon_3$ 和 $\epsilon_3 - \epsilon_1$. 研究沿方向1和 2 具有单位伸长 ϵ_1 和 ϵ_2 的一个立方体(图 359)就可獲得此結果. 相应于平面 Ob 和 Oc 的剪应变 γ 可由三角形 Oab 求得. 設 $\epsilon_1 > \epsilon_2$,得

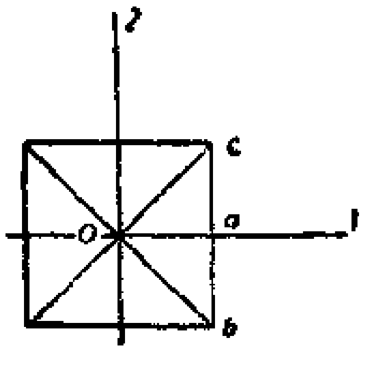


图 359

1) 世界动力会議,东京，1929; *Engineering*, vol. 129, pp. 265—266, 327—329 和 772,1930.

2) *Trans. A. S. M. E.*, vol. 53, 1931; *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, vol. 39, pp. 215—224, 1939. 并参看 H. J. Tapsell and A. E. Johnson, *Engineering*, vol. 150, 1940.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\approx\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{1+\epsilon_2}{1+\epsilon_1},$$

从而得

$$\gamma=\epsilon_1-\epsilon_2.$$

同样，我們可求得其他两个平分面上的剪应变，于是假設(3)取得下列形式：

$$\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\sigma_1-\sigma_2}=\frac{\epsilon_2-\epsilon_3}{\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\epsilon_3-\epsilon_1}{\sigma_3-\sigma_1}=\theta, \tag{b}$$

式中 θ 为 σ_1，σ_2 和 σ_3 的函数[1]，它須由实驗确定。由式(a)和(b)得出

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_1&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right],\\ \epsilon_2&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right],\\ \epsilon_3&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right].\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

这些方程式与胡克定律的应力应变关系式相似（参看原书上卷第66頁），但他們有两点不同。显然，$2\theta/3$ 代替了常数 $1/E$，而系数 $1/2$ 代替了泊桑比。

为了使式(c)适用于等速蠕变，我們可将这些方程式除以时間 t。用符号 v_1，v_2 和 v_3 表示主蠕变率，并以 m 表示括弧前面的系数，得下列方程式：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=m\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right],\\ v_2&=m\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right],\\ v_3&=m\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right].\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

---

1) 上面三个假設实质上与先驅者 Barré de St.-Venant (*Compt. rend.*, vol. 70, p. 473, 1870) 和 M. Lévy (*ibid.*, p. 1323)在塑性理論中所用的相同。

将这些方程式应用于簡单拉伸(这时 $\sigma_1=\sigma$ 和 $\sigma_2=\sigma_3=0$),得

$$v=m\sigma. \tag{e}$$

我們已經指出过(参看第 444 頁),在固定溫度下受簡单拉伸时,蠕变率的实驗結果可令人满意地用一冪函数来表示,即

$$v=k\sigma^n, \tag{f}$$

式中 k 和 n 为材料的两个常数. 为了使式(e)与式(f)吻合,必須取

$$m=k\sigma^{n-1}. \tag{g}$$

为了建立式(d)所表示的蠕变的一般情形下函数 m 的形式,我們运用式(296),此式表示三維应力系与簡单拉伸两者的屈服条件之間的关系. 将等价应力

$$\sigma_e=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{300}$$

引入式(g)以代 σ,得

$$m=k\sigma_e^{n-1}.$$

于是式(d)变成

$$\left.\begin{aligned} v_1&=k\sigma_e^{n-1}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right],\\ v_2&=k\sigma_e^{n-1}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\right],\\ v_3&=k\sigma_e^{n-1}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right].\end{aligned}\right\} \tag{301}$$

对于簡单拉伸($\sigma_1=\sigma=\sigma_e$, $\sigma_2=\sigma_3=0$),由这些方程式得出

$$v_1=k\sigma^n,\ v_2=v_3=-\frac{k\sigma^n}{2}. \tag{h}$$

在一般情形下,式(301)提供了一个可用拉伸試驗求得的 k 和 n 值来計算蠕变率 v_1, v_2 和 v_3 的方法. 一些作者[1]在解复合应力下的蠕变問題时曾用了类似的公式.

1) F. K. G. Odqvist, "Plasticitetsteori" *Proc. Roy. Swed. Inst. Engrg. Research*, 1934; R. W. Bailey, *J. Inst. Mech. Engrs.*, vol. 131, p. 131, 1935; C. R. Soderberg, *Trans. A. S. M. E.*, vol. 58, pp. 733—743, 1936.

§ 95. 二維蠕变的特殊情形. 我們現在用式(301)来研究二維应力状态,設

$$\sigma_3 = 0,\ \sigma_1 > \sigma_2,\ \sigma_2/\sigma_1 = \alpha.$$

于是我們由式(300)得

$$\sigma_e = \sigma_1\sqrt{1-\alpha+\alpha^2},$$

而式(301)变成

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= k\sigma_1^n(1-\alpha+\alpha^2)^{(n-1)/2}(1-\alpha/2), \\ v_2 &= k\sigma_1^n(1-\alpha+\alpha^2)^{(n-1)/2}(\alpha-1/2), \\ v_3 &= -\frac{1}{2}k\sigma_1^n(1-\alpha+\alpha^2)^{(n-1)/2}(1+\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

可以看出，在主方向的蠕变率的表达式与簡单拉伸时的表达式[§94 式(h)]所不同之处只在于数学系数. 如果材料的常数 n 和比值 α 均为已知,就可很快算出这些系数的大小.

薄管. 如果給定了結构使用期間在主方向的許用应变,就可由式(302)求得許用应力 σ_1. 这样,就可解这类問題,例如选择在高温下同时承受內压和軸向力或扭矩的薄管的适当厚度等. 在周向取 v_1 而在軸向取 v_2,并設內压单独作用,則得 $\alpha=\frac{1}{2}$ 和 $v_2=0$. 于是在軸向无蠕变,而只在周向才有蠕变. 此結論与拜利对鉛管所作的实驗結果相一致[1].

对于扭矩单独作用的情形,各主应力在数值上均相等,并均与管子軸綫成 45° 角. 这时 $\alpha=-1$，对于在主方向的蠕变,我們得

$$v_1 = -v_2 = \frac{3}{2}k\sigma_1^n(3)^{(n-1)/2}.$$

我們得純剪应变,在管子的軸向无蠕变. 因此无論是单独作用的扭矩还是单独作用的內压,均不产生軸向蠕变. 然而,当压力和扭矩同时作用时,就产生了軸向蠕变. 为了計算此情形下的蠕变,我們必須对每一特定問題計算主应力的大小和方向. 于是式(302)給出了在主方向的蠕变率. 然后軸向和周向的蠕变率可根据簡单

---

1) *Loc. cit.*, p. 534.

的几何关系来求得. 对于与 v_1 的方向成角 φ 的任意方向，蠕变率为

$$v = v_1\cos^2\varphi + v_2\sin^2\varphi.$$

这样算得的蠕变率之值与实验相当符合.

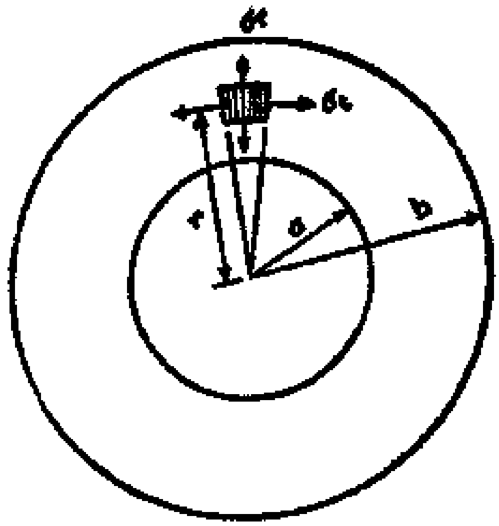


图 360

厚管. 在前面的情形下我們有了均匀的应力分布. 我們来研究一受内压 p 的厚管作为非均布应力的一个例子（图 360）. 設管子处于平面应变状态，軸向应变 ϵ_z 为零，由式(301)得出

$$\left.\begin{aligned} v_t &= k\sigma_c^{n-1}\left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)\right], \\ v_r &= k\sigma_c^{n-1}\left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_z)\right], \\ v_z = 0 &= k\sigma_c^{n-1}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r)\right], \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由最后一个方程式得出

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r). \tag{b}$$

由图 360 所示体元的平衡条件得(参看第 180 頁)

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r. \tag{c}$$

为了确定 σ_t 和 σ_r，必須研究管子的变形. 以 u 表示管子膨胀时的径向位移，我們得(参看第 180 頁)

$$\epsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr},$$

和

$$\frac{d\epsilon_t}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{r}(\epsilon_r - \epsilon_t).$$

設蠕变状态定常，則除以时間 t 后得

$$\frac{dv_t}{dr}=\frac{1}{r}(v_r-v_t). \tag{d}$$

将式(a)的 v_t 和 v_r 代入，便得用以确定主应力的补充方程式。此式利用式(b)后可大大加以简化。于是等价拉应力变成

$$\sigma_e=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_t-\sigma_r),$$

由式(a)得

$$v_t=-v_r=k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}(\sigma_t-\sigma_r)^n. \tag{e}$$

于是式(d)变成

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t-\sigma_r)^n=-\frac{2}{r}(\sigma_t-\sigma_r)^n,$$

我們得出

$$(\sigma_t-\sigma_r)^n=\frac{C}{r^2}, \tag{f}$$

式中 C 为积分常数。現在由式(c)給出

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{1}{r}\left(\frac{C}{r^2}\right)^{1/n};$$

积分后得

$$\sigma_r=-\frac{n}{2}C_1r^{-(2/n)}+C_2, \tag{g}$$

式中 $C_1=C^{1/n}$.

常数 C_1 和 C_2 現在可由管子的內表面和外表面处的条件来确定，即

$$(\sigma_r)_{r=a}=-p=-\frac{n}{2}C_1a^{-(2/n)}+C_2,$$

$$(\sigma_r)_{r=b}=0=-\frac{n}{2}C_1b^{-(2/n)}+C_2.$$

由这些方程式得

$$C_1=-\frac{2p}{n\left(b^{-(2/n)}-a^{-(2/n)}\right)},$$

$$C_2=-\frac{pb^{-(2/n)}}{b^{-(2/n)}-a^{-(2/n)}},$$

由式(g)得

$$\sigma_r = -p\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{2/n} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2/n} - 1}. \tag{h}$$

于是由式(f)得

$$\sigma_t = p\frac{1 + \frac{2-n}{n}\left(\frac{b}{r}\right)^{2/n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2/n} - 1}. \tag{i}$$

由(b),(h)和(i)三式得出在定常蠕变率条件下管子中的应力. 蠕变率的大小可由式(e)求得,即

$$v_t = -v_r = \frac{1}{2}(3)^{(n+1)/2}k\frac{b^2}{r^2}\left(\frac{1}{n}\right)^n\left[\frac{p}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2/n} - 1}\right]^n.$$

在推导中設了管子的温度不随 r 而变. 通过管壁传热的情形可用同样方法处理[1].

在前面的討論中，一个簡单的解是假設了蠕变状态为定常的而求得的. 对于在外力的长期作用后发生的蠕变，它得出了令人满意的結果. 如果我們想要确定在載荷仅仅短期作用后的蠕变如何,根据定常蠕变的假設而导出的公式就不能令人满意了;我們得求助于图 352 中的蠕变曲綫 CB. 問題变得复杂起来了，蠕变只能用逐步法来計算[2]. 这种計算指出，随着外力作用时期的增长，所得的結果趋近于对定常蠕变求得者. 在經过或許一年或更多的时期后,这两种計算方法就給出接近相同的蠕变值.

轉盘. 在結尾中,我們将对图 361 中轉盘的情形[3]簡要地討論一下用逐次近似法計算蠕变的方法. 設圓盘的变厚度 z 較其半径

1) 参看 R. W. Bailey, *loc. cit.*, p. 537.

2) 这种計算的例子載于 C. R. Soderberg 的論文中，*loc. cit.*, p. 537. 并参看 L. F. Coffin, Jr., P. R. Shepler 和 G. S. Cherniak 的論文，*J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 229, 1949.

3) R. W. Bailey, *loc. cit.*, p. 537. 并参看 E. P. Popov 在斯丹福大学的博士論文，1946.

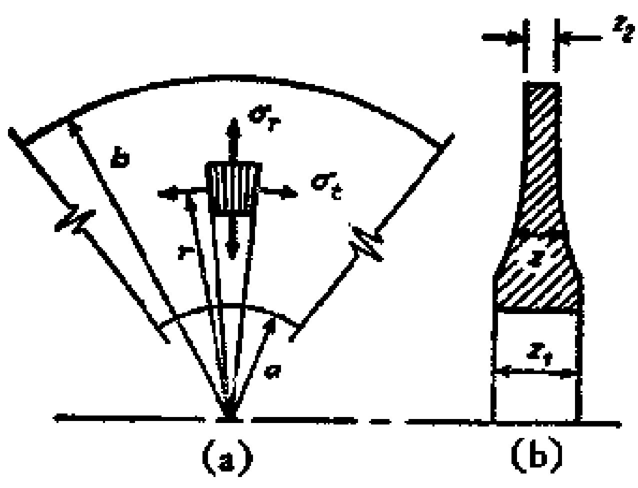


图 361

小得多，于是应力 σ_t 和 σ_r 沿厚度均匀分布而 σ_z 为零．因此我們得二維应力分布，对蠕变率可用式(302)．在这些方程式中，$\alpha=\sigma_r/\sigma_t$ 現在为 r 的函数，即 $\alpha=\varphi(r)$．設蠕变定常，并仍以 u 表示径向位移，得

$$\epsilon_t=\frac{u}{r}=v_t t=kt\sigma_t^n(1-\alpha+\alpha^2)^{(n-1)/2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\epsilon_r=\frac{du}{dr}=v_r t=kt\sigma_t^n(1-\alpha+\alpha^2)^{(n-1)/2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right). \quad \text{(j)}$$

图 361a 所示的阴綫体元的平衡条件为(参看第 186 頁)

$$\frac{d}{dr}(rz\sigma_r)-z\sigma_t+\frac{\gamma\omega^2r^2z}{g}=0,$$

积分后得

$$rz\sigma_r-(rz\sigma_r)_{r=a}=\int_a^r\sigma_t z dr-\frac{\gamma\omega^2}{g}\int_a^r r^2zdr. \quad \text{(k)}$$

可以看出，如果应力 σ_t 的分布为已知，并且 $(\sigma_r)_{r=a}$ 和作为 r 的函数的 z 也給定，就可由式(k)算出任意 r 值下的 σ_r 值．

应用逐次近似法时，我們首先假設 σ_t 在图 361b 所示的圓盘阴綫直径截面上均匀分布．此 σ_t 的平均值可由式(k)自 $r=a$ 至 $r=b$ 的积分求得，并得 σ_t 的一次近似值为

$$(\sigma_t)_1=\frac{1}{A}\left[(rz\sigma_r)_{r=b}-(rz\sigma_r)_{r=a}+\frac{\gamma\omega^2 I}{g}\right], \quad \text{(l)}$$

式中

$$A=\int_a^b zdr, \quad I=\int_a^b r^2zdr.$$

对于任何特定情形均可很快求得 $(rz\sigma_r)_{r=b}$ 和 $(rz\sigma_r)_{r=a}$，因为作用在圓盘的內外边緣上的力均为已知．

由式(l)求得了 $(\sigma_t)_1$ 后，我們就由式(k)算得 σ_r 为 r 的函数，

并求得下列比值的一次近似值：

$$\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_t}\right)_1=\alpha_1=\varphi_1(r).$$

用了这些 α_1 值，蠕变的一次近似值就可由方程組 (j) 的第一式求得，即

$$\left(\frac{u}{r}\right)_1=kt(\sigma_t)_1^n(1-\alpha_1+\alpha_1^2)^{(n-1)/2}\left(1-\frac{\alpha_1}{2}\right). \qquad (m)$$

为了求得一更好的近似值，我們取方程組(j)的两个式之比，即

$$\frac{du}{dr}\frac{r}{u}=\frac{2\alpha_1-1}{2-\alpha_1}=\psi_1(r). \qquad (n)$$

$\psi_1(r)$值可很快算出，因为 $\alpha_1=\varphi_1(r)$ 已知. 于是由式(n)得

$$\frac{du}{u}=r^{-1}\psi_1(r)dr,$$

积分后得

$$\frac{u}{r}=\frac{(u)_{r=a}}{r}e^{\int_a^r r^{-1}\psi_1(r)dr}.$$

将此值代入式(m)以代替$(u/r)_1$，得 σ_t 的二次近似值为

$$(\sigma_t)_2=\frac{(u)_{r=a}}{r}\frac{e^{\int_a^r r^{-1}\psi_1(r)dr}}{kt(1-\alpha_1+\alpha_1^2)^{(n-1)/2}(1-\alpha_1/2)}. \qquad (o)$$

常数 $(u)_{r=a}$ 可由一类似于式(l)的静力学方程式求得，即

$$\int_a^b(\sigma_t)_2 z dr=(rz\sigma_r)_{r=b}-(rz\sigma_r)_{r=a}+\frac{\gamma\omega^2 I}{g}.$$

当 $(u)_{r=a}$ 由此式求得后，$(\sigma_t)_2$ 就可完全确定(用前面的方法)，我們便求得二次近似值 $(\sigma_r)_2$, α_2, $\psi_2(r)$ 和 $(u/r)_2$，依此类推.

由計算知，过程很快地收斂，应力和蠕变的二次近似値得出令人滿意的結果. 全部計算应当列成表格形式进行. 由式 (l) 算出 $(\sigma_t)_1$ 后，我們将 $r=a$ 至 $r=b$ 的距离分成(例如)十等份. 运用了式(k)和逐步积分法，就可列出 $(\sigma_r)_1$ 的数值表. 有了这些数值，就可算出任意 r 值下的 α_1 和 ψ_1，并列出 u/r 的数值表. 有了这些数值，就可用式(o)算出 $(\sigma_t)_2$ 的数值表，依此类推.

§96. **資用应力. 总論.** 設計結构和机器零件时，选择适当的安全系数的問題实际上极为重要. 如果此系数取得太低，卽資用应力太高，結构在使用时強度就不够. 反之，如果資用应力太低，結构就变得不必要地笨重，并且不經济.

在討論选择資用应力所須考慮的各种因素时，我們以等截面杆的拉伸作为簡单例子. 我們假設以材料的屈服点作为确定資用应力的依据；于是安全截面积 A 可由下式求得:

$$\frac{\sigma_{Y.P.}}{n}=\frac{P}{A}. \tag{a}$$

我們看出，截面积决定于外載荷 P 的大小、材料的屈服点 $\sigma_{Y.P.}$ 及安全系数 n. 此系数有时称为**无知系数**，其大小显然与我們所知道的外載荷、材料机械性質的准确度，以及此式所代表的最大应力的准确度有关.

在某些情形下，外力可很准确地确定. 例如，如果已知水的深度，我們就可很准确地知道作用在水壩上的靜水压力. 如果轉子具有一固定的角速度，我們就可准确地知道作用在其上的离心力. 但在大多数情形下，力只能近似地确定，結构最不利的受載情形只能根据长期經驗估計. 以研究桥梁的設計为例. 桥梁本身的重量和行經該桥的車輛的重量可足够准确地确定. 但在設計桥梁时必須計及动力效应. 由于有配重，机車車輪对鋼軌的压力并非固定不变的，而最大压力較靜压力为大. 在动載荷和变載荷的作用下，桥梁将发生振动，在这种情形下确定桥梁各构件中的力的問題变得极为复杂. 我們所不能准确确定的，另一种作用在桥梁上的力为风压. 这种力的大小通常根据現有結构所得的經驗来估計. 由以上的討論显而易見，如果式(a)代表桥梁某一构件的安全条件，則力 P 并不准确知道，而只能近似地估計. 当然，估計所能达到的准确度将影响安全系数的大小.

$\sigma_{Y.P.}$ 的大小也不能准确知道. 对于同一材料的不同試样，它可在一定范围内变化，而此变化与材料的均匀程度有关. 因此对于鋼等均質材料，安全系数自然可取得較木、石等材料为低.

选择安全系数时，还須計及公式本身的准确度. 計算拉伸試样中的应力时（参看图 255），式(a)可認为非常准确，因为这时特别注意使載荷作用在中心，并使其在最薄弱的截面上均匀分布. 但仍以桥梁某一构件的設計为例，可知式(a)只是一粗略的近似公式，它通常与接头为理想鉸接的假設有关. 这一构件的实际应力状态与簡单拉伸相去很远. 由于接头的刚性，桥梁桁架的构件不仅承受直接应力，还承受弯曲. 相应的弯曲应力有时很大. 如果不計及弯曲应力，則运用式(a)时的不准确性通常由增大安全系数来加以补偿.

由上述討論可以看出，要作出关于安全系数大小的任何明确的建議是如何的困难. 系数的选择始終依賴于設計师的經驗和判断力.

在下面的討論中，假設各力均根据經驗而定，且材料的机械性質均为已知. 这样来研究各种方法，以确定各种应力状态对选择耷用应力的影响. 然后工程师才能在設計結构时使結构各部分具有相同的安全系数. 显然，如果要使設計經济，必須經常滿足这一要求，因为結构的极限強度决定于其最薄弱之处的強度.

靜力状态下的耷用应力. 我們从討論靜力状态下的耷用应力开始，这时結构承受不变(或接近不变)的載荷. 我們应区别两种材料：**延性材料**(特别是各种結构鋼)，和**脆性材料**(如鑄鉄、石块和混凝土等).

对于延性材料，通常取屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$ 作为选择耷用应力的依据，因为屈服时所发生的大的变形在工程結构中是不允許的. 当材料的屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$ 已知时，受簡单拉伸或压縮时的安全系数为[1)]

$$n = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sigma_W}. \tag{b}$$

許用应力 σ_W 用式(a)根据名义应力来計算. 由孔或槽引起的应力

1) 此处設拉伸和压縮时的 $\sigma_{Y.P.}$ 相同. 对于无明显屈服点的材料，$\sigma_{Y.P.}$ 通常取为永久变形达到 0.2% 时的拉应力.

集中通常不予計及，假設这些应力由于尖峯应力处的塑性变形而趋于相等. 这一假設只在静載荷作用下才是正确的. 在冲击作用下,必須考虑到带有深槽或截面急剧变化的杆件的脆性性质(参看第 369 頁).

在应力均匀分布的一般情形下,我們运用式(300)所得出的等价应力,并由下式求得安全系数

$$n=\frac{\sigma_{Y.P.}}{(\sigma_e)_W}. \tag{c}$$

对于二維应力分布,用了記号 $\sigma_2/\sigma_1=\alpha$，由此式得出

$$n=\frac{\sigma_{Y.P.}}{(\sigma_1)_W\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}. \tag{d}$$

在純剪切的特殊情形下，$\sigma_1=-\sigma_2=\tau$，$\alpha=-1$，我們得

$$n=\frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{3}\,\tau_W}. \tag{e}$$

在应力非均匀分布的情形下(如在弯曲或扭轉时)，我們必須計及在最大应力区域开始屈服时整个結构并不产生大的变形这一事实. 为了获得大的变形(此变形相当于稜柱杆在大小等于 $\sigma_{Y.P.}$ 的拉应力下的变形),我們必須用比 σ_{max} 达到 $\sigma_{Y.P.}$ 值时的載荷更大的載荷. 以矩形梁的弯曲为例,在加載于梁时,如果离中性軸最远的纖維中的最大应力达到 $\sigma_{Y.P.}$ 值，梁并不发生严重的塑性变形. 为了获得相当于杆受拉应力 $\sigma_{Y.P.}$ 而伸长时的状态,我們必須施加一比 σ_{max} 达到 $\sigma_{Y.P.}$ 值时的弯矩大 50% 的弯矩(参看第 300 頁). 为了計及这一事实,計算**弯曲时的安全系数**的式子为

$$n=\frac{\beta\sigma_{Y.P.}}{\sigma_W}, \tag{f}$$

式中 β 为一与截面形状有关的系数. 对于矩形梁,它等于 1.5；对于薄圓管($d_i/d_0=0.95$),它等于 1.3；对于工字梁，依截面尺寸而定(参看第 300 頁).

同样的考虑也适用于**扭轉**的情形,这时安全系数的方程式为

$$n=\frac{\beta_1\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{3}\,\tau_W}. \tag{g}$$

对于实心圓軸，$\beta_1 = 1.33$（参看第 327 頁）．对于薄圓管，β_1 趋近于数值 1，而式(g)与式(e)一致．

在同时有正应力和剪应力的均布复合应力的情形下，有时不用通式(d)而用式(298)．由此得

$$n = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}. \tag{h}$$

在推导弯曲和扭轉联合作用下 n 的方程式时，我們要用推导式(f)和(g)时用的同样作法来修正式(h)．由此得

$$n = \frac{\sigma_{Y.P.}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right)^2}}. \tag{i}$$

如果 τ 为零，此式就与式(f)一致；如果正应力为零，它就与式(g)一致．

在前面的討論中假設了迭加原理是适用的，这意味着最大应力与載荷成正比．因此确定資用应力时所用的安全系数 n 也可用于外載荷．于是我們能够說，結构在大小为实际安全載荷 n 倍的載荷下开始发生屈服．如果迭加原理不适用，就需要将安全系数应用于載荷，并按只有在作用的載荷增大了 n 倍时才开始发生屈服这一假設来确定結构的尺寸．在 §4 中(参看第 31 頁)曾討論了此法如何应用于弯曲和直接应力联合作用的情形．根据所假設的誤差来設計柱时(参看原书上卷第 274 頁)也可荐用此法．

对于**脆性材料**，取拉伸和压縮时的极限强度作为选择資用应力的依据．諸如发生在槽和孔处的局部尖峯应力必須予以計及．由初等公式求得的名义应力必須乘以一理論应力集中系数[1]．鑄鉄的实驗指出，槽和孔的削弱作用并不如理論系数所表明的严重．这是由于鑄鉄的不均匀性所致．鑄鉄中經常存在的各种杂质和瑕疵起了提高应力的作用，因而由槽和孔引起的附加尖峯应力实质上并不降低材料的強度．設計鑄鉄結构时引用应力集中系数是作

1) 各种情形下的应力集中系数可参看第八章，并参看 R. E. Peterson 的著作，*loc. cit.*, p. 306.

为补偿材料的不良冲击抗力的，在运輸和安装时产生冲击应力的可能性总须予以計及。于是計算拉伸和压縮时的安全系数的公式为

$$n = \frac{\sigma_{ut}}{k\sigma_W}, \quad n = \frac{\sigma_{uc}}{k\sigma_W}, \tag{j}$$

式中 σ_{ut} 和 σ_{uc} 分别为拉伸和压縮时的极限強度。这些公式也可以用于弯曲。

在脆性材料受**复合应力**的情形下，我們运用莫尔理論（参看第388頁）。如果 σ_{max} 和 σ_{min} 两者同号，我們須用式 (j) 来計算 n。如果 σ_{max} 和 σ_{min} 异号，我們就用第390頁式 (h)。以 α 表示 $\sigma_{min}/\sigma_{max}$，得

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{max})_{ult} &= \frac{\sigma_{ut}}{1 - \alpha\dfrac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}}, \\ (\sigma_{min})_{ult} &= \frac{\alpha\sigma_{ut}}{1 - \alpha\dfrac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}}. \end{aligned}\right\} \tag{k}$$

对于純剪切，$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \tau$，$\alpha = -1$，由式(k)得出

$$\tau_{ult} = \frac{\sigma_{ut}}{1 + \dfrac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}}.$$

于是扭轉时的安全系数为

$$n = \frac{\sigma_{ut}}{k_1\tau_W\left(1 + \dfrac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right)}, \tag{l}$$

式中 k_1 为扭轉时的理論应力集中系数。

当正应力和剪应力同时作用时（如在弯曲和扭轉联合作用的情形下），我們得（参看原书上卷第297頁）

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}\left[k\sigma + \sqrt{(k\sigma)^2 + 4(k_1\tau)^2}\right],$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2}\left[k\sigma - \sqrt{(k\sigma)^2 + 4(k_1\tau)^2}\right],$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}},$$

式中 k 和 k_1 分别为弯曲和扭轉时的理論应力集中系数．現在运用这些应力的极限值[式(k)]，得拉伸和压縮主应力的安全系数为

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{2\sigma_{ut}}{\left[k\sigma + \sqrt{(k\sigma)^2 + 4(k_1\tau)^2}\right]\left[1 - \alpha\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right]}, \\ n &= \frac{2\alpha\sigma_{ut}}{\left[k\sigma - \sqrt{(k\sigma)^2 + 4(k_1\tau)^2}\right]\left[1 - \alpha\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

如果 $\tau = 0$，这些方程式就与式(j)一致；如果 $\sigma = 0$，我們就得式(l)．

交变載荷下的資用应力． 对于交变載荷，取材料的耐久极限 σ_E 作为計算安全系数的依据． 从延性材料开始討論，对于单向应力狀态我們取方程式

$$n = \frac{\sigma_E}{k_f\sigma_W}. \tag{n}$$

由于应力集中对延性材料疲劳強度的影响很大，因此在式(n)中引入了系数 k_f． 此系数較理論应力集中系数稍小(参看第 420 頁)，它可由图 327 所示的疲劳試驗結果求得，或用图 328 的曲綫算得．

在二維应力分布的情形下，最大应力的极限值为(参看第 408 頁)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_E}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}. \tag{o}$$

运用此表达式，对于扭轉($\alpha = -1$)得

$$n = \frac{\sigma_E}{\sqrt{3}\, k_f' \tau_W}, \tag{p}$$

式中 k_f' 由扭轉疲劳試驗或由图 328 中的曲綫求得． 在弯曲和扭轉联合作用的情形下，得

$$n = \frac{\sigma_E}{\sqrt{(k_f\sigma)^2 + 3(k_f'\tau)^2}}. \tag{q}$$

当 $\sigma=0$ 时，此式与式(p)一致；当 $\tau=0$ 时，它与式(n)一致。

对于**脆性材料**，只有很少的实验資料。为了偏于安全，在安全系数的計算公式中通常应用完全理論的应力集中系数。于是对于单向应力状态，得

$$n=\frac{\sigma_E}{k\sigma_W}. \tag{r}$$

对于扭轉，运用莫尔理論得

$$n=\frac{\sigma_E}{k_1\tau_W\left(1+\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right)}. \tag{s}$$

对于弯曲和扭轉的联合作用，得

$$n=\frac{2\sigma_T}{\left[k\sigma+\sqrt{(k\sigma)^2+4(k_1\tau)^2}\right]\left[1+\alpha\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right]}, \tag{t}$$

式中 α 为两主应力幅的較小者与較大者之比。

交变应力与稳恒应力的复合应力。这种情形下的极限应力状态可由图 315 和 316 所示的曲綫来决定。在我們以后的討論中，我們将限于应力循环与不变拉应力相迭加的情形。这是在实际应用中最可能遇到的一种情形，在这方面有足够数量的实验資料可資利用。

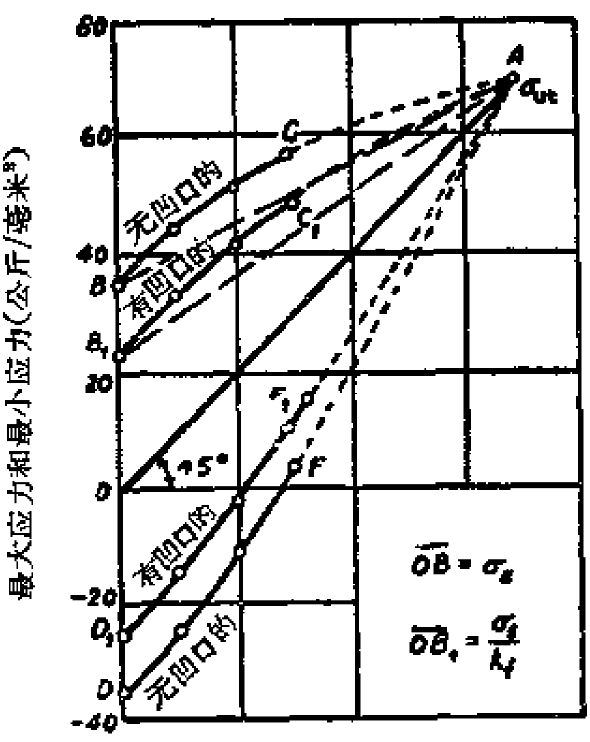


图 362

从**延性材料**的情形开始討論，对于含碳量为 0.7% 的碳鋼，无应力集中的試样的极限状态由图 362 中的曲綫 BCA 和 DFA 来表示。点 A 代表应力 σ_{ut}。对于**有凹口**試样，得曲綫 B_1C_1A 和 D_1F_1A。可以看出，由于存在应力集中，应

力循环的幅度稍有减小，但平均应力保持不变。 根据这种实験数据，在机器設計中惯常将应力集中系数用于应力的交变部分，而不用于不变部分。

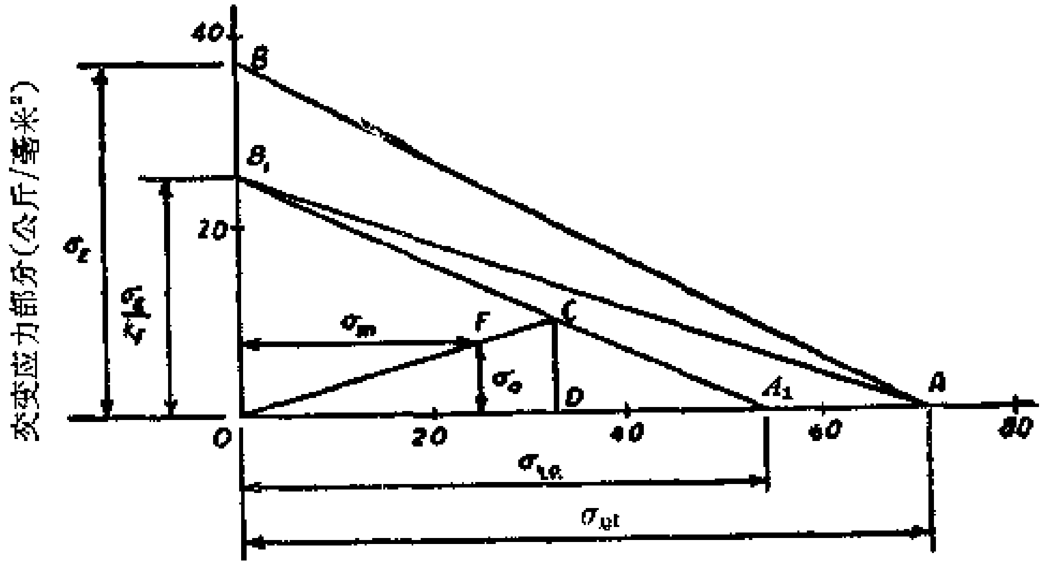


图 363

此外，也惯常用直綫(图 362 中所示的断綫)来代替曲綫 BCA 和 B_1C_1A。于是对于我們以后的討論，可用图 363 的三角形 OBA 和 OB_1A，图中横坐标表示应力的不变部分 σ_m，而縦坐标表示交变部分 σ_a。由于对于不变应力和对于延性材料，以前已取应力 $\sigma_{Y.P.}$ 作为选择資用应力的依据，因此我們以横坐标为 $\sigma_{Y.P.}$ 的点 A_1 代替点 A。 直綫 B_1A_1 可用来决定有应力集中的試样的极限应力状态[1]。如果图 363 的横坐标 OD 表示試样上的不变应力，则縦坐标 DC 就表示交变应力的极限幅度，而点 C 将代表极限应力状态。具有坐标 σ_m 和 σ_a 的点 F 将代表相应的安全状态。这些坐标是由点 C 的坐标除以安全系数 n 而得。 由三角形 OB_1A_1 与 DCA_1 的相似关系得

$$\frac{\overline{CD}}{\sigma_E/k_f}=\frac{\overline{DA}}{\sigma_{Y.P.}}=\frac{\sigma_{Y.P.}-\overline{OD}}{\sigma_{Y.P.}}$$

1) 这一改变偏于安全。

或

$$\frac{\overline{CD}}{\sigma_E/k_f}+\frac{\overline{OD}}{\sigma_{Y.P.}}=1,$$

将此式除以 n，对于安全应力状态(点 F)得

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_E/k_f}+\frac{\sigma_m}{\sigma_{Y.P.}}=\frac{1}{n},$$

或

$$n=\frac{1}{k_f\dfrac{\sigma_a}{\sigma_E}+\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{Y.P.}}}. \tag{u}$$

这是在有应力集中的单向应力状态下安全系数的表达式[1]。

在复合应力的情形下，必須将 σ_a 和 σ_m 的等价应力代入式(u)[2]。于是对于二維应力状态，得

$$n=\frac{1}{\left[k_f\dfrac{(\sigma_1)_a}{\sigma_E}+\dfrac{(\sigma_1)_m}{\sigma_{Y.P.}}\right]\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}. \tag{v}$$

将此式应用于扭轉的情形，我們有 $\sigma_1=\tau$，$\alpha=-1$，并用 k_f' 代替 k_f，得

$$n=\frac{1}{\sqrt{3}\left(k_f'\dfrac{\tau_a}{\sigma_E}+\dfrac{\tau_m}{\sigma_{Y.P.}}\right)}. \tag{w}$$

对于弯曲与扭轉的联合作用，安全系数可由下式求得：

$$n=\frac{1}{\sqrt{\left(k_f\dfrac{\sigma_a}{\sigma_E}+\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{Y.P.}}\right)^2+3\left(k_f'\dfrac{\tau_a}{\sigma_E}+\dfrac{\tau_m}{\sigma_{Y.P.}}\right)^2}}. \tag{x}$$

如果弯曲单独作用时，则 τ_a 和 τ_m 为零，此式就与式(u)一致。当 σ_a 和 σ_m 为零时，此式与式(w)一致。当 σ_m 和 τ_m 为零时，我們得完全反复的应力，此式就与式(q)一致[3]。

---

1) 由于这里我們討論不发生塑性变形的疲劳破坏，因此对于弯曲我們也可用式(u)，而不引用式(f)中所用的系数 β. 对 n 的方程式的形式[式(u)]是由 C. R. Soderberg 所提出的，*Trans. A. S. M. E.*, vol. 52, APM 52-2, 1930.

2) 設比值 $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$ 在应力循环期間保持不变.

3) 式(x)也可用于主应力之比 σ_1/σ_2 在每一循环期間改变的情形。

对于**脆性材料**，关于交变应力和稳恆应力的复合应力作用的实驗資料很少. 用 σ_{ut} 代替 $\sigma_{Y.P.}$，并用理論应力集中系数 k 和 k_1，而不用减小了的系数 k_f 和 k_f'，对于单向应力状态得

$$n=\frac{1}{k\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_E}+\frac{\sigma_m}{\sigma_{ut}}\right)}. \tag{y}$$

对于扭轉，运用莫尔理論得

$$n=\frac{1}{k_1\left(\frac{\tau_a}{\sigma_E}+\frac{\tau_m}{\sigma_{ut}}\right)\left(1+\frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}\right)}. \tag{z}$$

在前面的討論中，假設了尺寸仅由考虑強度来确定. 設計时有时必須考虑附加的要求. 在有些情形下，規定了一极限撓度，必須取其作为計算尺寸时的根据. 在考虑系統振动的情形下，此撓度非常重要. 軸有时必須满足对单位长度內扭轉角的要求.

对于承受高温作用的結构，設計时必須以假設結构的一个使用期和所能容許的一个变形量作为根据. 所选择的資用应力应使結构在其使用期內的变形不超过与結构形式有关的一定的限度(参看 §91).

对于細长杆和薄壁結构，选择資用应力时必須考虑弹性稳定性問題(参看第五章).

从所有这些討論中可以看出，选择資用应力是一个非常重要的問題，同时也是一个非常复杂的問題. 在确定安全系数 n 时，設計师必須經常以过去的經驗为指导. 上面的討論系将各种应力状态下的資用应力加以比較，它并不是要把过去的經驗取而代之，而是可以有助于說明此經驗，并达到其各部分等強度的設計. 此外，它还可以用于比較不同的設計和比較現有結构的強度. 按照上面的理論討論，为了获得結构強度的更深刻的知識，实际破坏的研究成了一个非常有效的方法[1]. 将破坏的分析与应力分布的理論研究，

1) 在这方面，如 Technical Reports, British Engine, Boiler, El. Insurance Co. 等刊物在实用上很为重要.

表26 鋼的机械性质

来源	材料%	状态	比例极限 磅/吋^2	屈服点 磅/吋^2	极限强度 磅/吋^2	伸长率(2吋标距)%	面积收缩率 %	耐久极限 磅/吋^2	备注
1	0.37C,0.55Mn	在850℃下退火	36500	37800	70000	32	49	±29000	2$\frac{1}{4}$''直径的圆杆
		在850℃下正火	38000	41500	79200	29	46	±29300	
		热处理,在850℃下水淬,在550℃下回火	65000	69000	105000	22	56	±51000	
2	0.49C,0.46Mn	在910℃下正火	44700	47100	91500	27	40	±33000	每边$\frac{15}{16}$'' 的方杆
		热处理,在790℃下油淬,在430℃下回火	75800	78800	121800	11.3	51	±64000	
1	0.35C, 0.45Mn, 3.4Ni	滚辗	47000	60000	105000	21	42	±41000	3$\frac{1}{2}$呎×2呎×2吋的板
		在840℃下退火	52000	60000	104000	22	49	±44000	
		在840℃下正火,在730℃下回火	52000	56000	94000	25	48	±47500	
		热处理,在800℃下水淬,在600℃下回火	72000	77000	107000	23	56	±52000	
2	0.24C, 0.37Mn, 3.3Ni, 0.87Cr	在780℃下退火	56700	60000	87000	33	67	±49000	2''×1''的杆
		热处理,在830℃下油淬	115000	128000	138000	18	62	±68000	
3	0.30C, 0.56Mn, 4.3Ni, 1.4Cr	从800℃空气(冷却)硬化	45000	177000	244000	10.8	37	±102000	1$\frac{1}{8}$''直径的圆杆
		从800℃空气(冷却)硬化,在600℃下回火	92000	142000	157000	17.5	55	±80000	
1	0.32C, 0.74Mn, 0.32Si	铸造	20000	33500	76000	26	34	±30500	2$\frac{1}{4}$''×1$\frac{1}{4}$''的杆
		在925℃下退火	37000	41000	80000	27	40	±35000	
		在925℃下正火	40500	46000	85000	28	46	±35000	

来源：1. Research Laboratory, Westinghouse Elec. Corp., 参看 S. Timoshenko and J. M. Lessells, Applied Elasticity, p. 522, 1924.
2. H. F. Moore and T. Jasper, *Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.*, No. 136, p. 33.
3. L. Aitchison, Engineering Steels, p. 209, 1921.

及各种应力状态下材料強度的实驗研究加以結合，可使我們能在結构的实际強度方面积累更可靠的知識． 当我們具有这种知識后，各門工程中容用应力的現有規范就可大大获得改善． 毫无疑問，这样就可节約材料，并提高結构和机器的可靠性．

內 容 索 引

T形梁 60, 230, 300
Z形截面的扭轉 229

二 画

力矩,梁的极限力矩 298~303
八角形軸的扭轉 205
八面体平面 348
  八面体平面上的应力 386

三 画

大理石的試驗 374
大梁腹板的屈曲 171
三力矩方程式 35
三角形軸的扭轉 204
三角級数,用三角級数表示的梁的撓度 42
上屈服点 342, 355
下屈服点 342, 355
工字梁,工字梁的应力集中 272
  工字梁的扭轉 212, 220, 230
  工字梁的极限力矩 300
  工字梁的橫向屈曲 173

四 画

比例极限 342, 431, 470
比拟,电比拟 273
  流体动力比拟 269
  薄膜比拟 205, 211, 214, 270, 328
內聚断裂 366
內摩擦 347, 351
不連續应力,壳中的不連續应力 110
六角形軸的扭轉 204
孔,有圓緣的孔 263
  受拉构件上的孔 259, 264
  板上的圓孔 96
  軸上的孔 268
  管上的孔 262
  轉盘上的孔 187
孔,橢圓孔 264, 269, 338
双曲綫凹槽 265, 278
云母的拉伸試驗 340
中面,板的中面 75
升高,屈服点升高 359
尺寸效应,拉伸試驗中的尺寸效应 340
  疲劳試驗中的尺寸效应 422
支柱(并参看柱)
  支柱的屈曲 128~162
  受橫向載荷的支柱 24
  格子支柱 152
  連續支柱 34, 136

五 画

正切模量 156
兰金理論 378
平面,八面体平面 348
  八面体平面上的应力 386
永久变形 342
古德曼定律 403
电比拟,用于扭轉的电比拟 273
立方晶胞 344
包辛蕣伸长計 365
包辛蕣效应 352, 354

六 画

凸緣,管凸緣中的应力 124
凸緣的有效寬度 58
凹槽,双曲綫凹槽 265, 278
压力,在流体靜压力下的試驗 373
  冷縮配合压力 183
  球与滚子間的压力 291
  临界压力 162
压縮試驗 370~378
曲率(参看梁及板)
曲率,具有初曲率的板 75
  具有初曲率的梁 49

收縮，拉伸試驗中的面积收縮　344
机械性質，材料的机械性質　336～471
机械性質，鋼的机械性質表　470
安全系数　460～471
　延性材料的安全系数　461
　扭轉时的安全系数　462
　彎曲时的安全系数　462
　复合应力下的安全系数　464
　脆性材料的安全系数　463
交变載荷下的安全系数　465
有效伸長　363
有效寬度，薄凸緣的有效寬度　58
自然应变　364
光弹性法　286
冲击試驗　392～398
剛性框架的极限強度　311
剛度，扭轉剛度　221
　彎曲剛度　69
　翹曲剛度　228

七　画

过应变效应　357，361，410
　（并参看残余应力和应变硬化）
系杆，受横向載荷的系杆　37
扭轉　204～257
　工字梁的扭轉　212，220，229
　Z形截面的扭轉　229
　用于扭轉的电比拟法　273
　用于扭轉的流体动力比拟法　269
　用于扭轉的薄膜比拟法　205，211，214，328
　非均匀扭轉　220，222，228
　非圓截面的扭轉　204
　扭轉中的应力集中　268～278
　扭轉中的纵向应力　246
　扭轉中的残余应力　328
　扭轉时的安全系数　462
　扭轉极限強度　326
　环的扭轉　121～127
　变直径軸的扭轉　272
　矩形軸的扭轉　207，249，329
　超过弹性极限的扭轉　326
　箱形梁的扭轉　216
　槽鋼的扭轉　211，223，228
　彈簧的扭轉　254
　薄矩形的扭轉　207，248
　薄梯形的扭轉　208
　薄管的扭轉　213
　翼截面的扭轉　217
　輥压截面的扭轉　211，220，228
扭轉屈曲　236，240
扭轉剛度　221
应力，八面体平面上的应力　386
　　壳中的局部应力　110
　　冷縮配合应力　183
　　热应力（参看热应力）
　　接触应力　291
　　厚壁圓筒中的应力　179
　　梁中的局部应力　52，278
　　容用应力　460～471
　　簡单径向应力　52，258
　　楔中的应力　55，258
　　軸中的应力（参看扭轉）
　　残余应力（参看残余应力）
　　管凸緣中的应力　124
　　彈簧中的应力　252
　　鋼軌中的应力　8
　　临界应力（参看屈曲）
　　薄膜应力　103
　　轉盘中的应力　186，193
　　轉筒中的应力　190
应力层　285，356
应力松弛　448
应力軌綫　289
应力幅　399，402～405，432
　真实应力　363
应力集中　258～296，414～428
　由槽引起的应力集中　264，269，278
　由鍵槽引起的应力集中　269
　用光弹性法研究应力集中　286
　用薄膜比拟法研究应力集中　270
　延性材料中的应力集中　268
　扭轉中的应力集中　268～278
　应力集中与疲劳　414
　应力集中的降低　422
　应力集中的模型研究　283
　板中的应力集中　259，264，278
　拉伸或压縮中的应力集中　258

玻璃中的应力集中 267
弯曲中的应力集中 278
带孔板中的应力集中 259
脆性材料中的应力集中 267
梁中的应力集中 278
混凝土拉伸試样中的应力集中 267
軸上的应力集中 268～278
管中的应力集中 262, 270
燕尾接头中的应力集中 267
輾压截面的应力集中 211, 272
轉盘中的应力集中 189
应力集中系数的定义 264
应变,自然应变 364
单位应变 363
应变能理論，用于破坏的应变能理論 380
应变率的影响 357
应变硬化 348, 360
应变硬化对蠕变的影响 444
时間效应,拉伸試驗中的时間效应 345, 439
壳 103～121
壳中的不連續应力 110
壳中的热应力 118
壳的屈曲 164
球形壳 105, 109
圓筒壳 106, 110, 118, 164
圓錐壳 105
折合长度 132
折合弹性模量 159, 316, 320
呂德斯綫 284, 356, 357
材料的机械性质 336～471
完全塑性材料 297
局部应力(并参看应力集中)
梁中的局部应力 52, 278
圓筒中的局部应力 110
初曲率,具有初曲率的板 75
具有初曲率的梁 49
初始橢圓率，具有初始橢圓率的管子 165
伸长,有效伸长 363
单位伸长 363
伸长計,包辛葛伸长計 365
延性 343
延性材料,延性材料的安全系数 461
延性材料的应力集中 268
延性材料的拉伸試驗 341
延性材料的破坏理論 378
位錯 350
冷作,拉伸中的冷作影响 358
冷作对耐久极限的影响 409, 426
冷縮配合应力 183
冷輾,表面的冷輾 425
体心立方晶胞 344
角截面,角截面的应力集中 272
角截面的扭轉 211, 230

八 画

屈曲 128～178
由分布載荷引起的屈曲 146
用于屈曲的能量法 142
杆的屈曲 128
壳与管的屈曲 164
扭轉屈曲 236, 240
板的屈曲 168
板梁腹板的屈曲 171
环的屈曲 162
变截面构件的屈曲 148
非彈性屈曲 156
弯扭联合作用时的屈曲 240
拱的屈曲 164
格子支柱的屈曲 152
連續支柱的屈曲 136
矩形框架的屈曲 138
梁的横向屈曲 173
剪切对屈曲的影响 150
横向屈曲 173
屈服力矩,梁中的屈服力矩 298
屈服点 355～358, 470
上屈服点和下屈服点 342, 355
屈服点升高 359
温度对屈服点的影响 437
表面光制方法对耐久极限的影响 414
表面疲劳破坏 428
松弛,应力松弛 448
环,环的扭轉 93～127
环的屈曲 162
圓錐环 126

疇环 186
岩盐晶体的試驗 339, 365, 393
板 68～103
板中的应力集中 259, 264, 278
板中的热应力 81
板的中面 75
板的屈曲 168
板的弯曲刚度 69
板的純弯曲 77
板的圓柱形弯曲 68
具有初曲率的板 75
矩形板 68～82, 100
受均布載荷的矩形板 70, 100
具有初曲率的矩形板 75
矩形板的屈曲 168
矩形板的圓柱形弯曲 68
性质,材料在高溫下的性质 437
材料的性質 336～471
性质,鋼的性质(表) 470
极限力矩,梁的极限力矩 299～303
极限設計 304～314
极限強度,梁的极限強度 304～311
框架的极限強度 311～314
用虛位移原理計算极限強度 310
极限強度,拉伸試驗中的极限強度 343
极限轉矩,軸的极限轉矩 326
变形,弹簧的变形 251
变形能理論 375, 383～387, 406
变厚度,变厚度圓板 90
变厚度轉盘 193
变截面,变截面柱 148
变截面梁 56
变截面軸 272
拉伸試驗 336～370
云母的拉伸試驗 340
在高溫下的拉伸試驗 437
完全塑性材料的拉伸試驗 297
延性材料的拉伸試驗 341
岩盐晶体的拉伸試驗 339, 365, 393
拉伸試驗中的尺寸效应 340
拉伸試驗中的时間效应 345, 439
拉伸試驗中的迟滞迴綫 347
拉伸試驗中的溫度影响 346, 439
拉伸試驗中的断裂 365
拉伸試驗中的弹性后效 346
拉伸試驗用的标准試样 267, 336
玻璃的拉伸試驗 337
带槽試样的拉伸試驗 369
脆性材料的拉伸試驗 337
混凝土的拉伸試驗 267
鋼的拉伸試驗(参看鋼)
拉梅理論,用于厚壁圓筒的拉梅理論
181
齿輪的疲劳破坏 417, 430
迟滞迴綫 347, 432
杯錐状断裂 366
非均匀扭轉 220, 222, 228
非弹性扭轉 326
非弹性扭轉所产生的残余应力 328
非弹性屈曲 156
非弹性弯曲 297, 314, 320
非弹性弯曲所产生的残余应力 322

九 画

軌綫,应力軌綫 289
厚壁圓筒 179
厚壁圓筒中的热应力 198
厚壁圓筒中的蠕变 455
厚壁圓筒的塑性变形 330
旋轉的厚壁圓筒 190
迭加法,应用于支柱的迭加法 27
迭加法的限制 62, 308
玻璃的应力集中 267
玻璃的拉伸試驗 337
带槽試样的試驗 369
耐久极限 399～414, 470
反复应力下的耐久极限 402
含鉄金属的耐久极限 401
扭轉耐久极限 406
复合应力下的耐久极限 407
弯曲耐久极限 400
影响耐久极限的因素 409
耐久試驗 399
面心立方晶胞 344
面积-力矩法 302
复合应力,复合应力下的安全系数 463
复合应力下的疲劳 406
复合应力下的試驗 372～378

复合应力下的蠕变　451～459
柱　128～162
用于柱的能量法　146
变截面柱　148
受分布軸向載荷的柱　146
柱的扭轉屈曲　236，240
柱的非弹性屈曲　156
柱的剪切影响　150
格子柱　152
拱的屈曲　164
柏来維尔弹簧　126
弯曲，板的弯曲(参看板)
弯曲，連續支柱的弯曲　34
弯曲，梁的弯曲(并参看梁)
梁在高溫下的弯曲　445
梁弯曲中的应力集中　278
梁弯曲时的安全系数　462
梁超过弹性极限后的弯曲　297，314，320，322
弯曲，弹簧的弯曲　255
弯曲刚度，板的弯曲刚度　69
临界压力，环的临界压力　162
拱的临界压力　164
管的临界压力　165
临界載荷　128～178
用能量法求临界載荷　142
受非弹性屈曲时的临界載荷　156
受扭轉屈曲时的临界載荷　236
(并参看屈曲及柱)
受弯扭联合屈曲时的临界載荷　240
剪切对临界載荷的影响　150
临界溫度　393～398

十　画

縱向应力，扭轉中的縱向应力　246
破坏曲綫　410
破坏理論　378～392
延性材料的破坏理論　378
脆性材料的破坏理論　388
退火效应　360，361，441
脆性材料，脆性材料的尺寸效应　340
脆性材料的安全系数　464
脆性材料的应力集中　267
脆性材料的拉伸試驗　337
脆性材料的莫尔破坏理論　388，408
脆性材料的断裂　365，392
脆性溫度　393～398
脆性漆　285，356
能量法，用于临界載荷的能量法　142
能量理論，关于破坏的能量理論　380
疲劳　398～437
表面疲劳　428
复合应力下的疲劳　406
疲劳中的尺寸效应　422
疲劳和应力集中　414
疲劳起因　431
腐蝕疲劳　412
影响疲劳的因素　409
疲劳破坏　401
表面疲劳破坏　428
疲劳破坏的例子　415
框架，矩形框架的屈曲　138
框架的极限強度　311
高溫，材料在高溫下的性質　437
梁在高溫下的弯曲　445
流体动力比拟　269
流体靜压，在流体靜压下的試驗　373
格子支柱的屈曲　152
迴綫，迟滞迴綫　347，432
起斑极限　430
起斑裂縫　428
容器，薄壁容器(参看壳)
眞实应力　363
热应力，壳中的热应力　118
板中的热应力　81
圓筒中的热应力　198
純弯曲，板的純弯曲　77
梁的純弯曲　314
径向应力　52，258
莫尔破坏理論　388，408
矩形板　68～82，100
受均布載荷的矩形板　70，100
具有初曲率的矩形板　75
矩形板的屈曲　168
矩形板的圓柱形弯曲　68
矩形环的扭轉　122
矩形框架的屈曲　138
矩形框架的极限強度　311

矩形梁的极限力矩　299
矩形軸的扭轉　207，249，329

十　一　画

梯形軸的扭轉　205，208
強度理論　378～392
　延性材料的強度理論　378
　脆性材料的強度理論　388
球形座　292
球形容器　105，109
球軸承中的接觸应力　291
剪切，剪切对板撓度的影响　88
　剪切对临界載荷的影响　150
　变截面梁的剪切　56
剪切变形，圓板的剪切变形　88
剪切破坏理論　380
剪切断裂　366
剪切滞后　62
剪流　218
細长比　132
敏感系数　420
盖柏定律　402
断裂，内聚断裂　366
　拉伸断裂　365～370
　杯錐状断裂　366
　疲劳断裂　401
　脆性材料的断裂　365，392
　剪切断裂　366
　晶体断裂　365
基础系数　1
盘，轉盘　186，193
　轉盘中的蠕变　457
接触应力　291
連續支柱，連續支柱的屈曲　136
　連續支柱的弯曲　34
混凝土，混凝土的拉伸試驗　267
　混凝土的压縮試驗　371
梁，受軸向和横向載荷的梁　24～51
　受軸向載荷的梁　24～51
　变截面梁　56
　具有初曲率的梁　49
　具有薄凸緣的梁　58
　梁中的应力集中　278
　梁中的局部应力　52，278
　梁中的剪应力　56
　梁的屈服力矩　298
　梁的极限力矩　299～303
　梁的极限強度　304
　梁的极限設計　304
　梁的横向屈曲　173
　梁超过弹性极限后的弯曲　297，314，
　　320，322
　箱形梁　61，216
　弹性支座上的梁　19
梁的撓曲，用三角級数表示梁的撓曲　42
　具有初曲率的梁的撓曲　49
　梁超过弹性极限后的撓曲　301，321
梁，弹性基础上的梁　1～23
　无限长的梁　1
　半无限长的梁　11
　有限长的梁　15

十　二　画

軸（参看扭轉）
軸向应力，由扭轉产生的軸向应力　246
軸向載荷，梁上的軸向載荷　24～51
虛位移，用虛位移求极限強度　310
韌性　392
溫度，脆性溫度　393～398
　溫度对拉伸試驗的影响　346，351
　溫度对金属性質的影响　437
　溫度对耐久极限的影响　412
　溫度对梁弯曲的影响　445
残余应力　185，190，352
　由非弹性弯曲引起的残余应力　322
　由非弹性扭轉引起的残余应力　328
　厚壁圓筒中的残余应力　332
　残余应力对耐久极限的影响　414
幅度，应力幅　399，402～405，432
疏圈弹簧　251
最大应力理論　378
最大应变理論　379
最大变形能理論　375，383～387，406
最大能量理論　380
最大剪应力理論　380
硬化，应变硬化　348，360，444
筒，轉筒　114
集中，应力集中（参看应力集中）

集中載荷,梁上的集中載荷 52
联合作用,弯扭联合作用 230
联合屈曲,弯扭联合屈曲 240
联合載荷,軸向和横向联合載荷 24～51
晶体,晶体的拉伸試驗 339, 344～350, 393
晶体的断裂 365
晶体的結构 344
晶体的塑性伸長 348
晶体的弹性模量 345
晶格 344
晶胞結构,晶体的晶胞結构 344
弹性后效,拉伸試驗中的弹性后效 346
弹性极限 352
弹性迟滞 347
弹性基础上的梁 1～23
弹性稳定性(参看屈曲)
弹性模量,单晶体的弹性模量 345
正切弹性模量 156
折合弹性模量 159, 316, 320
弹簧,柏来維尔弹簧 126
弹簧的扭轉 254
弹簧的变形 251
弹簧的弯曲 255
弹簧的疲劳破坏 417
螺旋弹簧 251
等傾綫 289
等价T形梁 60

十 三 画

楔中的应力 55, 258
貫用应力 460～471
用于交变載荷的貫用应力 465
用于扭轉的貫用应力 462
用于延性材料的貫用应力 461, 466
用于受拉杆件的貫用应力 460, 466
用于弯曲的貫用应力 462
用于脆性材料的貫用应力 463, 466, 469
用于靜載荷的貫用应力 461
滑移带 348, 351, 433
塑性 297～335
塑性扭轉(参看扭轉)
塑性伸长,晶体的塑性伸长 348
塑性变形,圓筒的塑性变形 330
塑性弯曲(参看梁)
塑性鉸 301
圓孔,有圓緣的圓孔 263
板上的圓孔 95
受拉构件上的圓孔 259, 263
軸上的圓孔 269
帶上的圓孔 262
轉盘上的圓孔 187
圓角,由圓角引起的应力集中 265, 273, 279
圓环,受內压的圓环 108
圓环的扭轉 121
圓环的屈曲 162
圓板 82～100
受对称載荷的圓板 82
受同心載荷的圓板 94
受均布載荷的圓板 85
受集中載荷的圓板 91
变厚度圓板 90
带孔的圓板 96
圓板的大撓度 89
圓板的剪切变形 88
圓拱的屈曲 164
圓柱形弯曲,板弯成圓柱面的弯曲 68
圓筒,厚壁圓筒 179
組合圓筒 183
旋轉圓筒 190
圓筒中的局部应力 110
圓筒中的热应力 198
圓筒中的蠕变 455
圓筒的塑性变形 330
圓筒(柱)間的接触应力 291
薄壁圓筒 106, 110, 118, 164
圓筒壳 106, 110, 118
具有加固环的圓筒壳 115, 116
圓筒壳的屈曲 164
圓管的屈曲 164
圓頂 89
圓錐形环 126
圓錐形容器 105
試驗,在复合应力下的試驗 372～378
在流体靜压下的試驗 373
压縮試驗 370～378

冲击試驗 392～398
拉伸試驗(参看拉伸試驗)

十　四　画

稳定性(参看屈曲)
鉸,塑性鉸 301
腐蝕 362
腐蝕疲劳 412
滚子,滚子中的接触应力 291
　滚子的表面疲劳破坏 428
　滚子的起斑抗力 430
管子,具有加固环的管子 115, 116
　具有初始椭圓率的管子 165
　管子中的应力集中 262, 270
　管子中的蠕变效应 454
　管子的扭轉 214
　管子的屈曲 164
管凸緣中的应力 124
膜,圓膜 89
模型,应力分析用的模型 283
綫,呂德斯綫 284, 356, 357
綫,等傾綫 289

十　五　画

摩擦,内摩擦 347, 351
撓曲,梁的撓曲(并参看梁)
　具有初曲率的梁的撓曲 49
　受軸向和横向載荷的梁的撓曲 24～51
　超过弹性极限后梁的撓曲 301, 321
　弹性基础上的梁的撓曲 1～23
槽,由槽引起的应力集中 264, 269, 278
槽形截面,槽形截面的应力集中 272
　槽形截面的扭轉 211, 225, 228
箱形梁,箱形梁的扭轉 216
　箱形梁的弯曲 61

十　六　画

燕尾接头 267
横向屈曲,梁的横向屈曲 173
頸縮,拉伸試驗中的頸縮 343, 363
椭圓孔,扭軸上的椭圓孔 269
　受拉构件上的椭圓孔 264
　玻璃上的椭圓孔 338
椭圓軸的扭轉 204
鋼,伸长超过屈服点后的鋼 358
　复合应力下的鋼 373
　弹性范围內的鋼 350
　鋼的含碳量影响 337
　鋼的性質表 470
　鋼的屈服 355
　鋼的拉伸試驗 337, 341
　鋼的断裂 366
鋼軌中的应力 8

十　七　画

螺栓中的应力松弛 448
螺旋弹簧 251
薄凸緣,具有薄凸緣的梁 58
薄板与薄壳 68～127
薄管(参看管子)
薄膜比拟 205, 211, 214, 216
　用于扭轉超过弹性极限时的薄膜比拟 328
　用薄膜比拟法研究应力集中 270
薄膜应力 103
薄壁容器(参看壳)
翼截面的扭轉 217
鍵槽,由鍵槽引起的应力集中 269

十　八　画

轉子中的应力 192
轉环 186
轉盘 186, 193
　轉盘中的蠕变 457
轉筒 114, 190
翹曲,由扭轉引起的翹曲 220
翹曲刚度 228
簡单径向应力 52, 258

二　十　画

蠕变 439～459
　扭轉中的蠕变 454
　厚管中的蠕变 455
　复合应力下的蠕变 451～459
　薄管中的蠕变 454
　轉盘中的蠕变 457
　蠕变曲綫 440～445
蠕变率 440